



Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2017–2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс

Вариант I математика

1. Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет ровно 17° ?

Ответ: 44.

Решение. За промежуток времени от 0:00 до 12:00 часовая стрелка сделает один полный оборот, а минутная — 12 таких оборотов. Значит, за указанное время минутная стрелка 11 раз догонит часовую. Между двумя последовательными встречами стрелок ровно два раза угол между ними составит 17° . Стало быть, между полночью и полднем $11 \cdot 2 = 22$ раза между стрелками будет нужный угол, а за сутки таких моментов буде вдвое больше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x-2}{11}} + \sqrt{\frac{x-3}{10}} = \sqrt{\frac{x-11}{2}} + \sqrt{\frac{x-10}{3}}.$$

Ответ: 13.

Решение. Если выполнить замену переменной $x = t + 13$, то во всех подкоренных выражениях выделится 1:

$$\sqrt{\frac{t}{11} + 1} + \sqrt{\frac{t}{10} + 1} = \sqrt{\frac{t}{2} + 1} + \sqrt{\frac{t}{3} + 1}. \quad (*)$$

Теперь видно, что при $t > 0$ больше правая часть уравнения, при $-2 \leq t < 0$ больше левая часть, а при $t = 0$ выполняется равенство. Значит, $t = 0$ — единственный корень уравнения (*), а исходное уравнение имеет единственный корень $x = 13$.

Замечание. Другое решение может быть основано на таком наблюдении:

$$(k > m > 0) \Rightarrow \left(\frac{x-k}{m} > \frac{x-m}{k} \iff x > k+m \right).$$

Оценивание. За верное решение 12 б. Если ответ угадан, но не доказана его единственность, 3 б.

3. Пусть в треугольнике ABC

$$\cos(2\angle A - \angle B) + \sin(\angle A + \angle B) = 2.$$

Найдите сторону BC , если $AB = 4$.

Ответ: 2.

Решение. В левой части уравнения каждое слагаемое не больше 1. Поэтому равенство будет иметь место только, если каждое из них равно 1. Решим соответствующие уравнения, обозначив $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$:

$$2\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

С учётом того, что $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, получаем

$$2\alpha - \beta = 0; \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\beta = 2\alpha, \quad 3\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Значит, ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB и углом в 30° против стороны BC . Поэтому $BC = AB/2 = 2$.

Оценивание. За верное решение 12 б.

4. Найдите уравнение такой прямой L , что график функции

$$y = x^4 + 4x^3 - 26x^2$$

лежит по одну сторону от этой прямой, имея с ней две общие точки.

Ответ: $y = 60x - 225$.

Решение. Пусть $y = ax + b$ — уравнение прямой L . Нужно подобрать такие a и b , чтобы уравнение

$$x^4 + 4x^3 - 26x^2 - (ax + b) = 0$$

имело два корня x_1 и x_2 чётной кратности. Для этого многочлен четвёртой степени должен иметь такое разложение на множители:

$$x^4 + 4x^3 - 26x^2 - ax - b = (x - x_1)^2(x - x_2)^2.$$

Раскроем скобки в правой части и приравняем коэффициенты при x^3 и x^2 в правой и левой частях тождества:

$$-2(x_1 + x_2) = 4; \quad x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1^2 = -26.$$

Отсюда

$$x_1 + x_2 = -2; \quad (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = -26; \quad x_1x_2 = -15.$$

Если $x_1 < x_2$, то $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

Теперь приравняем коэффициенты при x и свободные члены:

$$-2x_1x_2^2 - 2x_2x_1^2 = -2x_1x_2(x_1 + x_2) = -a; \quad x_1^2x_2^2 = -b$$

и найдём, что $a = 60$, $b = -225$.

Оценивание. За верное решение 14 б.



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2017-2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс
Вариант 1

физика

5. Сталкер, для обнаружения гравитационной аномалии (области, где ускорение свободного падения резко изменяется по модулю), бросает небольшую гайку от поверхности Земли под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0=10$ м/с. Нормальное ускорение свободного падения $g=10$ м/с². В самой верхней точке своей траектории гайка попадает в зону аномалии и продолжает двигаться в ней. В результате, гайка падает на Землю на расстоянии $S=3\sqrt{3}$ м от сталкера. Определите ускорение свободного падения внутри аномалии. (15 баллов)

Ответ: 250 м/с²

Решение. Уравнения движения до аномалии: $x=v_0 \cos \alpha \cdot t=5\sqrt{3} \cdot t$ (2 балла),

$y=v_0 \sin \alpha \cdot t-\frac{gt^2}{2}=5 \cdot t-5 \cdot t^2$ (2 балла), $v_x=v_0 \cos \alpha=5\sqrt{3}$ (2 балла), $v_y=v_0 \sin \alpha-gt=5-10t$ (2

балла). Отсюда получаем, что для верхней точки полета: $t_g=0,5$ с, $x_g=2,5\sqrt{3}$ м,

$y_g=1,25$ м (1 балл). Уравнения движения внутри аномалии: $S=x_g+v_x t=2,5\sqrt{3}+5\sqrt{3}t$ (2

балла), $y=0=y_g-\frac{g_a t^2}{2}=1,25-\frac{g_a t^2}{2}$ (2 балла).

Решая данную систему, получаем: $g_a=250$ м/с² (2 балла).

6. Тормоза автомобиля позволяют ему стоять на наклонной асфальтовой поверхности с углом при основании не более 15° . Определите минимальный тормозной путь у данного автомобиля при движении со скоростью 20 м/с по ровной горизонтальной дороге с таким же покрытием. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с², $\cos 15^\circ \approx 0,966$, $\sin 15^\circ \approx 0,259$. (15 баллов)

Ответ: 74,6 м

Решение. Для ситуации, когда автомобиль стоит на наклонной плоскости:

$F_{mp} = mg \sin \alpha$ (2 балла), $\mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha$ (2 балла). То есть коэффициент трения:

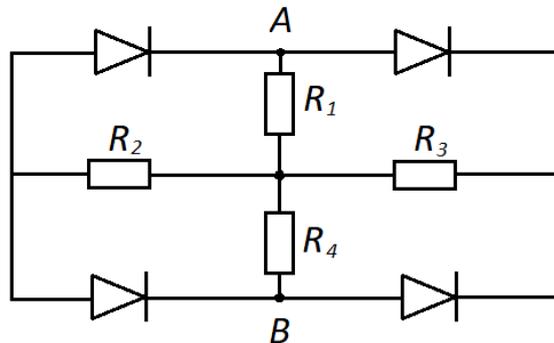
$\mu = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 0,268$ (3 балла). Для ситуации, когда автомобиль едет по

горизонтальной поверхности: $F_{mp} = ma$, $\mu mg = ma$ (2 балла),

$\mu g = a = 2,68$ (3 балла). Тогда тормозной путь автомобиля: $S = \frac{v^2}{2a} = \frac{20^2}{2 \cdot 2,68} \approx 74,6 \text{ м}$

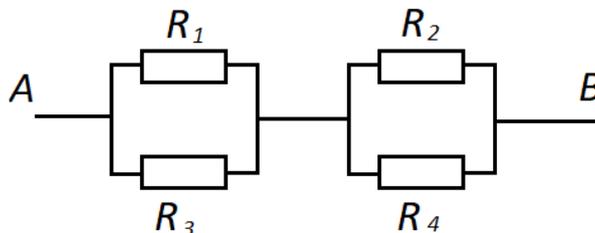
(3 балла).

7. В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$ и $R_4 = 4 \text{ Ом}$. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками A и B в ситуации, когда к точке A подключают положительный полюс источника тока, а к точке B – отрицательный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало. (10 баллов)



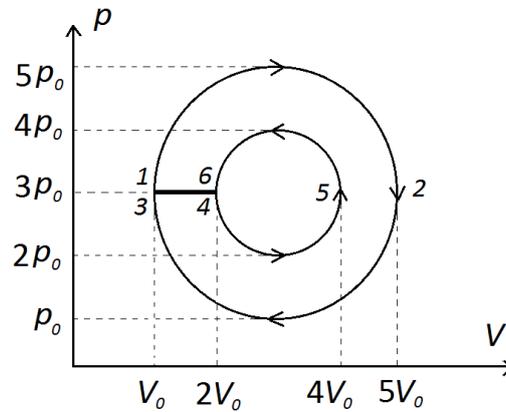
Ответ: 2,08 Ом

Решение. В предложенной ситуации получается следующая эквивалентная схема (5 баллов):



Её общее сопротивление: $R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} + \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{25}{12} \approx 2,08 \text{ Ом}$ (5 баллов).

8. Определите работу газа, совершаемую за цикл 1-2-3-4-5-6-1, если известно, что $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $V_0 = 1 \text{ л}$. Состояния газа 1 и 3 совпадают, аналогично для состояний 4 и 6. (10 баллов)



Ответ: 942 Дж

Решение. Работа газа в замкнутом процессе равна площади фигуры внутри процесса (2 балла). То есть в данном случае, с учетом того, что $A_{34} = -A_{61}$, получаем:

$$A = A_{123} + A_{34} + A_{456} + A_{61} = A_{123} + A_{456} = S_{\text{окр}123} - S_{\text{окр}456} = \pi \cdot \frac{(5p_0 - p_0)}{2} \cdot \frac{(5V_0 - V_0)}{2} - \pi \cdot \frac{(4p_0 - 2p_0)}{2} \cdot \frac{(4V_0 - 2V_0)}{2} = 3\pi p_0 V_0$$

(5 баллов).

Окончательный результат: $A \approx 942 \text{ Дж}$ (3 балла).