Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2017–2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

8 класс

Вариант II математика

1. Андрей, Борис и Валентин участвовали в забеге на 1 км. (Считаем, что каждый из них бежал с постоянной скоростью). Андрей на финише был впереди Бориса на 60 м. А Борис на финише был впереди Валентина на 50 м. Какое расстояние было между Андреем и Валентином в тот момент, когда финишировал Андрей?

Ответ: 107 м.

Решение. Пусть скорости Андрея, Бориса и Валентина соответственно a, b и c м/с. Из условия следует, что $b = 0{,}94a$, $c = 0{,}95b$. Отсюда $c = 0{,}94 \cdot 0{,}95a = 0{,}893a$. Значит, когда Андрей пробежит 1000 м, Валентин преодолеет 893 м. Отставание составит 107 м.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. В класс пришёл новый учитель математики. Он провёл опрос среди учеников этого класса, любят ли они математику. Оказалось, что 50% любят математику, а 50% не любят. Такой же опрос учитель провёл в конце учебного года. На этот раз «да» ответили 60% учеников, «нет» — 40% учеников. Пусть $x\%$ учеников дали во втором опросе не такой ответ, как в первом. Найдите наименьшее и наибольшее значение x.

Ответ: 10; 90.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что в классе 100 учеников. Пусть из них

- a учеников оба раза ответили «да»,
- b учеников оба раза ответили «нет»,
- c учеников поменяли ответ «нет» на ответ «да»,
- d учеников поменяли ответ «да» на ответ «нет».

Нужно найти наименьшее и наибольшее значение $x = c + d$ при условии, что $c + b = a + d = 50$, $a + c = 60$, $b + d = 40$. Имеем

$$c = 50 - b; \quad d = 40 - b; \quad x = c + d = 90 - 2b.$$

Отсюда $0 \leqslant b \leqslant 40$, а $10 \leqslant x \leqslant 90$.

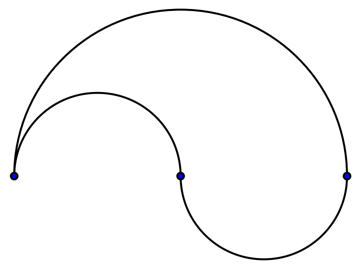
Если $b = 0$, то $c = 50$, $d = 40$, $a = 10$.

Если $b = 40$, то $c = 10$, $d = 0$, $a = 50$.

Значит, наименьшее и наибольшее значение x равны 10 и 90.

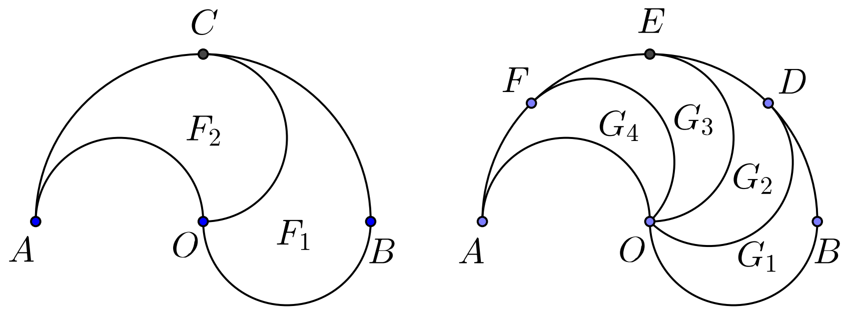
Оценивание. За верное решение 12 б. Если верно найдено только одно из двух значений, 3 б.

3. Фигура, изображённая на рисунке, ограничена тремя полуокружностями, у двух из которых одинаковый радиус, а у третьей вдвое больше.



Как её разрезать 1) на две; 2) на четыре равные части?

Решение. 1) Пусть C — середина дуги AB. Проведём полуокружность OC, как показано на рис.



Тогда при повороте на 90° против часовой стрелки вокруг точки O точки B и C переходят соответственно в точки C и A, при этом дуги OB, BC и OC переходят соответственно в дуги OC, CA и OA. Значит, фигура F_1 при таком повороте переходит в F_2. Получили разрезание на две равные части.

2) Решение аналогично предыдущему. Точки D, E и F делят полуокружность BA на четыре равные дуги. При повороте на 45° фигура G_1 переходит в G_2, G_2 в G_3, G_3 в G_4. Получили разрезание на четыре равные части.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если решён только один из двух пунктов, 6 б.

4. В шахматном турнире участвовало две девушки и несколько юношей. Каждый участник играл с каждым ровно один раз. Две девушки набрали вместе 6 очков, а все юноши набрали очков поровну. Сколько юношей могло участвовать в турнире? (За победу в партии даётся 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$ очка, за проигрыш 0 очков.)

Ответ: 5 или 10.

Решение. Пусть в турнире участвовало n юношей, и каждый из них набрал по k очков. Тогда все игроки вместе набрали $6+kn$ очков. С другой стороны, в турнире было $n+2$ участников, и они провели между собой $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ встреч. В каждой встрече разыгрывалось ровно одно очко. Значит, общее число набранных очков равно количеству проведённых партий:

$$6+kn=\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$n(3+n-2k)=10.$$

Отсюда следует, что n — делитель числа 10. Из условия задачи следует, что $n>2$. Поэтому $n=5$ или $n=10$. Покажем, что оба случая возможны.

При $n=5$ имеем $k=3$, и искомый турнир получится, если, например, предположить, что все встречи между 7 участниками завершились вничью.

При $n=10$ имеем $k=6$, и искомый турнир получится, если, например, предположить, что одна из девушек проиграла всем остальным участникам турнира, а все встречи между оставшимися 11 участниками завершились вничью.

Оценивание. За верное решение 14 б. Если найдены искомые значения n, но не показано, что соответствующие турниры действительно существуют, 7 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2017-2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

8 класс
Вариант 2

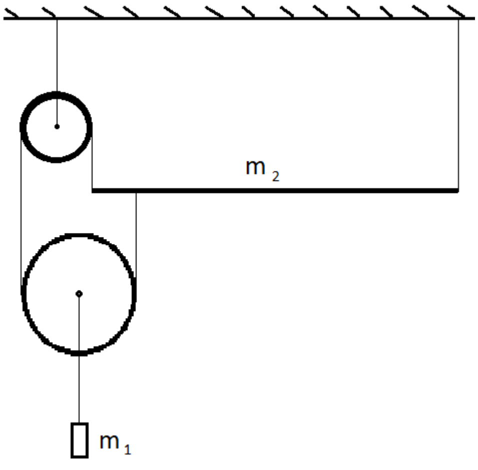
физика

5. Небольшой груз висит в воздухе на пружине. Когда этот груз на той же пружине полностью погружают в керосин, то величина деформации пружины остается прежней. Определите плотность материала груза. Плотность керосина $\rho = 800\ кг/м^3$. (***15 баллов***)

Ответ: 400 $кг/м^3$

Решение. В воздухе пружина растянута: $kx = mg$ (4 балла). В керосине пружина сжата: $mg + kx = F_A = \rho_{ж} gV$ (4 балла). Так как масса груза $m = \rho_г V$ (3 балла), то в результате получаем: $\rho_г = \frac{\rho_{ж}}{2} = \frac{800}{2} = 400\ кг/м^3$ (4 балла).

6. Конструкция, изображённая на рисунке, находится в равновесии. Известно, что длина однородного стержня $l = 50\ см$, а его масса $m_2 = 2\ кг$. Расстояние между точками крепления левой нити к стержню $S = 10\ см$. Определите массу m_1 груза. Все нити невесомые и нерастяжимые. Блоки – невесомые. (***15 баллов***)



Ответ: 10 $кг$

Решение. Из условия равновесия для большого блока следует, что сила натяжения левой нити: $T_л = \frac{m_1 g}{2}$ (5 баллов). Условие равновесия для стержня относительно точки крепления правой нити: $T_л \cdot l = T_л \cdot (l - S) + m_2 g \cdot \frac{1}{2} l$ (5 баллов).

В результате, получаем: $m_1 = \frac{m_2 l}{S} = \frac{2 \cdot 0,5}{0,1} = 10\ кг$ (5 баллов).

7. Два одинаковых резистора сопротивлением R каждый соединены последовательно друг за другом и подключены к источнику постоянного напряжения U. Параллельно одному из резисторов подключили идеальный вольтметр. Его показания оказались равными $U_V = 15\ В$. После этого вольтметр заменили идеальным амперметром. Показания амперметра – $I_A = 20\ А$. Определите значение R. (***10 баллов***)

Ответ: 1,5 *Ом*

Решение. Напряжение источника: $U = U_V + U_V = 30\ В$ (4 балла). У идеального амперметра сопротивление: $r_A = 0\ Ом$ (3 балла). Следовательно, сопротивление резистора: $R = \frac{U}{I_A} = \frac{30}{20} = 1,5\ Ом$ (3 балла).

8. Медный кубик с длиной ребра $l = 5\ см$ разогрели до температуры $t_1 = 100\ °C$. После этого поставили на лёд, температура которого $t_2 = 0\ °C$. Определите максимальную глубину, на которую кубик сможет опуститься. Удельная теплоёмкость меди $c_м = 400\ Дж/кг \cdot °C$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5\ Дж/кг$, плотность меди $\rho_м = 8900\ кг/м^3$, плотность льда $\rho_л = 900\ кг/м^3$. (***10 баллов***)

Ответ: 0,06 *м*

Решение. Масса кубика: $m_м = \rho_м V = \rho_м l^3$ (2 балла). Уравнение теплового баланса для кубика и льда: $c_м m_м \Delta T = \lambda m_л$ (2 балла). При этом масса расплавившегося льда: $m_л = \rho_л V_л = \rho_л S h = \rho_л l^2 h$ (3 балла), где h – максимальная глубина, на которую опускается кубик. В результате, получаем: $h = \frac{c_м \rho_м l^3 \Delta T}{\lambda \rho_л l^2} = \frac{c_м \rho_м l \Delta T}{\lambda \rho_л} = \frac{400 \cdot 8900 \cdot 0,05 \cdot 100}{3,3 \cdot 10^5 \cdot 900} \approx 0,06\ м$ (3 балла).