



Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2017–2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс

Вариант I математика

1. Андрей, Борис и Валентин участвовали в забеге на 1 км. (Считаем, что каждый из них бежал с постоянной скоростью). Андрей на финише был впереди Бориса на 50 м. А Борис на финише был впереди Валентина на 40 м. Какое расстояние было между Андреем и Валентином в тот момент, когда финишировал Андрей?

Ответ: 88 м.

Решение. Пусть скорости Андрея, Бориса и Валентина соответственно a , b и c м/с. Из условия следует, что $b = 0,95a$, $c = 0,96b$. Отсюда $c = 0,96 \cdot 0,95a = 0,912a$. Значит, когда Андрей пробежит 1000 м, Валентин преодолеет 912 м. Отставание составит 88 м.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. В класс пришёл новый учитель математики. Он провёл опрос среди учеников этого класса, любят ли они математику. Оказалось, что 50% любят математику, а 50% не любят. Такой же опрос учитель провёл в конце учебного года. На этот раз «да» ответили 70% учеников, «нет» — 30% учеников. Пусть $x\%$ учеников дали во втором опросе не такой ответ, как в первом. Найдите наименьшее и наибольшее значение x .

Ответ: 20; 80.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что в классе 100 учеников. Пусть из них

- a учеников оба раза ответили «да»,
- b учеников оба раза ответили «нет»,
- c учеников поменяли ответ «нет» на ответ «да»,
- d учеников поменяли ответ «да» на ответ «нет».

Нужно найти наименьшее и наибольшее значение $x = c + d$ при условии, что $c + b = a + d = 50$, $a + c = 70$, $b + d = 30$. Имеем

$$c = 50 - b; \quad d = 30 - b; \quad x = c + d = 80 - 2b.$$

Отсюда $0 \leq b \leq 30$, а $20 \leq x \leq 80$.

Если $b = 0$, то $c = 50$, $d = 30$, $a = 20$.

Если $b = 30$, то $c = 20$, $d = 0$, $a = 50$.

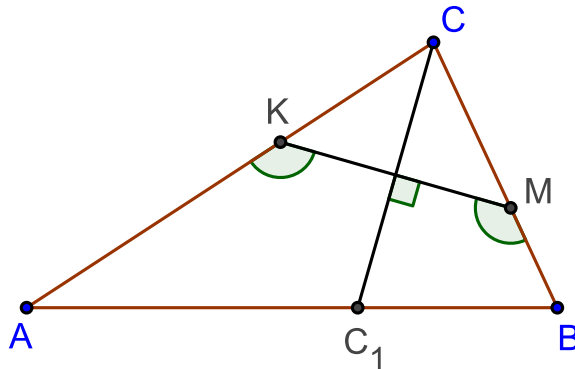
Значит, наименьшее и наибольшее значение x равны 20 и 80.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если верно найдено только одно из двух значений, 3 б.

3. Из бумаги вырезан треугольник ABC с длинами сторон $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, $CA = 4$ см. Его перегнули по прямой так, что вершина C оказалась в точке C_1 на стороне AB . Кроме того, в получившемся четырёхугольнике $AKMB$ оказались равными два угла, примыкающие к линии сгиба KM . Найдите AC_1 и C_1B .

Ответ: $\frac{10}{3}$ см и $\frac{8}{3}$.

Решение. Точки C и C_1 симметричны относительно линии сгиба. Поэтому $CC_1 \perp KM$. Из равенства углов AKM и KMB вытекает равенство и смежных им углов. Поэтому треугольник CKM равнобедренный. Его высота, лежащая на CC_1 , будет и биссектрисой.



Значит, CC_1 — биссектриса треугольника ACB . По теореме о биссектрисе,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB} = \frac{5}{4}.$$

Поэтому $AC_1 = \frac{5}{9}AB = \frac{10}{3}$ см, $C_1B = \frac{4}{9}AB = \frac{8}{3}$ см.

Оценивание. За верное решение 12 б.

4. Пусть a, b, c, d, e — положительные целые числа. Их сумма равна 2018. Пусть $M = \max(a + b, b + c, c + d, d + e)$. Найдите наименьшее возможное значение M .

Ответ: 673.

Решение. *Оценка.* Имеем неравенства

$$a + b \leq M; \quad b + c \leq M; \quad c + d \leq M; \quad d + e \leq M.$$

Первое и последнее неравенства умножим на 2 и сложим с двумя другими. Получим:

$$2(a+b+c+d+e)+b+d \leq 6M; \quad 6M \geq 4036+b+d \geq 4038; \quad M \geq 673.$$

Пример. Равенство $M = 673$ достигается при $a = c = e = 672$,
 $b = d = 1$.

Оценивание. За верное решение 14 б. Если есть только верный пример, 7 б.



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2017-2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс
Вариант 1

физика

5. Маленький шарик отпустили без начальной скорости с высоты $h=20$ м. Удар о горизонтальную поверхность Земли является абсолютно упругим. Определите, в какой момент времени после начала падения шарика его средняя путевая скорость будет равна его мгновенной скорости. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

(15 баллов)

Ответ: 2,83 с

Решение. Очевидно, что пока шарик летит вниз, мгновенная скорость будет больше средней путевой. Момент времени, когда шарик ударится о Землю:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2 \text{ с} \quad (2 \text{ балла}). \quad \text{Соответствующая скорость: } v_1 = gt_1 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ м/с}$$

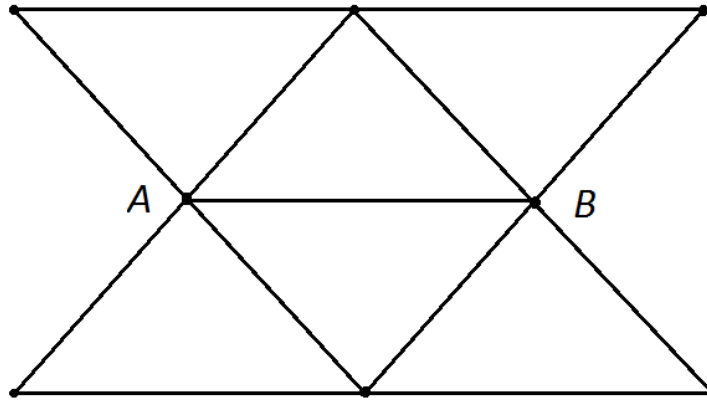
(2 балла). Уравнения движения после абсолютно упругого удара:

$$x = v_1(t-t_1) - \frac{g(t-t_1)^2}{2} \quad (2 \text{ балла}), \quad v = v_1 - g(t-t_1) \quad (2 \text{ балла}). \quad \text{По условию: } v_{cp} = v, \text{ то есть}$$

$$\frac{h+x}{t} = v \quad (2 \text{ балла}), \quad \frac{h+v_1(t-t_1) - \frac{g(t-t_1)^2}{2}}{t} = v_1 - g(t-t_1) \quad (2 \text{ балла}). \quad \text{Решая данное}$$

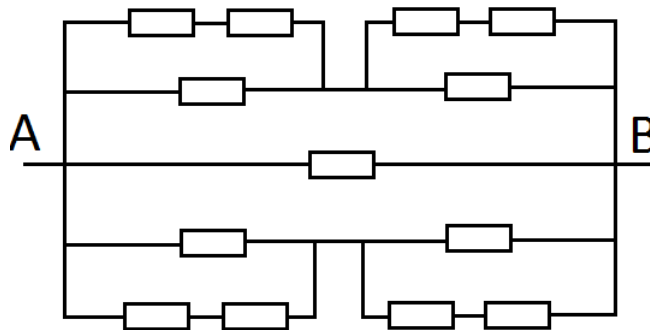
уравнение, получаем $t = \sqrt{8} \approx 2,83$ с (3 балла).

6. Тринадцать одинаковых металлических стержней соединены следующим образом (см. рис.). Известно, что сопротивление одного стержня $R_0 = 10$ Ом. Определите сопротивление всей конструкции, если она подключается к источнику тока точками А и В. (10 баллов)



Ответ: 4 Ом

Решение. Эквивалентная схема выглядит следующим образом (5 баллов),



где каждый из резисторов имеет сопротивление $R_0 = 10 \text{ Ом}$. В результате, общее сопротивление: $R = \frac{4}{10} R_0 = 4 \text{ Ом}$ (5 баллов).

7. Удельная теплоёмкость тела массой $m = 2 \text{ кг}$ зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 150 \text{ Дж/кг}\cdot^\circ\text{C}$ – удельная теплоёмкость при 0°C , $\alpha = 0,05 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от 20°C до 100°C . (10 баллов)

Ответ: 96 кДж

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение:

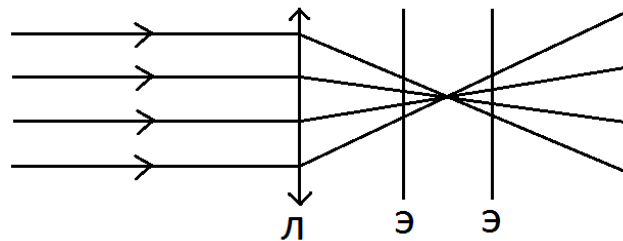
$$c_{\text{ср}} = \frac{c_0(1 + \alpha t_n) + c_0(1 + \alpha t_k)}{2} = 600 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}} \quad (5 \text{ баллов}). \quad \text{Искомое количество тепла:}$$

$$Q = c_{\text{ср}} m \Delta t = 600 \cdot 2 \cdot 80 = 96000 \text{ Дж} = 96 \text{ кДж} \quad (5 \text{ баллов}).$$

8. На тонкую линзу падает нормально параллельный пучок света. За линзой на расстоянии 80 см от неё располагается экран, на котором видно круглое пятно определенного диаметра. Если экран передвинуть на 40 см , то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите фокусное расстояние линзы. (15 баллов)

Ответ: 100 см или 60 см

Решение. Рисунок, объясняющий ситуацию, которая описывается в условии (5 баллов):



Отсюда видно, что возможны два варианта: экран могут отодвигать от линзы или подвигать к ней. В результате фокусное расстояние линзы $F_1 = 80 + 20 = 100\text{ см}$ (5 баллов). Или $F_2 = 80 - 20 = 60\text{ см}$ (5 баллов).