Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап
2017–2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

11 класс

Вариант I математика

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной на плоскости Oxy линиями $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$, $y = x^{1/\ln x}$.

Ответ: e.

Решение. Заметим, что $\ln\left(x^{1/\ln x}\right) = 1$. Значит, $x^{1/\ln x} = e$ при допустимых значениях переменной x. Таким образом, фигура представляет собой прямоугольник размером $1 \times e$.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. Площадь треугольника ABC равна 1. На лучах AB, BC, CA отложены соответственно точки B', C', A', при этом

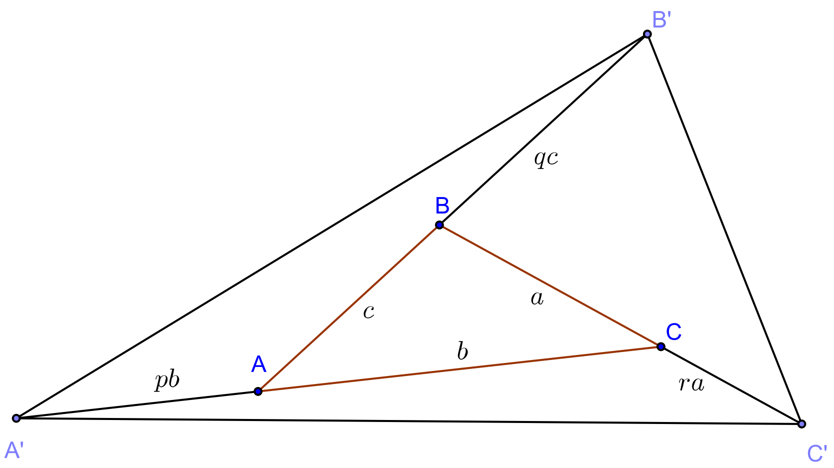
$$BB' = 2AB, \quad CC' = 3BC, \quad AA' = 4CA.$$

Вычислите площадь треугольника $A'B'C'$.

Ответ: 36.

Решение. Решим задачу в общем виде, считая, что

$$BB' = qAB, \quad CC' = rBC, \quad AA' = pCA.$$



Вычислим площадь треугольника $A'B'A$:

$$S_{A'B'A} = \frac{1}{2}A'A \cdot AB' \cdot \sin\angle A'AB' = \frac{1}{2}pb(c + qc)\sin\angle BAC =$$

$$= p(1+q)\cdot\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC = p(1+q)\cdot S_{ABC} = p(1+q).$$

(Мы воспользовались равенством синусов смежных углов). Аналогично находим, что $S_{B'BC'} = q(1+r)$, $S_{CC'A'} = r(1+p)$. Сложив площади указанных трёх треугольников и исходного треугольника ABC, найдём искомую площадь:

$$S_{A'B'C'} = 1 + p + q + r + pq + qr + rp.$$

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x-2}{11}} + \sqrt{\frac{x-3}{10}} + \sqrt{\frac{x-4}{9}} = \sqrt{\frac{x-11}{2}} + \sqrt{\frac{x-10}{3}} + \sqrt{\frac{x-9}{4}}.$$

Решение. Если выполнить замену переменной $x = t + 13$, то во всех подкоренных выражениях выделится 1:

$$\sqrt{\frac{t}{11}+1} + \sqrt{\frac{t}{10}+1} + \sqrt{\frac{t}{9}+1} = \sqrt{\frac{t}{2}+1} + \sqrt{\frac{t}{3}+1} + \sqrt{\frac{t}{4}+1}. \quad (*)$$

Теперь видно, что при $t > 0$ больше правая часть уравнения, при $-2 \leqslant t < 0$ больше левая часть, а при $t = 0$ выполняется равенство. Значит, $t = 0$ — единственный корень уравнения $(*)$, а исходное уравнение имеет единственный корень $x = 13$.

Замечание. Другое решение может быть основано на таком наблюдении:

$$(k > m > 0) \Rightarrow \left(\frac{x-k}{m} > \frac{x-m}{k} \iff x > k + m\right).$$

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответ угадан, но не доказана его единственность, 3 б.

4. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0; \\ x + ay + az - a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a = \pm 2$.

Решение. Выделим полный квадрат по y в первом уравнении:

$$x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 2^2.$$

Теперь видно, что оно задаёт сферу с центром в точке $(0; -2; 0)$ и и радиусом 2. Второе уравнение задаёт плоскость. Система уравнений имеет единственное решение, если плоскость касается сферы.

Так будет, если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы. Воспользовавшись известной формулой для расстояния от точки до плоскости, получим

$$\frac{|-2a-a|}{\sqrt{1+a^2+a^2}}=2.$$

Далее,

$$|3a|=2\sqrt{1+2a^2};\quad 9a^2=4(1+2a^2);\quad a^2=4.$$

Значит, $a=\pm 2$.

Оценивание. За верное решение 13 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2017-2018 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

11 класс
Вариант 1

физика

5. Двигатель автомобиля, который едет со скоростью $v_0 = 72\ км/ч$, работает с мощностью $P = 50\ кВт$. Определите, на каком расстоянии от точки выключения двигателя остановится автомобиль, если сила сопротивления движению автомобиля пропорциональна его скорости. Масса автомобиля $m = 1500\ кг$. **(*15 баллов*)**

Ответ: 240 *м*

Решение. Мощность двигателя: $P = Fv = F_{сопр}v_0 = \alpha v_0^2$, то есть коэффициент сопротивления движению автомобиля: $\alpha = \frac{P}{v_0^2}$ (3 балла). Проекция второго закона Ньютона, для малого промежутка времени, при движении с выключенным двигателем: $m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_{сопр} = -\alpha v$ (3 балла). С учётом того, что: $v\Delta t = \Delta s$, получаем $m\Delta v = -\alpha \Delta s$ (3 балла). Переходя к конечным приращениям, получаем: $m(0 - v_0) = -\alpha s = -\frac{P}{v_0}s$ (3 балла).

Окончательный ответ: $s = \frac{mv_0^3}{P} = \frac{1500 \cdot 20^3}{50000} = 240\ метров$ (3 балла).

6. Один моль идеального газа расширили так, что в ходе процесса, давление газа оказалось прямо пропорционально его объёму. При этом газ нагрелся на $\Delta T = 100\ ^\circ C$. Определите работу, совершённую газом в этом процессе. Газовая постоянная $R = 8{,}31\ Дж/моль \cdot K$. **(*15 баллов*)**

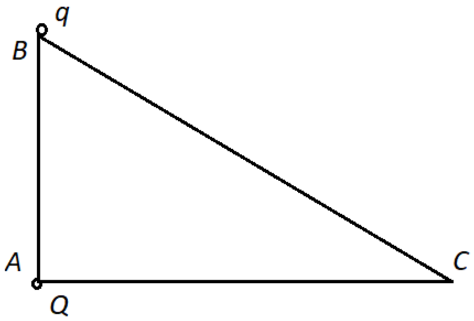
Ответ: 415,5 *Дж*

Решение. Из условия: $p = \alpha V$ (3 балла). Работа газа равна площади под графиком данного процесса, построенного в координатах $p - V$:

$A=\frac{p_1+p_2}{2}\cdot(V_2-V_1)=\frac{\alpha V_1+\alpha V_2}{2}\cdot(V_2-V_1)=\frac{\alpha}{2}\cdot\left(V_2^2-V_1^2\right)$ (4 балла). Из уравнения состояния идеального газа: $pV=\alpha VV=\alpha V^2=\nu RT$ (4 балла). В результате, получаем окончательный ответ:

$A=\frac{\alpha}{2}\cdot\left(V_2^2-V_1^2\right)=\frac{1}{2}\nu R\Delta T=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 8{,}31\cdot 100=415{,}5\ Дж$ (4 балла).

7. Два маленьких шарика с зарядами $Q=-40\cdot 10^{-6}\ Кл$ и $q=50\cdot 10^{-6}\ Кл$ расположены в вершинах A и B склона горы (см. рис.). Известно, что $AB=4\ м$, $AC=5\ м$. Массы шариков одинаковые и равны по $m=100\ г$ каждый. В начальный момент времени шарик с зарядом q отпускают с нулевой начальной скоростью. Определите его скорость в момент времени, когда он окажется в точке C. Поверхность склона горы считать гладкой. Ускорение свободного падения $g=10\ м/с^2$, коэффициент пропорциональности в законе Кулона $k=9\cdot 10^9\ Н\cdot м^2/Кл^2$. (***10 баллов***)



Ответ: **7**,8 *м/с*

Решение. Закон сохранения энергии для данной ситуации:

$k\frac{Qq}{AB}+mg\cdot AB=\frac{mv^2}{2}+k\frac{Qq}{BC}$ (5 баллов).

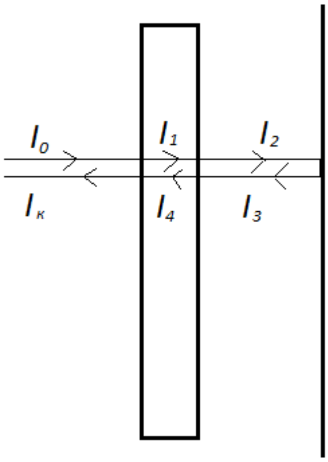
В результате, получаем:

$v=\sqrt{\frac{2kQq}{m\cdot AB}+2\cdot g\cdot AB-\frac{2kQq}{m\cdot BC}}=\sqrt{\frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\left(-40\cdot 10^{-6}\right)\cdot 50\cdot 10^{-6}}{0{,}1\cdot 4}+2\cdot 10\cdot 4-\frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot\left(-40\cdot 10^{-6}\right)\cdot 50\cdot 10^{-6}}{0{,}1\cdot 5}}\approx 7{,}8\ м/с$
(5 баллов).

8. На плоскопараллельную стеклянную пластинку нормально падает тонкий луч света. За пластинкой на некотором расстоянии от неё стоит идеальное зеркало (для него коэффициент отражения равен единице). Плоскость зеркала параллельна пластинке. Известно, что интенсивность луча, прошедшего через данную систему в 256 раз меньше интенсивности падающего луча. Коэффициент отражения на границе стекло–воздух считать постоянным независимо от направления хода луча. Поглощением и рассеянием света в воздухе и стекле пренебречь. Найдите коэффициент отражения на границе стекло-воздух в данных условиях. (***10 баллов***)

Ответ: 0,75

Решение.



Пусть k – коэффициент отражения, тогда получаем, что $I_1 = I_0(1-k)$ (2 балла).

Аналогично, $I_3 = I_2 = I_1(1-k) = I_0(1-k)^2$ (2 балла). В результате: $I_к = I_0(1-k)^4$ (2 балла).

По условию $I_0 = 256 \cdot I_к = 256 \cdot I_0(1-k)^4$ (2 балла). В итоге получаем $k = 0,75$ (2 балла).