Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

6 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя и Вася соревновались в беге на 100 м. Когда Петя финишировал, Вася отставал от него на 10 м. Во время второго забега Петя встал ровно в 10 м позади Васи. Кто финишировал первым во втором забеге и на сколько метров он опередил соперника? (Считаем, что каждый из мальчиков оба раза бежал с одной и той же своей постоянной скоростью).

Ответ: Петя опередил Васю на 1 м.

Решение. Во втором забеге Петя ликвидирует отставание от Васи, пробежав 100 м (Вася за это время пробежит 90 м). До финиша остаётся 10 м — в 10 раз меньше, чем на старте 1-го забега. Значит, и опережение составит в 10 раз меньше, т. е. 1 м.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. Диван стоил 62 500 руб. Раз в месяц его цена изменялась на 20% в сторону увеличения или уменьшения. Известно, что за полгода трижды цена повышалась и трижды понижалась (в каком порядке это происходило, неизвестно). Можно ли однозначно определить, сколько стоил диван через полгода? Если да, то сколько он стал стоить?

Ответ: да; диван будет стоить 55 296 руб.

Решение. Удорожание на 20% означает, что текущая цена умножается на 6/5, а удешевление на 20% означает, что текущая цена умножается на 4/5. Поэтому независимо от того, в каком порядке цена повышалась или понижалась, цена дивана через полгода составит $62\,500 \cdot (6/5)^3 \cdot (4/5)^3 = 55\,296$ руб.

Оценивание. Если рассмотрены только некоторые частные случаи и получен правильный числовой ответ, 4 балла. За полное решение 12 баллов.

3. Сколько существует пятизначных чисел, у которых сумма первых двух цифр вдвое меньше суммы двух последних цифр?

Ответ: 2250.

Решение. Пусть первые две цифры числа a и b, а две последние c и d. Найдём, сколько есть комбинаций этих цифр, для которых $2(a+b) = c+d$. Поскольку $c + d \leqslant 18$, то $a + b \leqslant 9$.

Обозначим через x_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ количество пар первых двух цифр, сумма которых равна i. Первая цифра принимает значения от 1 до i, после чего вторая цифра определяется однозначно. Значит, $x_i = i$.

Обозначим через y_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$) количество пар последних двух цифр, сумма которых равна $2i$. Всякий раз по цифре c цифра d определяется однозначно: $d = 2i - c$. Поэтому нужно подсчитать количество возможных значений цифры c. Если $i \leqslant 4$, т. е. $2i \leqslant 8$, то цифра c принимает значения от 0 до $2i$ — всего $2i + 1$ значений. Другими словами, в этом случае $y_i = 2i + 1$. Если же $5 \leqslant i \leqslant 9$, т. е. $10 \leqslant 2i \leqslant 18$, то цифра c принимает значения от $2i - 9$ до 9 — всего $19 - 2i$ значений и $y_i = 19 - 2i$.

Соберём найденные значения x_i и y_i в одну таблицу.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	3	5	7	9	9	7	5	3	1

Количество пятизначных чисел, в которых $a + b = i$, а $c + d = 2i$, равно $10x_iy_i$ (средняя цифра выбирается 10 способами). Поэтому общее количество искомых чисел равно $10(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_9y_9)$. Подстановка найденных значений даёт ответ 2250.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если верно найдены все x_i и y_i, но арифметическая ошибка в окончательном подсчёте, 11 баллов. Если ход решения верный, но неверно определены некоторые x_i или y_i, 4-5 баллов.

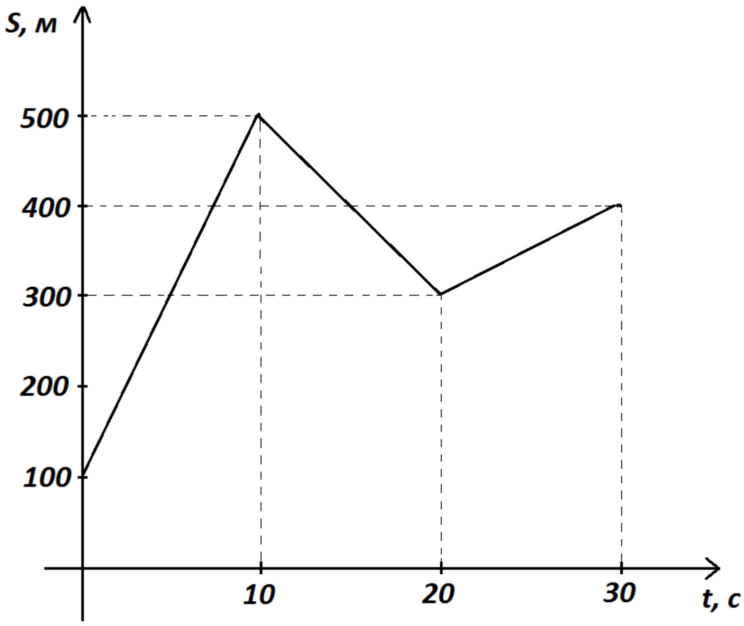
4. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 123 точки. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре, если Аня ходит первой?

Ответ: Боря.

Решение. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны. Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, одну из них можно закрасить. Значит, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются. Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное. Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать заведомо проигрышных ходов.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*15 баллов*) Два автомобиля едут по дороге в одном направлении. Средняя скорость одного из них за время $t = 30\,c$ равна $v_1 = 25\,м/с$. На графике представлена зависимость расстояния S между автомобилями от времени t. Определите среднюю скорость v_2 другого автомобиля за $t = 30\,c$ движения.



Ответ: $15\,\frac{м}{с}$ или $35\,\frac{м}{с}$

Решение. Из графика видно, что скорость одного автомобиля относительно другого $v_{отн} = \frac{400-100}{30} = 10\,\frac{м}{с}$. **(5 баллов)**

Возможны два варианта, в зависимости от того, какой автомобиль едет первым: $v_2 = v_1 + v_{отн} = 25 + 10 = 35\,\frac{м}{с}$ **(5 баллов)**

или $v_2 = v_1 - v_{отн} = 25 - 10 = 15\,\frac{м}{с}$. **(5 баллов)**

6. (*10 баллов*) Англичанин являлся владельцем участка земли в России. Он знает, что, в привычных ему единицах, размер его участка составляет два акра. Стоимость земли $500000\,руб$ за один гектар. Известно, что $1\,акр = 4840\,квадратных\,ярдов$, $1\,ярд = 0{,}9144\,метра$, $1\,гектар = 10000\,м^2$. Посчитайте, сколько выручит англичанин в результате продажи.

Ответ: *примерно* $405000\,руб$

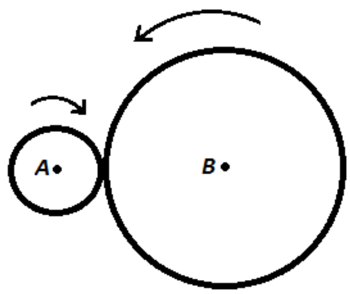
Решение. $1\,квадратный\ ярд = 0{,}9144 \cdot 0{,}9144 = 0{,}83612736\ м^2$, **(2 балла)**

$2\ акра = 2 \cdot 4840 = 9680\ квадратных\ ярда = 9680 \cdot 0{,}83612739 = 8093{,}7128448\ м^2$

(2 балла), $8093{,}7128448\ м^2 = \dfrac{8093{,}7128448\ м^2}{10000} \approx 0{,}8094\ га$, **(3 балла)**

$0{,}8094 \cdot 500000 = 404685{,}6\ руб$. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Два колеса вращаются зацепившись друг за друга вокруг неподвижных осей, проходящих через центры колес A и B. Радиусы колес отличаются в три раза. Малое колесо делает 30 оборотов в минуту. Определите, сколько секунд тратит на один оборот большое колесо?



Ответ: $6\ с$

Решение. Скорости точек, лежащих на краю колес одинаковы. **(2 балла)**

Расстояния, проходимые этими точками отличаются в три раза. **(2 балла)**

Малое колесо тратит на один оборот: $t_{мал} = \dfrac{1\ мин}{30\ оборотов} = \dfrac{60\ с}{30\ оборотов} = 2\ с$.

(3 балла)

Следовательно, большое колесо тратит на один оборот:

$t_{бол} = 3t_{мал} = 3 \cdot 2 = 6\ с$. **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) Плотностью называют отношение массы тела к его объёму. Имеется два кубика. Второй кубик сделан из материала с вдвое большей плотностью по сравнению с первым, а длина стороны второго кубика на 100% больше длины стороны первого. На сколько процентов масса второго кубика больше массы первого?

Ответ: на $1500\ \%$

Решение. Из условия получаем $\rho_2 = 2\rho_1$, т.е: $\dfrac{m_2}{V_2} = 2 \cdot \dfrac{m_1}{V_1}$. **(3 балла)**

Также из условия следует, что длина стороны второго кубика $a_2 = 2a_1$.
(2 балла)

Следовательно, их объёмы связаны соотношением $V_2 = a_2^3 = \left(2a_1\right)^3 = 8V_1$.
(3 балла)

Получаем $\dfrac{m_2}{8V_1} = 2 \cdot \dfrac{m_1}{V_1}$. **(2 балла)** Откуда следует, что $m_2 = 16m_1$. **(2 балла)**

То есть масса второго кубика больше на $1500\,\%$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

6 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя и Вася соревновались в беге на 60 м. Когда Петя финишировал, Вася отставал от него на 9 м. Во время второго забега Петя встал ровно в 9 м позади Васи. Кто финишировал первым во втором забеге и на сколько метров он опередил соперника? (Считаем, что каждый из мальчиков оба раза бежал с одной и той же своей постоянной скоростью).

Ответ: Петя опередил Васю на 1,35 м.

Решение. Во втором забеге Петя ликвидирует отставание от Васи, пробежав 60 м (Вася за это время пробежит 51 м). До финиша остаётся 9 м — в 20/3 раз меньше, чем на старте 1-го забега. Значит, и опережение составит в 20/3 раз меньше, т. е. $9 \cdot \frac{3}{20} = 1{,}35$ м.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. Товар стоил 64 руб. Раз в месяц его цена изменялась на 50% в сторону увеличения или уменьшения. Известно, что за полгода трижды цена повышалась и трижды понижалась (в каком порядке это происходило, неизвестно). Можно ли однозначно определить, сколько стоил товар через полгода? Если да, то сколько он стал стоить?

Ответ: да; товар будет стоить 27 руб.

Решение. Удорожание на 50% означает, что текущая цена умножается на 3/2, а удешевление на 50% означает, что текущая цена умножается на 1/2. Поэтому независимо от того, в каком порядке цена повышалась или понижалась, цена дивана через полгода составит $64 \cdot (3/2)^3 \cdot (1/2)^3 = 27$ руб.

Оценивание. Если рассмотрены только некоторые частные случаи и получен правильный числовой ответ, 4 балла. За полное решение 12 баллов.

3. Сколько существует пятизначных чисел, у которых сумма первых двух цифр вдвое больше суммы двух последних цифр?

Ответ: 2600.

Решение. Пусть первые две цифры числа a и b, а две последние c и d. Найдём, сколько есть комбинаций этих цифр, для которых $a+b = 2(c+d)$. Поскольку $a + b \leqslant 18$, то $c + d \leqslant 9$.

Обозначим через x_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ количество пар последних двух цифр, сумма которых равна i. Первая цифра принимает значения от 0 до i, после чего вторая цифра определяется однозначно. Значит, $x_i = i + 1$.

Обозначим через y_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ количество пар первых двух цифр, сумма которых равна $2i$. Всякий раз по цифре a цифра b определяется однозначно: $b = 2i - a$. Поэтому нужно подсчитать количество возможных значений цифры a. Если $i \leqslant 4$, т. е. $2i \leqslant 8$, то цифра a принимает значения от 1 до $2i$ — всего $2i$ значений. Другими словами, в этом случае $y_i = 2i$. Если же $5 \leqslant i \leqslant 9$, т. е. $10 \leqslant 2i \leqslant 18$, то цифра a принимает значения от $2i - 9$ до 9 — всего $19 - 2i$ значений и $y_i = 19 - 2i$.

Соберём найденные значения x_i и y_i в одну таблицу.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	4	6	8	9	7	5	3	1

Количество пятизначных чисел, в которых $c + d = i$, а $a + b = 2i$, равно $10x_iy_i$ (средняя цифра выбирается 10 способами). Поэтому общее количество искомых чисел равно $10(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_9y_9)$. Подстановка найденных значений даёт ответ 2600.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если верно найдены все x_i и y_i, но арифметическая ошибка в окончательном подсчёте, 11 баллов. Если ход решения верный, но неверно определены некоторые x_i или y_i, 4-5 баллов.

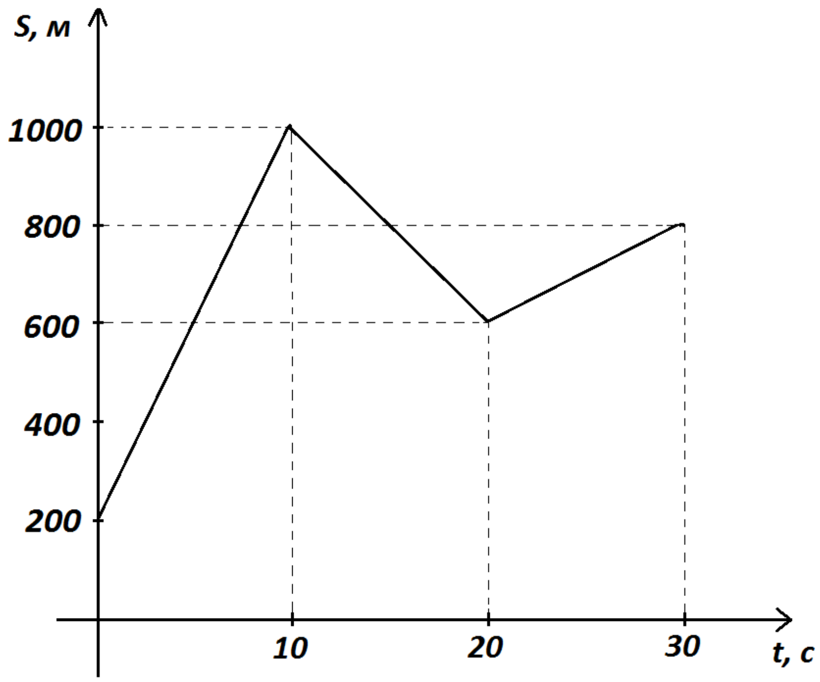
4. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 33 точки. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре, если Аня ходит первой?

Ответ: Боря.

Решение. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны. Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, одну из них можно закрасить. Значит, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются. Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное. Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать заведомо проигрышных ходов.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*15 баллов*) Два автомобиля едут по дороге в одном направлении. Средняя скорость одного из них за время $t = 30\,с$ равна $v_1 = 30\,м/с$. На графике представлена зависимость расстояния S между автомобилями от времени t. Определите среднюю скорость v_2 другого автомобиля за $t = 30\,с$ движения.



Ответ: $10\,\frac{м}{с}$ или $50\,\frac{м}{с}$

Решение. Из графика видно, что скорость одного автомобиля относительно другого $v_{отн} = \frac{800-200}{30} = 20\,\frac{м}{с}$. **(5 баллов)**

Возможны два варианта, в зависимости от того, какой автомобиль едет первым. $v_2 = v_1 + v_{отн} = 30 + 20 = 50\,\frac{м}{с}$ **(5 баллов)**

Или $v_2 = v_1 - v_{отн} = 30 - 20 = 10\,\frac{м}{с}$. **(5 баллов)**

6. (*10 баллов*) Англичанин являлся владельцем участка земли в России. Он знает, что, в привычных ему единицах, размер его участка составляет три акра. Стоимость земли $250000\,руб$ за один гектар. Известно, что $1\,акр = 4840\,квадратных\,ярдов$, $1\,ярд = 0{,}9144\,метра$, $1\,гектар = 10000\,м^2$. Посчитайте, сколько выручит англичанин в результате продажи.

Ответ: *примерно* $303514\,руб$

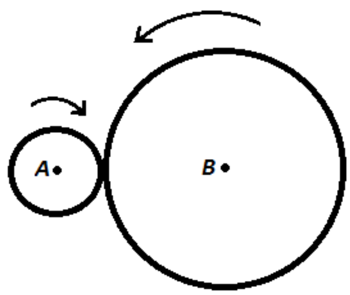
Решение. $1\,квадратный\ ярд = 0{,}9144 \cdot 0{,}9144 = 0{,}83612736\ м^2$, **(2 балла)**

$3\ акра = 3 \cdot 4840 = 14520\ квадратных\ ярда = 14520 \cdot 0{,}83612739 = 12140{,}57\ м^2$

(2 балла), $12140{,}57\ м^2 = \dfrac{12140{,}57\ м^2}{10000} \approx 1{,}214057\ га$, **(3 балла)**

$1{,}214057 \cdot 250000 = 303514{,}25\ руб.$ **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Два колеса вращаются зацепившись друг за друга вокруг неподвижных осей, проходящих через центры колес A и B. Радиусы колес отличаются в три раза. Большое колесо делает 10 оборотов в минуту. Определите, сколько секунд тратит на один оборот малое колесо?



Ответ: $2\,с$

Решение. Скорости точек, лежащих на краю колес одинаковы. **(2 балла)**

Расстояния, проходимые этими точками отличаются в три раза. **(2 балла)**

Большое колесо тратит на один оборот

$$t_{бол} = \frac{1\,мин}{10\ оборотов} = \frac{60\,с}{10\ оборотов} = 6\,с.$$ **(3 балла)**

Следовательно, малое колесо тратит на один оборот $t_{мал} = \dfrac{1}{3} t_{бол} = \dfrac{6}{3} = 2\,с$.

(3 балла)

8. (*15 баллов*) Плотностью называют отношение массы тела к его объёму. Имеется два кубика. Второй кубик сделан из материала с вдвое меньшей плотностью по сравнению с первым, а длина стороны второго кубика на 100% больше длины стороны первого. На сколько процентов масса второго кубика больше массы первого?

Ответ: на $300\,\%$

Решение. Из условия следует, что $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1$, т.е: $\frac{m_2}{V_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{V_1}$. **(3 балла)**

Также из условия следует, что длина стороны второго кубика $a_2 = 2a_1$.
(2 балла)

Следовательно, их объёмы связаны соотношением $V_2 = a_2^3 = \left(2a_1\right)^3 = 8V_1$.
(3 балла)

Получаем $\frac{m_2}{8V_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{V_1}$. **(2 балла)** Откуда следует, что $m_2 = 4m_1$. **(2 балла)**

То есть масса второго кубика больше на $300\,\%$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

7 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя и Вася соревновались в беге на 100 м. Когда Петя финишировал, Вася отставал от него на 10 м. Во время второго забега Петя встал ровно в 10 м позади Васи. Кто финишировал первым во втором забеге и на сколько метров он опередил соперника? (Считаем, что каждый из мальчиков оба раза бежал с одной и той же своей постоянной скоростью).

Ответ: Петя опередил Васю на 1 м.

Решение. Во втором забеге Петя ликвидирует отставание от Васи, пробежав 100 м (Вася за это время пробежит 90 м). До финиша остаётся 10 м — в 10 раз меньше, чем на старте 1-го забега. Значит, и опережение составит в 10 раз меньше, т. е. 1 м.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. По кругу стоят 15 чисел. Сумма любых шести последовательных чисел равна 50. Петя закрыл карточкой одно из чисел. Два соседних с карточкой числа 7 и 10. Какое число под карточкой?

Ответ: 8.

Решение. Пусть на i-м месте стоит число a_i ($i = 1, \ldots, 15$.) Зафиксируем 5 подряд идущих чисел. Числа слева и справа от этой пятёрки должны совпасть. Поэтому $a_i = a_{i+6}$. Пойдём по кругу, отмечая одинаковые числа:

$$a_1 = a_7 = a_{13} = a_4 = a_{10} = a_1.$$

Теперь видно, что для любого i верно, что $a_i = a_{i+3}$, т. е. числа идут в таком порядке:

$$a, b, c, a, b, c, \ldots, a, b, c.$$

Из условия следует, что

$$2(a + b + c) = 50.$$

Значит, сумма любых трёх соседних чисел равна 25. Отсюда ответ.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

3. Пусть d — наибольший общий делитель восьми натуральных чисел, сумма которых равна 595. Какое наибольшее значение может принимать d?

Ответ: 35.

Решение. Если каждое из чисел делится на d, то и их сумма кратна d. Значит, d — делитель числа 595. Разложим последнее на простые множители: $595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$ и выпишем все его делители:

$$1, 5, 7, 17, 35, 85, 119, 595. \qquad (*)$$

Каждое из восьми чисел (из условия задачи) не меньше d. Поэтому их сумма, равная 595, не меньше $8d$. Из неравенства $595 \geqslant 8d$ получаем $d \leqslant 74$. Из списка $(*)$ наибольшее возможное значение 35.

Несложно придумать и соответствующий пример (он далеко не единственный): пусть семь чисел равны 70, а ещё одно 105.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. За оценку без примера 7 б. За пример без оценки 6 б.

4. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 123 точки. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре, если Аня ходит первой?

Ответ: Боря.

Решение. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны. Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, одну из них можно закрасить. Значит, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются. Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное. Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать заведомо проигрышных ходов.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*10 баллов*) Расстояние от дома до работы $s = 3\,км$. В тот момент времени, когда Иван вышел с работы, из дома выскочил его любимый пёс и побежал навстречу хозяину. На расстоянии четверти всего пути от работы они встретились. Пес мгновенно развернулся обратно и побежал домой. Добежав до дома, он опять мгновенно развернулся и побежал к хозяину и т.д. Считая, что Иван и его пес двигаются с постоянными скоростями, определите расстояние, которое пробежит пес к моменту времени, когда Иван придет домой.

Ответ: $9\,км$

Решение. К моменту первой встречи Иван прошёл одну четвертую всего пути. Следовательно, пёс пробежал три четвертых от всего расстояния. Т.е. скорость пса в три раза больше скорости Ивана: $v_п = 3v_и$. **(4 балла)**

По пути с работы домой Иван прошел $3\,км$. **(3 балла)**

Следовательно, пёс пробежал $l = 3 \cdot 3\,км = 9\,км$. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Жёсткая доска массой m и длиной $l = 20\,м$ частично лежит на краю горизонтальной поверхности, свисая с неё на три четверти своей длины. Чтобы доска не упала, на самом её краю положили камень массой $2m$. Насколько далеко от камня сможет по доске пройти человек массой $m/2$. Размерами камня и человека по сравнению с размерами доски пренебречь.

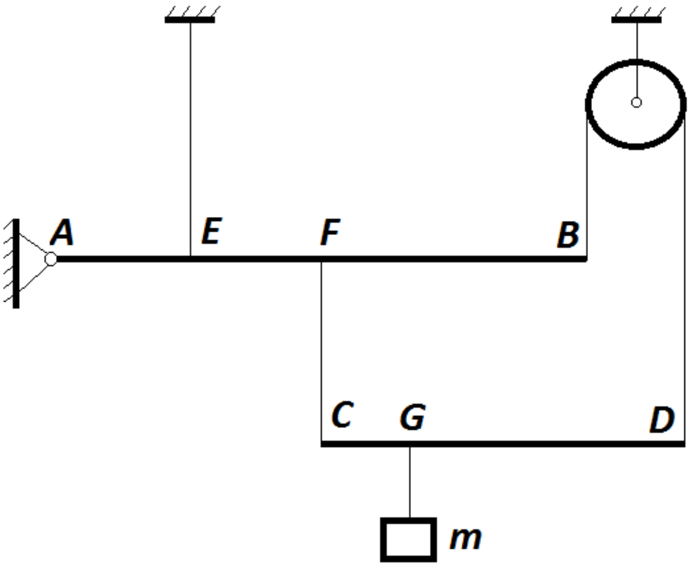
Ответ: $15\,м$

Решение. Правило моментов: $2mg \cdot \frac{l}{4} = mg \cdot \frac{l}{4} + \frac{m}{2} g \cdot \left(x - \frac{l}{4} \right)$. **(5 баллов)**

В результате, получаем $x = \frac{3}{4} l = 15\,м$. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Конструкция состоит из двух невесомых стержней AB и CD, невесомого блока и груза массой $m = 2\,кг$, который подвешен в точке G. Все нити невесомые и нерастяжимые. В точке A стержень присоединен к шарниру, который позволяет стержню поворачиваться в плоскости рисунка. При этом $CG = \frac{1}{4} CD$, $AE = \frac{1}{4} AB$, а точка F является серединой стержня AB.

Ускорение свободного падения $g=10\ м/с^2$. Определите силу натяжения T_0 нити, прикрепленной к стержню AB в точке E.



Ответ: $T_0=10\ H$

Решение. Правило моментов для стержня CD относительно точки C:

$$mg\cdot\frac{1}{4}CD=T_2\cdot CD.$$ **(4 балла)**

Сила натяжения нити BD: $T_2=\frac{1}{4}mg=5\ H$. **(3 балла)**

Следовательно, сила натяжения нити CF: $T_1=\frac{3}{4}mg=15\ H$. **(3 балла)**

Правило моментов для стержня AB относительно точки A:

$$T_0\cdot\frac{1}{4}AB+T_2\cdot AB=T_1\cdot\frac{1}{2}AB.$$ **(3 балла)**

В результате получаем, $T_0=10\ H$. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Масса сосуда, который полностью заполнили керосином, $31\ кг$. Если этот сосуд полностью заполнить водой, то его масса окажется равной $33\ кг$. Определите массу пустого сосуда. Плотность воды $\rho_В=1000\ кг/м^3$, плотность керосина $\rho_К=800\ кг/м^3$.

Ответ: $23\,кг$

Решение. Масса сосуда заполненного керосином $m_1 = m_c + \rho_K V$, **(4 балла)**

где m_c – масса пустого сосуда, V – объём занятый керосином. Масса сосуда заполненного водой: $m_2 = m_c + \rho_B V$. **(4 балла)**

Получаем, что $V = \dfrac{m_2 - m_1}{\rho_B - \rho_K} = \dfrac{33-31}{1000-800} = 0{,}01\,м^3$. **(4 балла)**

Масса пустого сосуда: $m_c = m_1 - \rho_K V = 31 - 800 \cdot 0{,}01 = 23\,кг$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

7 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя и Вася соревновались в беге на 60 м. Когда Петя финишировал, Вася отставал от него на 9 м. Во время второго забега Петя встал ровно в 9 м позади Васи. Кто финишировал первым во втором забеге и на сколько метров он опередил соперника? (Считаем, что каждый из мальчиков оба раза бежал с одной и той же своей постоянной скоростью).

Ответ: Петя опередил Васю на 1,35 м.

Решение. Во втором забеге Петя ликвидирует отставание от Васи, пробежав 60 м (Вася за это время пробежит 51 м). До финиша остаётся 9 м — в 20/3 раз меньше, чем на старте 1-го забега. Значит, и опережение составит в 20/3 раз меньше, т. е. $9 \cdot \frac{3}{20} = 1{,}35$ м.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. По кругу стоят 20 чисел. Известно, что сумма любых шести соседних чисел равна 24. Какое число на 12-м месте, если на 1-м месте стоит число 1?

Ответ: 7.

Решение. Пусть на i-м месте стоит число a_i ($i = 1, \ldots, 20$.) Зафиксируем 5 подряд идущих чисел. Числа слева и справа от этой пятёрки должны совпасть. Поэтому $a_i = a_{i+6}$. Пойдём по кругу, отмечая одинаковые числа:

$$a_1 = a_7 = a_{13} = a_{19} = a_5 = a_{11} = a_{17} = a_3 = a_9 = a_{15} = a_1.$$

Теперь видно, что все числа на нечётных местах равны друг другу. То же верно для чисел на чётных местах. Значит, числа идут так:

$$x, y, x, y, \ldots, x, y.$$

Из условия следует, что

$$3(x + y) = 24, \quad x = 1.$$

Отсюда $y = 7$. Значит, на нечётных местах единицы, а на чётных семёрки.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

3. Пусть d — наибольший общий делитель десяти натуральных чисел, сумма которых равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать d?

Ответ: 91.

Решение. Если каждое из чисел делится на d, то и их сумма кратна d. Значит, d — делитель числа 1001. Разложим последнее на простые множители: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и выпишем все его делители:

$$1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001. \qquad (*)$$

Каждое из десяти чисел (из условия задачи) не меньше d. Поэтому их сумма, равная 1001, не меньше $10d$. Из неравенства $1001 \geqslant 10d$ получаем $d \leqslant 101$. Из списка $(*)$ наибольшее возможное значение 91.

Несложно придумать и соответствующий пример (он единственный): девять чисел равны 91, а ещё одно 182.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. За оценку без примера 7 б. За пример без оценки 6 б.

4. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 33 точки. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре, если Аня ходит первой??

Ответ: Боря.

Решение. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны. Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, одну из них можно закрасить. Значит, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются. Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное. Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать заведомо проигрышных ходов.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*10 баллов*) Расстояние от дома до работы $s=6 км$. В тот момент времени, когда Иван вышел с работы, из дома выскочил его любимый пёс и побежал навстречу хозяину. На расстоянии одной трети всего пути от работы они встретились. Пёс мгновенно развернулся обратно и побежал домой. Добежав до дома, он опять мгновенно развернулся и побежал к хозяину и т.д. Считая, что Иван и его пёс двигаются с постоянными скоростями, определите расстояние, которое пробежит пёс к моменту времени, когда Иван придет домой.

Ответ: $12\,км$

Решение. К моменту первой встречи Иван прошел одну треть всего пути. Следовательно, пёс пробежал две трети от всего расстояния. То есть скорость пса в два раза больше скорости Ивана $v_п = 2v_и$. **(4 балла)**

По пути с работы домой Иван прошёл $6\,км$. **(3 балла)**

Следовательно, пёс пробежал $l = 2\cdot 6\,км = 12\,км$. **(3 балла)**

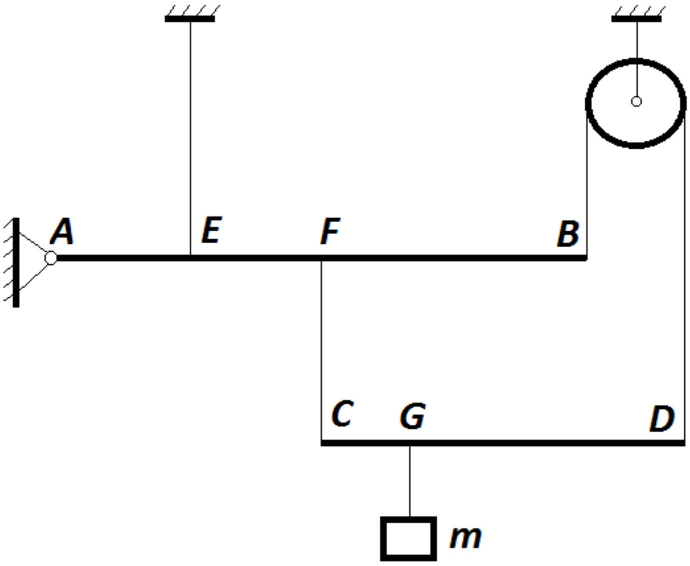
6. (*10 баллов*) Жёсткая доска массой m и длиной $l = 24\,м$ частично лежит на краю горизонтальной поверхности, свисая с неё на две трети своей длины. Чтобы доска не упала, на самом её краю положили камень массой $2m$. Насколько далеко от камня сможет по доске пройти человек массой m. Размерами камня и человека по сравнению с размерами доски пренебречь.

Ответ: $20\,м$

Решение. Правило моментов: $2mg\cdot\frac{l}{3} = mg\cdot\frac{l}{6} + mg\cdot\left(x - \frac{l}{3}\right)$. **(5 баллов)**

В результате, получаем $x = \frac{5}{6}l = 20\,м$. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Конструкция состоит из двух невесомых стержней AB и CD, невесомого блока и груза массой $m = 3\,кг$, который подвешен в точке G. Все нити невесомые и нерастяжимые. В точке A стержень присоединен к шарниру, который позволяет стержню поворачиваться в плоскости рисунка. При этом $CG = \frac{1}{4}CD$, $AE = \frac{1}{4}AB$, а точка F является серединой стержня AB. Ускорение свободного падения $g = 10\,м/с^2$. Определите силу натяжения T_0 нити, прикрепленной к стержню AB в точке E.



Ответ: $T_0 = 15\ H$

Решение. Правило моментов для стержня CD относительно точки C:

$$mg \cdot \frac{1}{4} CD = T_2 \cdot CD.$$ **(4 балла)**

Сила натяжения нити BD: $T_2 = \frac{1}{4} mg = 7{,}5\ H$. **(3 балла)**

Следовательно, сила натяжения нити CF: $T_1 = \frac{3}{4} mg = 22{,}5\ H$. **(3 балла)**

Правило моментов для стержня AB относительно точки A:

$$T_0 \cdot \frac{1}{4} AB + T_2 \cdot AB = T_1 \cdot \frac{1}{2} AB.$$ **(3 балла)**

В результате получим $T_0 = 15\ H$. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Масса сосуда, который полностью заполнили керосином, $20\ кг$. Если этот сосуд полностью заполнить водой, то его масса окажется равной $24\ кг$. Определите массу пустого сосуда. Плотность воды $\rho_B = 1000\ кг/м^3$, плотность керосина $\rho_K = 800\ кг/м^3$.

Ответ: $4\ кг$

Решение. Масса сосуда заполненного керосином: $m_1 = m_c + \rho_K V$, **(4 балла)**

где m_c – масса пустого сосуда, V – объём занятый керосином.

Масса сосуда заполненного водой $m_2 = m_c + \rho_B V$. **(4 балла)**

Получаем, что $V = \dfrac{m_2 - m_1}{\rho_B - \rho_K} = \dfrac{24-20}{1000-800} = 0,02\ м^3$. **(4 балла)**

Масса пустого сосуда: $m_c = m_1 - \rho_K V = 20 - 800 \cdot 0,02 = 4\ кг$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

8 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Андрей ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через час езды со скоростью 60 км/ч он понял, что если не изменит скорости, то опоздает на 20 мин. Тогда он резко увеличил скорость, в результате чего оставшуюся часть пути преодолел со средней скоростью 90 км/ч и приехал в аэропорт на 20 мин раньше, чем планировал первоначально. Каково расстояние от дома Андрея до аэропорта?

Ответ: 180 км.

Решение. Пусть расстояние от дома Андрея до аэропорта равно s км, а время, которое он хотел потратить на дорогу, $1+t$ часов. Тогда

$$s = 60 + 60(t + \frac{1}{3}) = 60 + 90(t - \frac{1}{3}).$$

Отсюда

$$60t + 20 = 90t - 30, \quad t = \frac{5}{3}, \quad s = 180.$$

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. На доске написано 2019 чисел. Одно из них встречается чаще других — 10 раз. Какое наименьшее количество различных чисел может быть записано на доске?

Ответ: 225.

Решение. Пусть на доске записано k различных чисел. Одно из них встречается 10 раз, а остальные не более 9 раз. Отсюда

$$10 + 9(k-1) \geqslant 2019, \quad 9k \geqslant 2018, \quad k \geqslant 225.$$

Пример: одно число записано 10 раз, 223 числа по 9 раз и ещё одно два раза.

Оценивание. За полное решение 12 баллов. За оценку без примера 6 б. За пример без оценки 5 б.

3. Можно ли отпилить от кубика с ребром в 15 см уголок так, чтобы срез имел форму треугольника со сторонами 5, 6 и 8 см?

Ответ: нет.

Решение. Задача сводится к следующей. Существует ли треугольная пирамида с прямыми углами при вершине, в основании которой треугольник со сторонами 5, 6 и 8?

Пусть длины боковых рёбер a, b и c. Тогда, по теореме Пифагора, имеем

$$a^2 + b^2 = 25, \quad b^2 + c^2 = 36, \quad c^2 + a^2 = 64.$$

Отсюда

$$a^2 + b^2 + c^2 = (25 + 36 + 64)/2 = 61{,}5 < 64 = a^2 + c^2.$$

Противоречие!

Оценивание. За полное решение 13 баллов.

4. Натуральное число n таково, что у числа $36n^2$ ровно 51 разных натуральных делителей. Сколько натуральных делителей у числа $5n$?

Ответ: 16.

Решение. Пусть $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — попарно различные простые числа. Тогда количество натуральных делителей числа m равно

$$\tau(m) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_l + 1). \qquad (*)$$

Действительно, общий делитель числа m имеет вид

$$d = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{a_l},$$

где для каждого i показатель степени a_i принимает значения от 0 до k_i — всего $k_i + 1$ значений. По правилу произведения получаем формулу $(*)$.

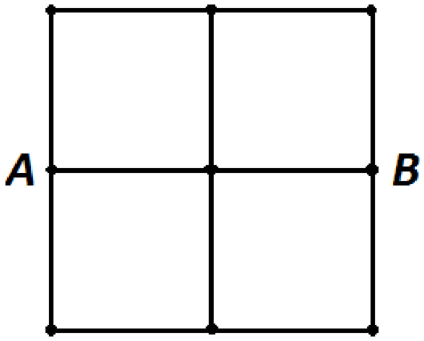
Число $m = 36n^2$ имеет хотя бы два простых делителя (2 и 3).

Учитывая равенство $\tau(m) = 3 \cdot 17$, получаем в формуле $(*)$ два множителя. Поэтому число m имеет вид $m = 2^2 3^{16}$ или $m = 2^{16} 3^2$. При этом $n = p^7$, где p равно 2 или 3. Тогда

$$5n = 5p^7, \quad \tau(5n) = 2 \cdot 8 = 16.$$

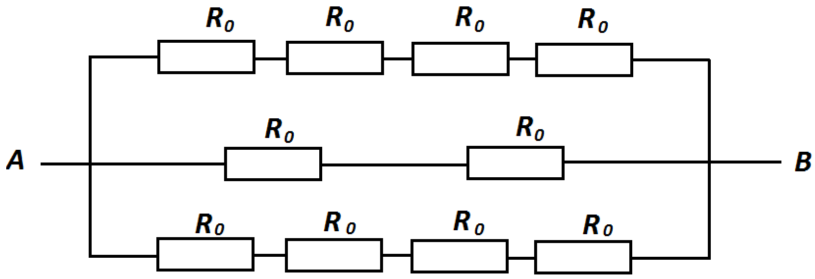
Оценивание. За полное решение 13 баллов. Формулу $(*)$ участники олимпиады могут использовать без доказательства.

5. (*10 баллов*) Определите сопротивление R проволочного контура, показанного на рисунке, между точками A и B. Известно, что расстояние между этими точками $2\ м$. Сопротивление одного метра проволоки, из которой сделан контур, равно $R_0 = 10\ Ом$.



Ответ: $R = 10\ Ом$

Решение. Напряжение на средних вертикальных перемычках всегда равно нулю.**(3 балла)** Следовательно, эквивалентная схема:



(3 балла)

Её сопротивление: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{4R_0} + \dfrac{1}{2R_0} + \dfrac{1}{4R_0} = \dfrac{1}{R_0}$. **(2 балла)**

Окончательный ответ: $R = 10\ Ом$. **(2 балла)**

6. (*10 баллов*) Снежок с температурой $0\ ^\circ C$ запущен со скоростью v в сторону стенки. При ударе расплавилось $k = 0{,}02\ \%$ от всего снежка. Определите, сколько процентов снежка расплавится, если его запустить в сторону стенки со скоростью $2v$? Удельная теплота плавления снега $\lambda = 330\ кДж/кг$. Считайте, что вся выделяемая при ударе энергия пошла на плавление.

Ответ: $n = 0{,}08\ \%$

Решение. Закон сохранения энергии в первом случае: $\frac{mv^2}{2}=\lambda\frac{km}{100}$. **(3 балла)**

То есть скорость снежка: $v=\sqrt{\frac{\lambda k}{50}}=\sqrt{132}\ м/с$. **(2 балла)**

Во втором случае: $\frac{m(2v)^2}{2}=\lambda\frac{nm}{100}$. **(3 балла)**

Окончательно получаем: $n=0{,}08\,\%$. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Стакан до краёв наполнен солёной водой. При этом на поверхности плавает пресный лёд массой $m=50\ г$. Какой объём ΔV воды выльется из стакана к моменту когда лёд растает? Поверхностным натяжением пренебречь. Плотность пресного льда $\rho_п=0{,}9\ г/см^3$, плотность солёного льда $\rho_с=0{,}95\ г/см^3$, плотность пресной воды $\rho_{пв}=1\ г/см^3$. Изменением суммарного объёма при смешивании двух жидкостей пренебречь.

Ответ: $\approx 2{,}63\ см^3$

Решение. Условие плавания пресного льда в солёной воде:

$\rho_{св}gV_{погр}=\rho_п gV_1=mg$, **(4 балла)**

где V_1 – весь объём пресного льда, $\rho_{св}$ – плотность солёной воды.

Условие плавания солёного льда такой же массы в солёной воде:

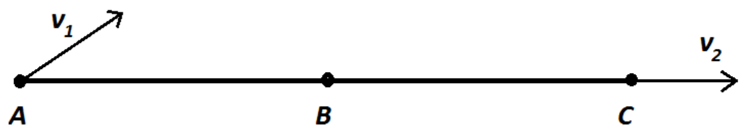
$\rho_с gV_{погр}=\rho_с gV_2=mg$, **(4 балла)**

где V_2 – весь объём солёного льда. Солёный лёд при таянии занимает ровно объём $V_{погр}$. Лишний объём льда, который после таяния окажется за пределами стакана: $V_1-V_2=\frac{m}{\rho_п}-\frac{m}{\rho_с}$. **(3 балла)**

А с учётом того, что он растает, то объём вылившейся воды:

$\Delta V=\left(\frac{m}{\rho_п}-\frac{m}{\rho_с}\right)\cdot\frac{\rho_п}{\rho_{пв}}\approx 2{,}63\ см^3$. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) Твёрдый стержень двигается по горизонтальному столу. В определённый момент времени скорость одного конца стержня $v_1 = 5\ м/с$, а скорость другого $v_2 = 4\ м/с$ и она направлена вдоль оси стержня (см. рисунок). Определите для этого момента времени скорость середины стержня.



Ответ: $\approx 4{,}3\ м/с$

Решение. У всех точек стержня есть составляющая скорости, которая направлена направо, равная v_2. **(4 балла)**

Следовательно, составляющая скорости, которая направлена вверх, для точки A: $v_{верт\ A} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 3\ м/с$. **(4 балла)**

Составляющая скорости точки B, которая направлена вверх:

$v_{верт\ B} = \dfrac{1}{2} v_{верт\ A} = 1{,}5\ м/с$. **(4 балла)**

Полная скорость точки B: $v = \sqrt{v_2^2 + v_{верт\ B}^2} = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} \approx 4{,}3\ м/с$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

8 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Виктор ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через полчаса езды со скоростью 60 км/ч он понял, что если не изменит скорости, то опоздает на 15 мин. Тогда он увеличил скорость, в результате чего оставшуюся часть пути преодолел со средней скоростью 80 км/ч и приехал в аэропорт на 15 мин раньше, чем планировал первоначально. Каково расстояние от дома Виктора до аэропорта?

Ответ: 150 км.

Решение. Пусть расстояние от дома Виктора до аэропорта равно s км, а время, которое он хотел потратить на дорогу $\frac{1}{2}+t$ часов. Тогда

$$s = 30 + 60(t + \frac{1}{4}) = 30 + 80(t - \frac{1}{4}).$$

Отсюда

$$60t + 15 = 80t - 20, \quad t = \frac{7}{4}, \quad s = 150.$$

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. На доске написано 1235 чисел. Одно из них встречается чаще других — 10 раз. Какое наименьшее количество различных чисел может быть записано на доске?

Ответ: 138.

Решение. Пусть на доске записано k различных чисел. Одно из них встречается 10 раз, а остальные не более 9 раз. Отсюда

$$10 + 9(k-1) \geqslant 1235, \quad 9k \geqslant 1234, \quad k \geqslant 138.$$

Пример: одно число записано 10 раз, 136 чисел по 9 раз и ещё одно число один раз.

Оценивание. За полное решение 12 баллов. За оценку без примера 6 б. За пример без оценки 5 б.

3. Можно ли отпилить от кубика с ребром в 20 см уголок так, чтобы срез имел форму треугольника со сторонами 7, 8 и 11 см?

Ответ: нет.

Решение. Задача сводится к следующей. Существует ли треугольная пирамида с прямыми углами при вершине, в основании которой треугольник со сторонами 7, 8 и 11?

Пусть длины боковых рёбер a, b и c. Тогда, по теореме Пифагора, имеем

$$a^2 + b^2 = 49, \quad b^2 + c^2 = 64, \quad c^2 + a^2 = 121.$$

Отсюда

$$a^2 + b^2 + c^2 = (49 + 64 + 121)/2 = 117 < 121 = a^2 + c^2.$$

Противоречие!

Оценивание. За полное решение 13 баллов.

4. Натуральное число n таково, что у числа $100n^2$ ровно 55 разных натуральных делителей. Сколько натуральных делителей у числа $10n$?

Ответ: 18.

Решение. Пусть $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$, где p_1, p_2, …, p_l — попарно различные простые числа. Тогда количество натуральных делителей числа m равно

$$\tau(m) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_l + 1). \qquad (*)$$

Действительно, общий делитель числа m имеет вид

$$d = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{a_l},$$

где для каждого i показатель степени a_i принимает значения от 0 до k_i — всего $k_i + 1$ значений. По правилу произведения получаем формулу $(*)$.

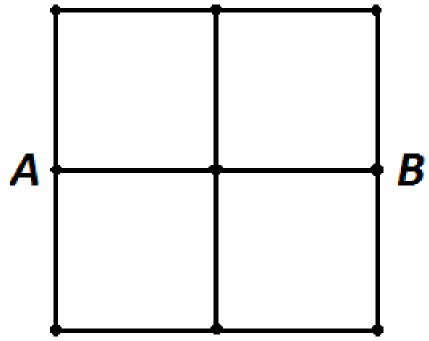
Число $m = 100n^2$ имеет хотя бы два простых делителя (2 и 5).

Учитывая равенство $\tau(m) = 5 \cdot 11$, получаем в формуле $(*)$ два множителя. Поэтому число m имеет вид $m = 2^4 5^{10}$ или $m = 2^{10} 5^4$. При этом $n = pq^4$, где $p = 2$, $q = 5$ или $p = 5$, $q = 2$. Тогда

$$10n = p^2 q^5, \quad \tau(10n) = 3 \cdot 6 = 18.$$

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Формулу $(*)$ участники олимпиады могут использовать без доказательства.

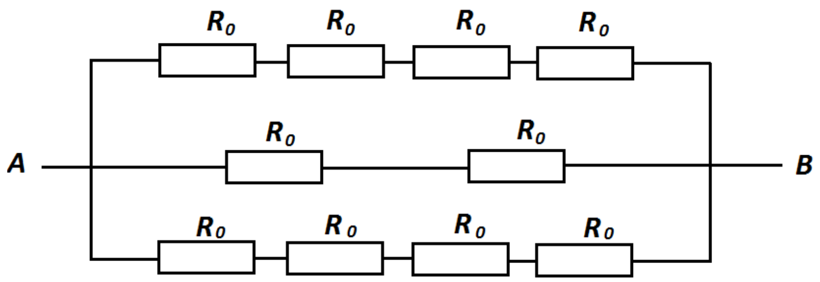
5. (*10 баллов*) Сопротивление проволочного контура, показанного на рисунке, между точками A и B равно $R = 15\,Ом$. Известно, что расстояние между этими точками $2\,м$. Найдите сопротивление R_0 одного метра проволоки, из которой сделан контур.



Ответ: $R_0 = 15\,Ом$

Решение. Напряжение на средних вертикальных перемычках всегда равно нулю. **(3 балла)**

Следовательно, эквивалентная схема:



(3 балла)

Её сопротивление: $\frac{1}{R} = \frac{1}{4R_0} + \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{4R_0} = \frac{1}{R_0}$. **(2 балла)**

Окончательный ответ: $R_0 = 15\,Ом$. **(2 балла)**

6. (*10 баллов*) Снежок с температурой $0\,°C$ запущен со скоростью v в сторону стенки. При ударе расплавилось $k = 0{,}02\,\%$ от всего снежка. Определите, сколько процентов снежка расплавится, если его запустить в сторону стенки со скоростью $\frac{v}{2}$? Удельная теплота плавления снега

$\lambda = 330\ кДж/кг$. Считайте, что вся выделяемая при ударе энергия пошла на плавление.

Ответ: $n = 0{,}005\ \%$

Решение. Закон сохранения энергии в первом случае: $\frac{mv^2}{2} = \lambda\frac{km}{100}$. **(3 балла)**

То есть скорость снежка: $v = \sqrt{\frac{\lambda k}{50}} = \sqrt{132}\ м/с$. (2 **балла)**

Во втором случае: $\frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = \lambda\frac{nm}{100}$. **(3 балла)**

Окончательно получаем: $n = 0{,}005\ \%$. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Стакан до краёв наполнен солёной водой. При этом на поверхности плавает пресный лёд массой $m = 100\ г$. Какой объём ΔV воды выльется из стакана к моменту когда лёд растает? Поверхностным натяжением пренебречь. Плотность пресного льда $\rho_п = 0{,}9\ г/см^3$, плотность солёного льда $\rho_с = 0{,}95\ г/см^3$, плотность пресной воды $\rho_{пв} = 1\ г/см^3$. Изменением суммарного объёма при смешивании двух жидкостей пренебречь.

Ответ: $\approx 5{,}26\ см^3$

Решение. Условие плавания пресного льда в солёной воде:

$\rho_{св} g V_{погр} = \rho_п g V_1 = mg$, **(4 балла)**

где V_1 – весь объём пресного льда, $\rho_{св}$ – плотность солёной воды.

Условие плавания солёного льда такой же массы в солёной воде:

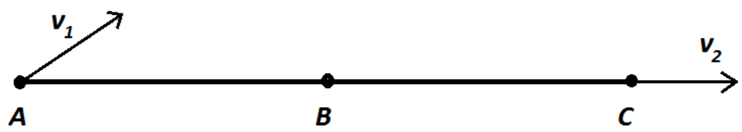
$\rho_с g V_{погр} = \rho_с g V_2 = mg$, **(4 балла)**

где V_2 – весь объём солёного льда. Солёный лёд при таянии занимает ровно объём $V_{погр}$. Лишний объём льда, который после таяния окажется за пределами стакана: $V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_п} - \frac{m}{\rho_с}$. **(3 балла)**

А с учётом того, что он растает, то объём вылившейся воды:

$$\Delta V = \left(\frac{m}{\rho_n} - \frac{m}{\rho_c}\right) \cdot \frac{\rho_n}{\rho_{nв}} \approx 5,26\ см^3.$$ **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) Твёрдый стержень двигается по горизонтальному столу. В определённый момент времени скорость одного конца стержня $v_1 = 10\ м/с$, а скорость другого $v_2 = 6\ м/с$ и она направлена вдоль оси стержня (см. рисунок). Определите для этого момента времени скорость середины стержня.



Ответ: $\approx 7,2\ м/с$

Решение. У всех точек стержня есть составляющая скорости, которая направлена направо, равная v_2. **(4 балла)**

Следовательно, составляющая скорости, которая направлена вверх, для точки A: $v_{верт\ A} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 8\ м/с$. **(4 балла)**

Составляющая скорости точки B, которая направлена вверх:

$$v_{верт\ B} = \frac{1}{2} v_{верт\ A} = 4\ м/с.$$ **(4 балла)**

Полная скорость точки B: $v = \sqrt{v_2^2 + v_{верт\ B}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} \approx 7,2\ м/с$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

9 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Андрей ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через час езды со скоростью 60 км/ч он понял, что если не изменит скорости, то опоздает на 20 мин. Тогда он резко увеличил скорость, в результате чего оставшуюся часть пути преодолел со средней скоростью 90 км/ч и приехал в аэропорт на 20 мин раньше, чем планировал первоначально. Каково расстояние от дома Андрея до аэропорта?

Ответ: 180 км.

Решение. Пусть расстояние от дома Андрея до аэропорта равно s км, а время, которое он хотел потратить на дорогу, $1+t$ часов. Тогда

$$s = 60 + 60(t + \frac{1}{3}) = 60 + 90(t - \frac{1}{3}).$$

Отсюда $60t + 20 = 90t - 30$, $t = \frac{5}{3}$, $s = 180$.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. Пусть

$$\sqrt{49 - a^2} - \sqrt{25 - a^2} = 3.$$

Вычислите значение выражения

$$\sqrt{49 - a^2} + \sqrt{25 - a^2}.$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть

$$\sqrt{49 - a^2} + \sqrt{25 - a^2} = x.$$

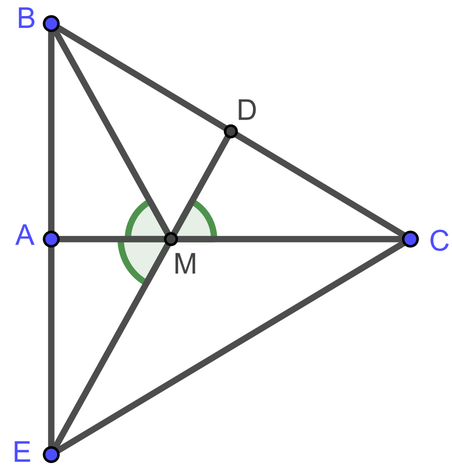
Перемножив это равенство с исходным, получим $24 = 3x$.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

3. Пусть D — середина гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC. На катете AC выбрана такая точка M, что $\angle AMB = \angle CMD$. Найдите отношение $\dfrac{AM}{MC}$.

Ответ: $1:2$.

Решение. Пусть точка E — пересечение лучей BA и DM.



Тогда углы AME и CMD равны как вертикальные. Значит, равны и углы AMB и AME. Поэтому треугольники AMB и AME равны (по общей стороне AM и прилежащим к ней углам). Стало быть, $BA = EA$. Рассмотрим треугольник EBC. В нём точка M — пересечение медиан CA и ED. По свойству точки пересечения медиан, $AM : MC = 1 : 2$.

Оценивание. За полное решение 14 баллов.

4. Пусть $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 7$. Найдите многочлен $g(x)$ наименьшей степени такой, что

$$f(3) = g(3), \quad f(3-\sqrt{3}) = g(3-\sqrt{3}), \quad f(3+\sqrt{3}) = g(3+\sqrt{3}).$$

Ответ: $12x^2 - 19x + 25$.

Решение. Рассмотрим многочлен $h(x) = g(x) - f(x)$. Он равен нулю в точках $x = 3$ и $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Поэтому $h(x)$ делится на многочлен

$$q(x) = (x-3)(x-(3+\sqrt{3}))(x-(3-\sqrt{3})) =$$

$$= (x-3)((x-3)^2 - 3) = (x-3)(x^2 - 6x + 6) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18,$$

то есть для некоторого многочлена $s(x)$ имеет место тождество

$$g(x) - f(x) = s(x) \cdot (x^3 - 9x^2 + 24x - 18),$$

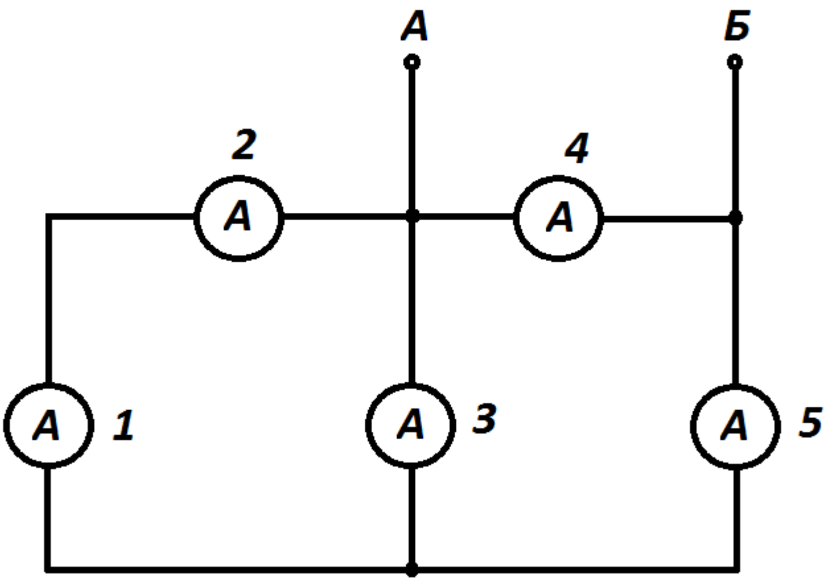
или

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 7 + s(x) \cdot (x^3 - 9x^2 + 24x - 18).$$

При $s(x) = -1$ получим $g(x) = 12x^2 - 19x + 25$. При любом другом многочлене $s(x)$ степень $g(x)$ не меньше трёх.

Оценивание. За полное решение 14 баллов. Если многочлен найден, но не доказана минимальность степени, 11 баллов.

5. (*10 баллов*) Пять одинаковых неидеальных амперметров соединены так, как показано на рисунке. К точкам A и $Б$ подсоединяют идеальный источник питания. Определите сумму показаний всех амперметров, если известно, что показания первого амперметра $I_1 = 2\ мА$.



Ответ: $24\ мА$

Решение. В результате анализа предложенной электрической цепи можно сделать вывод, что: $I_2 = I_1 = 2\ мА$. **(2 балла)**

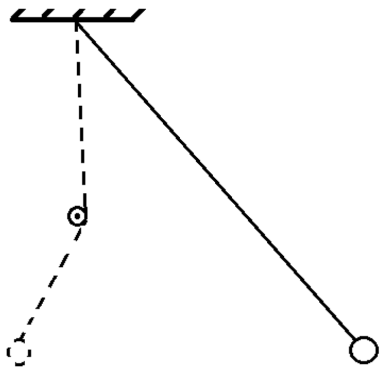
$$I_3 = 2I_1 = 4\ мА.$$ **(2 балла)**

$$I_5 = I_3 + I_1 = 6\ мА.$$ **(2 балла)**

$$I_4 = \frac{5}{3} I_5 = 10\ мА.$$ **(2 балла)**

Сумма показаний всех амперметров: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 24\ мА$. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Математический маятник подвешен вблизи вертикальной стены и колеблется в плоскости, параллельной стене. В стену вбит тонкий гвоздь так, что середина нити маятника наталкивается на него каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия справа налево. Найдите длину нити, если период колебаний такого маятника (с помехой в виде гвоздя) $T = 2{,}41\ с$. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.



Ответ: $2\,м$

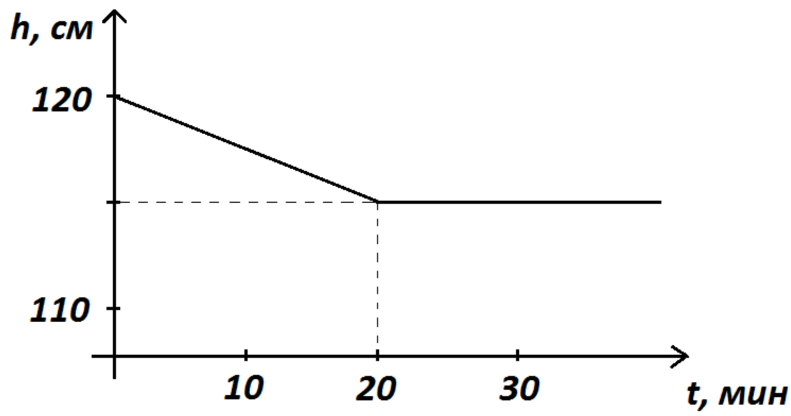
Решение. Период колебаний математического маятника длиной l определяется выражением $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. **(3 балла)**

А для маятника длиной $\frac{l}{2}$ период колебаний равен $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$. **(3 балла)**

Из условия задачи следует, что $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$. **(4 балла)**

В результате получаем $l = \frac{2T^2 g}{\pi^2 (3 + 2\sqrt{2})} = 2\,м$. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) В цилиндрическом сосуде на дне намерз лёд. Его температура $0\,°C$. Сверху налита вода, взятая при той же температуре. Сосуд внесли в тёплое помещение. Зависимость уровня воды в сосуде от времени приведена на графике. Определите исходные массы льда и воды. Площадь основания сосуда $S = 15\,см^2$, плотность воды $\rho_в = 1\,г/см^3$, плотность льда $\rho_л = 0{,}9\,г/см^3$.



Ответ: масса льда – $675\,г$, масса воды – $1050\,г$

Решение. Изменение объёма воды в сосуде: $\Delta V = S\Delta h = 15\cdot 5 = 75\,см^3$.

(2 балла)

Данное изменение – это разница между объёмами исходного льда и воды, в которую он превратился. $\Delta V = V_Л - V_В = \dfrac{m_Л}{\rho_Л} - \dfrac{m_Л}{\rho_В}$. **(5 баллов)**

Получаем, что масса исходного льда: $m_Л = \dfrac{\Delta V\cdot\rho_Л\cdot\rho_В}{\rho_В - \rho_Л} = 675\,г$. **(3 балла)**

Конечный объём воды в сосуде: $V_К = 115\cdot 15 = 1725\,см^3$. **(2 балла)**

Следовательно, начальная масса воды: $m_В = \rho_В V_К - m_Л = 1050\,г$. **(3 балла)**

8. (*10 баллов*) Имеются две лёгкие пружины равной длины, но с разными жёсткостями. Пружины поставили вертикально одна на другую. Сверху положили груз массой $m = 100\,г$. В результате, конструкция оказалась сжата на $x_1 = 12{,}5\,мм$. После этого пружины поставили рядом друг с другом и опять сверху положили тот же груз. В этом случае конструкция оказалась сжата на $x_2 = 2\,мм$. Найдите жёсткости пружин. Ускорение свободного падения $g = 10\,м/с^2$.

Ответ: $k_1 = 400\,\dfrac{Н}{м}$ и $k_2 = 100\,\dfrac{Н}{м}$

Решение. В первой ситуации жёсткость получаемой конструкции $k_0 = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

(2 балла)

Условие равновесия в этом случае: $k_0 x_1 = mg$. **(1 балл)**

В результате: $\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \dfrac{mg}{x_1} = 80\,\dfrac{Н}{м}$. **(1 балл)**

Во второй ситуации жёсткость получаемой конструкции $k_к = k_1 + k_2$.**(2 балла)**

Условие равновесия в этом случае: $k_к x_2 = mg$. **(1 балл)**

В результате: $k_1 + k_2 = \dfrac{mg}{x_2} = 500\,\dfrac{Н}{м}$. **(1 балл)**

Решая эту систему уравнений, получаем: $k_1 = 400\,\dfrac{Н}{м}$ и $k_2 = 100\,\dfrac{Н}{м}$. **(2 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

9 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Виктор ехал на автомобиле в аэропорт соседнего города. Через полчаса езды со скоростью 60 км/ч он понял, что если не изменит скорости, то опоздает на 15 мин. Тогда он увеличил скорость, в результате чего оставшуюся часть пути преодолел со средней скоростью 80 км/ч и приехал в аэропорт на 15 мин раньше, чем планировал первоначально. Каково расстояние от дома Виктора до аэропорта?

Ответ: 150 км.

Решение. Пусть расстояние от дома Виктора до аэропорта равно s км, а время, которое он хотел потратить на дорогу $\frac{1}{2}+t$ часов. Тогда

$$s = 30 + 60(t + \frac{1}{4}) = 30 + 80(t - \frac{1}{4}).$$

Отсюда $60t + 15 = 80t - 20$, $t = \frac{7}{4}$, $s = 150$.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. Пусть

$$\sqrt{25 - a^2} - \sqrt{9 - a^2} = 3.$$

Вычислите значение выражения

$$\sqrt{25 - a^2} + \sqrt{9 - a^2}.$$

Ответ: 16/3.

Решение. Пусть

$$\sqrt{25 - a^2} + \sqrt{9 - a^2} = x.$$

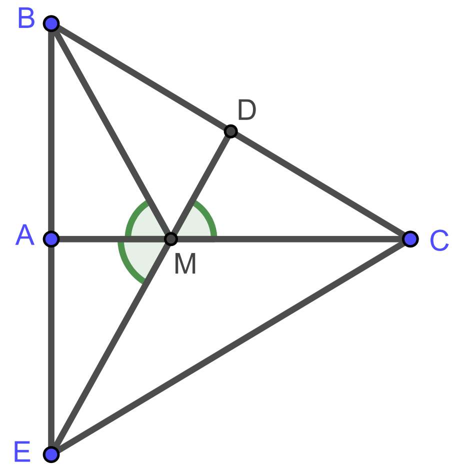
Перемножив это равенство с исходным, получим $16 = 3x$.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

3. Пусть D — середина гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC. На катете AC выбрана такая точка M, что $\angle AMB = \angle CMD$. Найдите отношение $\dfrac{BM}{MD}$.

Ответ: 2 : 1.

Решение. Пусть точка E — пересечение лучей BA и DM.



Тогда углы AME и CMD равны как вертикальные. Значит, равны и углы AMB и AME. Поэтому треугольники AMB и AME равны (по общей стороне AM и прилежащим к ней углам). Стало быть, $BA = EA$. Рассмотрим треугольник EBC. В нём точка M — пересечение медиан CA и ED. По свойству точки пересечения медиан, $EM : MD = 2 : 1$. Но $BM = EM$ (из равенства треугольников AMB и AME). Отсюда ответ.

Оценивание. За полное решение 14 баллов.

4. Пусть $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$. Найдите многочлен $g(x)$ наименьшей степени такой, что

$$f(2) = g(2), \quad f(2-\sqrt{2}) = g(2-\sqrt{2}), \quad f(2+\sqrt{2}) = g(2+\sqrt{2}).$$

Ответ: $3x^2 - 5x - 3$.

Решение. Рассмотрим многочлен $h(x) = g(x) - f(x)$. Он равен нулю в точках $x = 2$ и $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Поэтому $h(x)$ делится на многочлен

$$q(x) = (x-2)(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2})) =$$

$$= (x-2)((x-2)^2-2) = (x-2)(x^2-4x+2) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4,$$

то есть для некоторого многочлена $s(x)$ имеет место тождество

$$g(x) - f(x) = s(x) \cdot (x^3 - 6x^2 + 10x - 4),$$

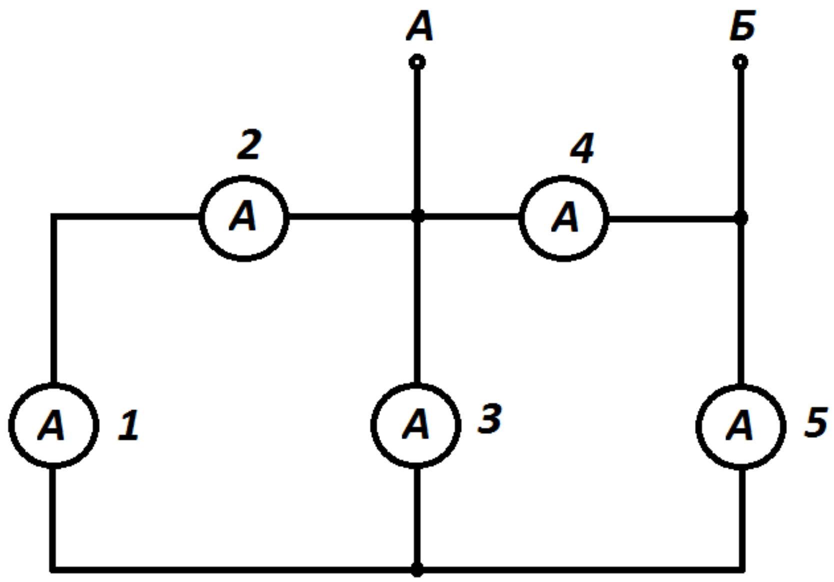
или

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 7 + s(x) \cdot (x^3 - 6x^2 + 10x - 4).$$

При $s(x) = -1$ получим $g(x) = 3x^2 - 5x - 3$. При любом другом многочлене $s(x)$ степень $g(x)$ не меньше трёх.

Оценивание. За полное решение 14 баллов. Если многочлен найден, но не доказана минимальность степени, 11 баллов.

5. (*10 баллов*) Пять одинаковых амперметров соединены так, как показано на рисунке. К точкам A и $Б$ подсоединяют идеальный источник питания. Определите сумму показаний всех амперметров, если известно, что показания второго амперметра $I_2 = 4\ мА$.



Ответ: $48\ мА$

Решение. В результате анализа предложенной электрической цепи можно сделать вывод, что $I_2 = I_1 = 4\ мА$. **(2 балла)**

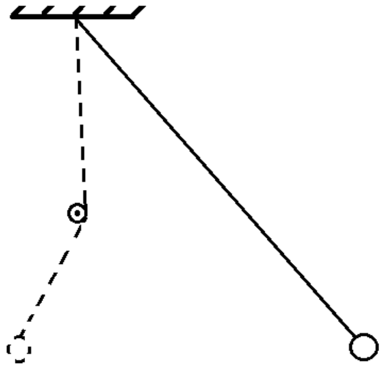
$$I_3 = 2I_2 = 8\ мА.$$ **(2 балла)**

$$I_5 = I_3 + I_2 = 12\ мА.$$ **(2 балла)**

$$I_4 = \frac{5}{3} I_5 = 20\ мА.$$ **(2 балла)**

Сумма показаний всех амперметров: $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 48\ мА$. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Математический маятник подвешен вблизи вертикальной стены и колеблется в плоскости, параллельной стене. В стену вбит тонкий гвоздь так, что середина нити маятника наталкивается на него каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия справа налево. Найдите период колебаний такого маятника, если длина его нити равна $l = 2\ м$. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.



Ответ: $\approx 2{,}4\,c$

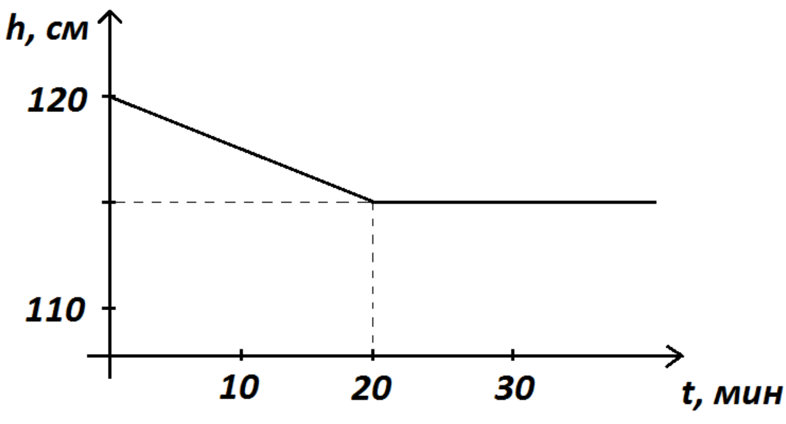
Решение. Период колебаний математического маятника длиной l определяется выражением $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. **(3 балла)**

А для маятника длиной $\frac{l}{2}$ период колебаний: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$. **(3 балла)**

Из условия задачи следует, что $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$. **(4 балла)**

В результате получаем $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)} \approx 2{,}4\,c$. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) В цилиндрическом сосуде на дне намерз лёд. Его температура $0\,°C$. Сверху налита вода, взятая при той же температуре. Сосуд внесли в тёплое помещение. Зависимость уровня воды в сосуде от времени приведена на графике. Определите исходные массы льда и воды. Площадь основания сосуда $S = 15\,см^2$, плотность воды $\rho_в = 1\,г/см^3$, плотность льда $\rho_л = 0{,}9\,г/см^3$.



Ответ: масса льда – $675\,г$, масса воды – $1050\,г$

Решение. Изменение объёма воды в сосуде $\Delta V = S\Delta h = 15\cdot 5 = 75\,см^3$. (**2 балла)**

Данное изменение – это разница между объёмами исходного льда и воды, в которую он превратился. $\Delta V = V_Л - V_В = \frac{m_Л}{\rho_Л} - \frac{m_Л}{\rho_В}$. **(5 баллов)**

Получаем, что масса исходного льда: $m_Л = \frac{\Delta V\cdot\rho_Л\cdot\rho_В}{\rho_В - \rho_Л} = 675\,г$. **(3 балла)**

Конечный объем воды в сосуде: $V_К = 115\cdot 15 = 1725\,см^3$. **(2 балла)**

Следовательно, начальная масса воды $m_В = \rho_В V_К - m_Л = 1050\,г$. **(3 балла)**

8. (*10 баллов*) Имеются две легкие пружины равной длины, но с разными жёсткостями. Пружины поставили вертикально одна на другую. Сверху положили груз массой $m = 3\,кг$. В результате, конструкция оказалась сжата на $x_1 = 40\,см$. После этого пружины поставили рядом друг с другом и опять сверху положили тот же груз. В этом случае конструкция оказалась сжата на $x_2 = 7{,}5\,см$. Найдите жёсткости пружин. Ускорение свободного падения $g = 10\,м/с^2$.

Ответ: $k_1 = 300\,\frac{Н}{м}$ и $k_2 = 100\,\frac{Н}{м}$

Решение. В первой ситуации жёсткость получаемой конструкции:

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$ **(2 балла)**

Условие равновесия в этом случае: $k_0 x_1 = mg$. **(1 балл)**

В результате: $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{mg}{x_1} = 75\,\frac{Н}{м}$. **(1 балл)**

Во второй ситуации жёсткость получаемой конструкции: $k_к = k_1 + k_2$ **(2 балла)**

Условие равновесия в этом случае: $k_к x_2 = mg$. **(1 балл)**

В результате: $k_1 + k_2 = \frac{mg}{x_2} = 400\,\frac{Н}{м}$. **(1 балл)**

Решая эту систему уравнений, получаем: $k_1 = 300\,\frac{Н}{м}$ и $k_2 = 100\,\frac{Н}{м}$. **(2 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

10 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Колонна пехоты растянулась на 1 км. Старшина Ким, выехав на гироскутере из конца колонны, достиг её начала и вернулся к концу. Пехотинцы прошли за это время 4/3 км. А какое расстояние за это время проехал старшина?

Ответ: 8/3 км

Решение. Пусть скорость колонны x км/ч, а старшина ехал в k раз быстрее, т. е. со скоростью kx км/ч. До конца колонны Ким ехал $t_1 = \frac{1}{kx-x}$ ч (движение вдогонку), а в обратном направлении $t_2 = \frac{1}{kx+x}$ ч (движение навстречу). За это время колонна преодолела 4/3 км, т. е. $x(t_1+t_2) = 4/3$. Подставив выражения для t_1 и t_2, получим

$$\frac{x}{kx-x} + \frac{x}{kx+x} = 4/3; \quad \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} = 4/3; \quad 2k = \frac{4}{3}(k^2-1).$$

У полученного квадратного уравнения единственный положительный корень $k = 2$. Старшина едет в 2 раза быстрее, чем колонна. Поэтому и расстояние, которое он преодолеет, будет в 2 раза больше.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. Последовательность (a_n) задана такими соотношениями: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n$ (при $n \geqslant 3$). Найдите a_{2019}.

Ответ: 2020.

Решение. Выпишем первые члены последовательности:

$$1, 2, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 16, 18, 19, 19, 19, 20, 21, 23, \ldots$$

Можно увидеть закономерность: $a_{n+6} = a_n + 6$. Докажем её. Имеем

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + n + 1 = (a_{n-1} - a_{n-2} + n) - a_{n-1} + n + 1 = -a_{n-2} + 2n + 1.$$

Заменив в полученном равенстве n на $n+2$, получим

$$a_{n+3} = -a_n + 2(n+2) + 1 = -a_n + 2n + 5.$$

Теперь заменим n на $n+3$:

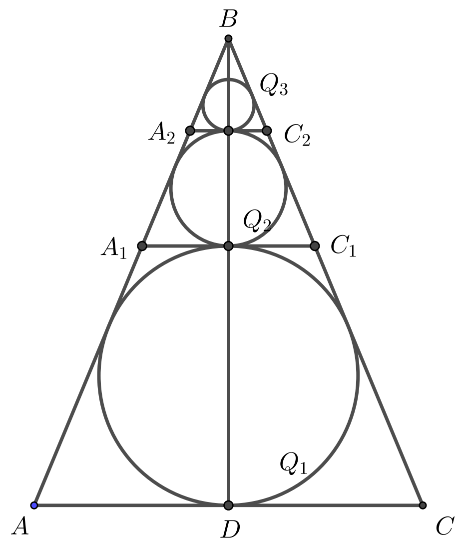
$$a_{n+6} = -a_{n+3} + 2(n+3) + 5 = a_n - 2n - 5 + 2(n+3) + 5 = a_n + 6.$$

Теперь легко найти ответ:

$$a_{2019} = a_{3+6\cdot 336} = a_3 + 6\cdot 636 = 4 + 6\cdot 636 = 2020.$$

Оценивание. За полное решение 12 баллов. Если закономерность подмечена, но не доказана, то (при верном ответе) 6 баллов.

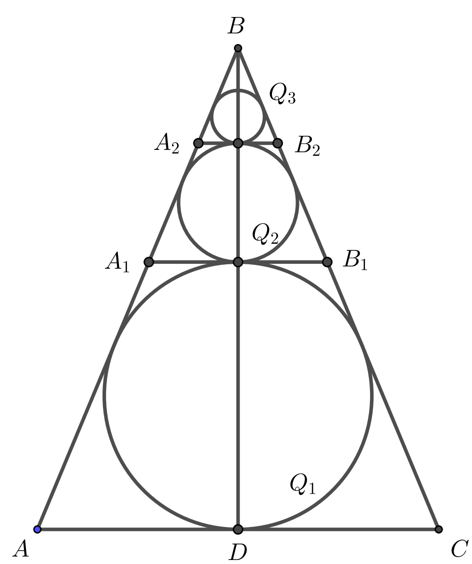
3. Дан треугольник ABC. Известны длины его сторон: $AB = BC = 80$, $AC = 96$.



Окружность Q_1 вписана в треугольник ABC. Окружность Q_2 касается Q_1 и сторон AB и BC. Окружность Q_3 касается Q_2 и также сторон AB и BC. Найдите радиус окружности Q_3.

Ответ: 1,5.

Решение. Пусть r_i — радиус окружности Q_i ($i = 1, 2, 3$). Легко найти r_1.



Пусть BD — высота. Из треугольника ABD найдём её длину:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{80^2 - 48^2} = 64.$$

Отсюда

$$r_1 = \frac{S_{ABC}}{AB + AD} = 24.$$

Высота треугольника A_1BC_1, проведённая из вершины B, равна

$$BD - 2r_1 = 64 - 48 = 16.$$

Проведём общие внутренние касательные к окружностям (см. рис.). Треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC. Коэффициент подобия равен отношению высот: $k = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$. Отсюда $r_2 = kr_1 = 6$. Треугольник A_2BC_2 подобен треугольнику A_1BC_1 с тем же коэффициентом подобия k. Поэтому $r_3 = kr_2 = 1{,}5$.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если найден только радиус 1-й окружности, 4 балла.

4. Две вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2$, а одна из сторон на прямой $y = 2x - 17$. Какова площадь квадрата?

Ответ: 80 или 1280.

Решение. Легко проверить, что парабола и прямая из условия задачи не пересекаются.

Прямая l, параллельная прямой $2x - y - 17 = 0$, задаётся уравнением вида $2x - y + b = 0$, где b — некоторая константа. Расстояние между этими прямыми $d = \dfrac{|b + 17|}{\sqrt{5}}$ (данное выражение можно получить разными способами). Найдём расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_1, y_2)$, в которых прямая l пересекает параболу $y = x^2$:

$$y = 2x + b = x^2; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + b}; \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{b + 1};$$

$$y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2) = 4\sqrt{b + 1}; \quad M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 20(b + 1).$$

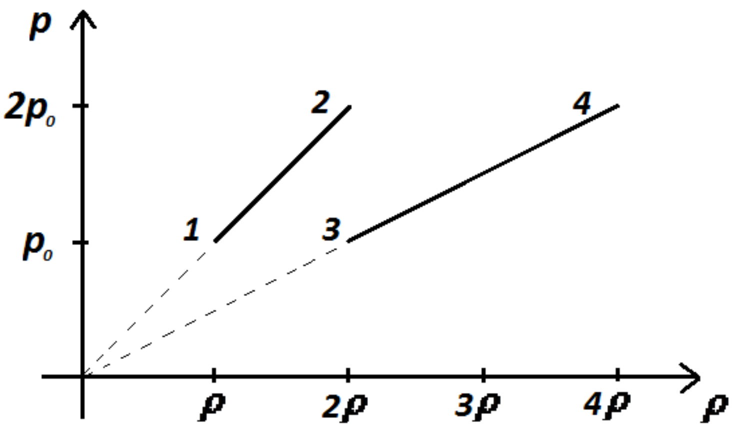
Приравняв квадраты расстояний между соседними вершинами квадрата и между его противоположными сторонами, получим уравнение относительно параметра b

$$20(b + 1) = \frac{(b + 17)^2}{5}.$$

Отсюда $b = 3$ или $b = 63$. При этом площадь квадрата $d^2 = 80$ или $d^2 = 1280$.

Оценивание. За полное решение 13 баллов.

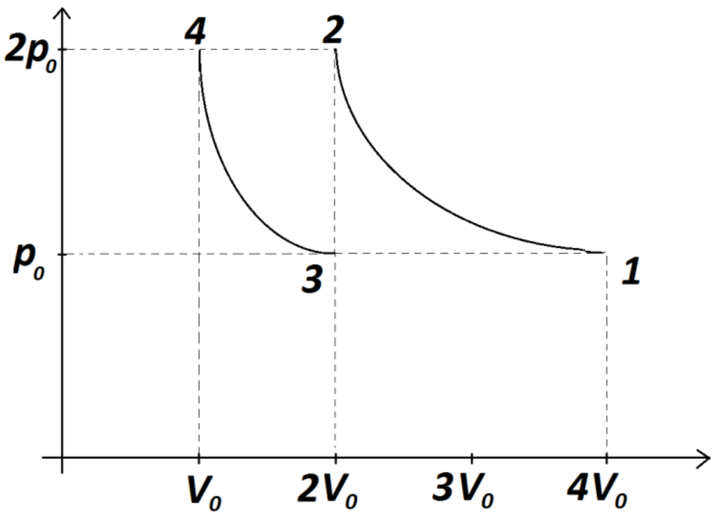
5. (*15 баллов*) На рисунке приведены зависимости давления газа от его плотности в двух проведённых процессах. Известно, что в процессе $1-2$ над газом была совершена работа A_{1-2}. Определите работу, совершаемую над газом в процессе $3-4$.



Ответ: $A_{3-4} = \frac{1}{2} A_{1-2}$

Решение. $1-2$ и $3-4$ это изотермические процессы. **(3 балла)**

Работу в изотермическом процессе можно найти как площадь под графиком, построенном в координатах $p-V$. **(2 балла)**



(2 балла)

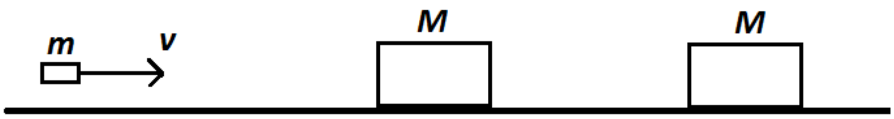
Обращает на себя внимание, что для любого значения давления объём в процессе $1-2$ ровно в два раза больше объема в процессе $3-4$. **(3 балла)**

То есть если рассматривать малое изменение объёма в процессе $1-2$, то оно оказывается ровно в два раза больше малого изменения объёма в процессе $3-4$, взятого при том же давлении: $\Delta V_{3-4} = \frac{1}{2} \Delta V_{1-2}$. **(3 балла)**

Получаем, что площадь под графиком $3-4$ ровно в два раза меньше площади под графиком $1-2$. То есть $A_{3-4}=\frac{1}{2}A_{1-2}$. **(2 балла)**

Примечание. Решение задачи, в которой ученик получает ***правильный ответ***, записав уравнение $A=p\Delta V$ без анализа площадей под графиками в координатах $p-V$, оценивается как ***неправильное*!**

6.(*10 баллов*) На горизонтальной поверхности располагаются два одинаковых небольших неподвижных бруска массами M каждый. Расстояние между ними S. В левый брусок попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой m. Какой должна быть скорость пули, чтобы конечное расстояние между брусками было также равно S. Столкновение между брусками абсолютно упругое. Масса пули намного меньше массы бруска $m \ll M$. Коэффициент трения между брусками и горизонтальной поверхностью μ, ускорение свободного падения g.



Ответ: $v=\frac{2M}{m}\sqrt{\mu gS}$

Решение. Закон сохранения импульса для столкновения пули с левым бруском: $mv=\left(M+m\right)u=Mu$. **(2 балла)**

В случае абсолютно упругого удара между телами одинаковой массы происходит «обмен скоростями». **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для последующего движения брусков:

$\frac{Mu^2}{2}=A_{тр}=2\mu MgS$. **(3 балла)**

В результате, скорость пули: $v=\frac{2M}{m}\sqrt{\mu gS}$. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Камень массой $m=600\,г$ бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью $v_0=20\,м/с$. При наличии силы сопротивления воздуха пропорциональной скорости камня (коэффициент пропорциональности $k=0{,}1\,(Н\cdot с)/м$), максимальная высота на которой оказался камень равна $h=10\,м$. Работа силы сопротивления за этот промежуток времени равна

$A = 30\,Дж$. Определите ускорение камня для самой высокой точки траектории. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

Ответ: $\approx 10{,}1\,\dfrac{м}{с^2}$

Решение. Закон сохранения энергии в данной ситуации выглядит следующим образом: $\dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + mgh + A.$ **(3 балла)**

В результате, находим скорость в самой верхней точке:

$$v_к = \sqrt{v_0^2 - 2gh - \frac{2A}{m}} = \sqrt{20^2 - 2\cdot 10\cdot 10 - \frac{2\cdot 30}{0{,}6}} = 10\,\frac{м}{с}.$$ **(3 балла)**

Ускорение, связанное с силой сопротивления, направлено против скорости, то есть параллельно оси *OX*, и оно равно: $a_x = \dfrac{F_{сопр}}{m} = \dfrac{kv_к}{m} = \dfrac{0{,}1\cdot 10}{0{,}6} = \dfrac{5}{3}\,\dfrac{м}{с^2}$.

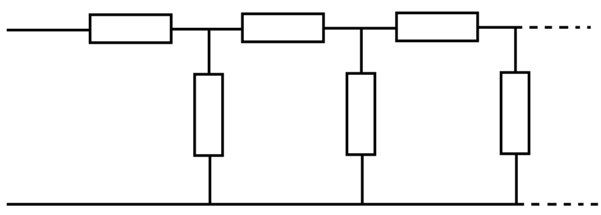
(3 балла)

Ускорение, связанное с силой тяжести, направлено вертикально вниз:

$a_y = g = 10\ м/с^2$. **(2 балла)**

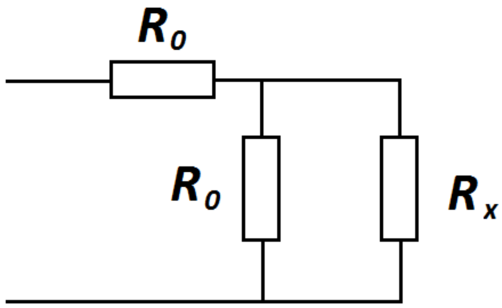
Полное ускорение: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + 10^2} \approx 10{,}1\,\dfrac{м}{с^2}$. **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) Определите сопротивление бесконечно длинной цепи, составленной из одинаковых резисторов $R_0 = 10\ Ом$.



Ответ: $\approx 16{,}2\ Ом$

Решение. Пусть сопротивление всей цепи R_X. Тогда добавляя к R_X два резистора R_0, мы получаем следующую схему: **(4 балла)**



Её сопротивление также R_X. **(1 балл)**

В результате получаем: $R_X = R_0 + \dfrac{R_0 R_X}{R_0 + R_X}$. **(2 балла)**

Решая данное уравнение, получаем окончательный ответ:

$R_X = 5 + 5\sqrt{5} \approx 16{,}2\ Ом$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

10 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Колонна пехоты растянулась на 1 км. Старшина Ким, выехав на гироскутере из конца колонны, достиг её начала и вернулся к концу. Пехотинцы прошли за это время 2 км 400 м. А какое расстояние за это время проехал старшина?

Ответ: 3 км 600 м

Решение. Пусть скорость колонны x км/ч, а старшина ехал в k раз быстрее, т. е. со скоростью kx км/ч. До конца колонны Ким ехал $t_1 = \frac{1}{kx-x}$ ч (движение вдогонку), а в обратном направлении $t_2 = \frac{1}{kx+x}$ ч (движение навстречу). За это время колонна преодолела 2,4 км, т. е. $x(t_1+t_2) = 2{,}4$. Подставив выражения для t_1 и t_2, получим

$$\frac{x}{kx-x} + \frac{x}{kx+x} = 2{,}4; \quad \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} = 2{,}4; \quad 2k = 2{,}4(k^2-1).$$

У полученного квадратного уравнения единственный положительный корень $k = \frac{3}{2}$. Старшина едет в 1,5 раза быстрее, чем колонна. Поэтому и расстояние, которое он преодолеет, будет в 1,5 раза больше.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. Последовательность (a_n) задана такими соотношениями: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n$ (при $n \geqslant 3$). Найдите a_{1000}.

Ответ: 1002.

Решение. Выпишем первые члены последовательности:

$$1, 3, 5, 6, 6, 6, 7, 9, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 17, 18, 18, 18, 19, 21, \ldots$$

Можно увидеть закономерность: $a_{n+6} = a_n + 6$. Докажем её. Имеем

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + n + 1 = (a_{n-1} - a_{n-2} + n) - a_{n-1} + n + 1 = -a_{n-2} + 2n + 1.$$

Заменив в полученном равенстве n на $n+2$, получим

$$a_{n+3} = -a_n + 2(n+2) + 1 = -a_n + 2n + 5.$$

Теперь заменим n на $n+3$:

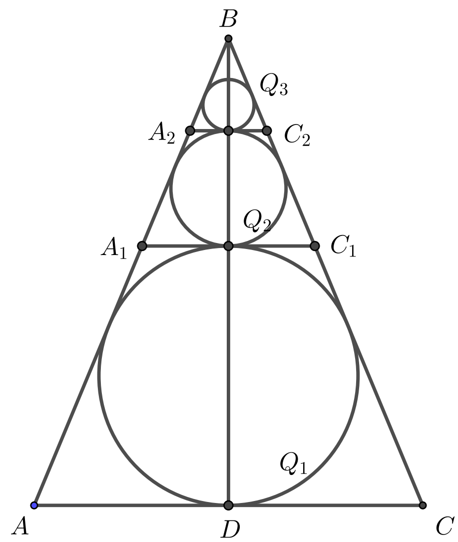
$$a_{n+6} = -a_{n+3} + 2(n+3) + 5 = a_n - 2n - 5 + 2(n+3) + 5 = a_n + 6.$$

Теперь легко найти ответ:

$$a_{1000} = a_{4+6\cdot 166} = a_4 + 6 \cdot 166 = 6 + 6 \cdot 166 = 1002.$$

Оценивание. За полное решение 12 баллов. Если закономерность подмечена, но не доказана, то (при верном ответе) 6 баллов.

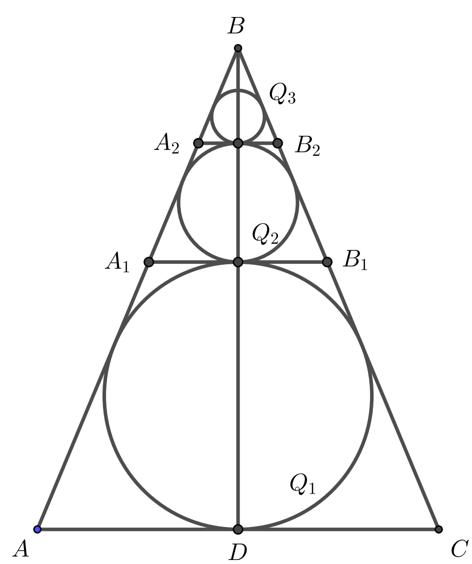
3. Дан треугольник ABC. Известны длины его сторон: $AB = BC = 78$, $AC = 60$.



Окружность Q_1 вписана в треугольник ABC. Окружность Q_2 касается Q_1 и сторон AB и BC. Окружность Q_3 касается Q_2 и также сторон AB и BC. Найдите радиус окружности Q_3.

Ответ: $\frac{320}{81}$.

Решение. Пусть r_i — радиус окружности Q_i ($i = 1, 2, 3$). Легко найти r_1.



Высота $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{78^2 - 30^2} = 72$. Отсюда

$$r_1 = \frac{S_{ABC}}{AB + AD} = 20.$$

Высота треугольника A_1BC_1, проведённая из вершины B, равна

$$BD - 2r_1 = 72 - 40 = 32.$$

Проведём общие внутренние касательные к окружностям (см. рис.). Треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC. Коэффициент подобия равен отношению высот: $k = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$. Отсюда $r_2 = kr_1 = \dfrac{80}{9}$. Треугольник A_2BC_2 подобен треугольнику A_1BC_1 с тем же коэффициентом подобия k. Поэтому $r_3 = kr_2 = \dfrac{320}{81}$.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если найден только радиус 1-й окружности, 4 балла.

4. Две вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2$, а одна из сторон на прямой $y = 2x - 22$. Какова площадь квадрата?

Ответ: 180 или 980.

Решение. Легко проверить, что парабола и прямая из условия задачи не пересекаются.

Прямая l, параллельная прямой $2x - y - 22 = 0$, задаётся уравнением вида $2x - y + b = 0$, где b — некоторая константа. Расстояние между этими прямыми $d = \dfrac{|b + 22|}{\sqrt{5}}$ (данное выражение можно получить разными способами). Найдём расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_1, y_2)$, в которых прямая l пересекает параболу $y = x^2$:

$$y = 2x + b = x^2; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + b}; \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{b + 1};$$

$$y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2) = 4\sqrt{b + 1}; \quad M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 20(b + 1).$$

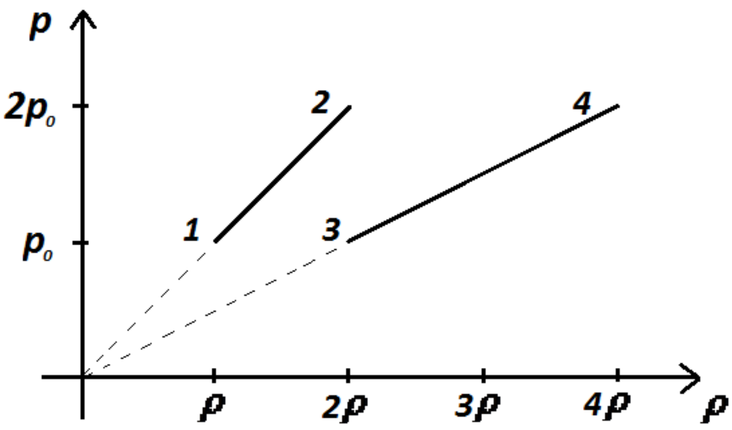
Приравняв квадраты расстояний между соседними вершинами квадрата и между его противоположными сторонами, получим уравнение относительно параметра b

$$20(b + 1) = \frac{(b + 22)^2}{5}.$$

Отсюда $b = 8$ или $b = 48$. При этом площадь квадрата $d^2 = 180$ или $d^2 = 980$.

Оценивание. За полное решение 13 баллов.

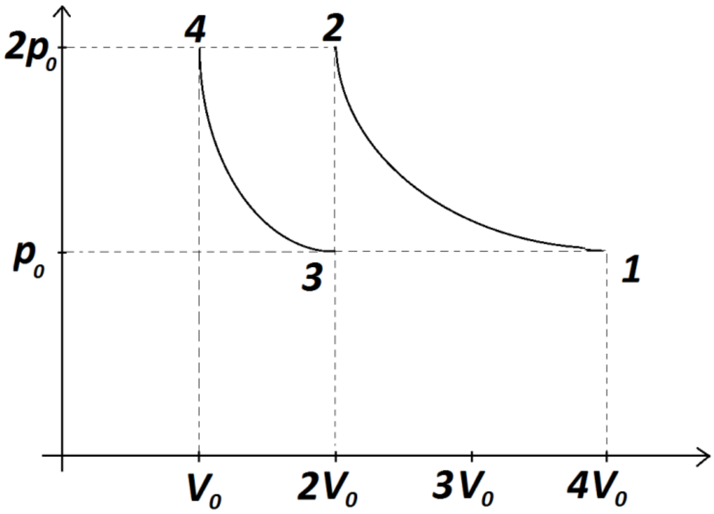
5. (*15 баллов*) На рисунке приведены зависимости давления газа от его плотности в двух проведенных процессах. Известно, что в процессе $3-4$ над газом была совершена работа A_{3-4}. Определите работу, совершаемую над газом в процессе $1-2$.



Ответ: $A_{1-2} = 2A_{3-4}$

Решение. $1-2$ и $3-4$ это изотермические процессы. **(3 балла)**

Работу в изотермическом процессе можно найти как площадь под графиком, построенном в координатах $p-V$. **(2 балла)**



(2 балла)

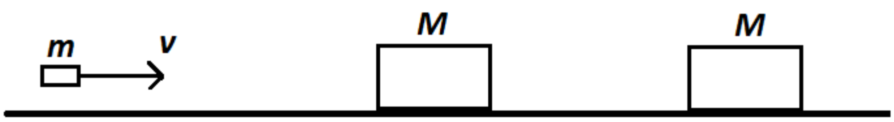
Обращает на себя внимание, что для любого значения давления объём в процессе $1-2$ ровно в два раза больше объема в процессе $3-4$. **(3 балла)**

То есть если рассматривать малое изменение объема в процессе $1-2$, то оно оказывается ровно в два раза больше малого изменения объема в процессе $3-4$, взятого при том же давлении: $\Delta V_{1-2} = 2 \cdot \Delta V_{3-4}$. **(3 балла)**

Получаем, что площадь под графиком $1-2$ ровно в два раза больше площади под графиком $3-4$. То есть $A_{1-2}=2A_{3-4}$. **(2 балла)**

Примечание. Решение задачи, в которой ученик получает ***правильный ответ***, записав уравнение $A=p\Delta V$ без анализа площадей под графиками в координатах $p-V$, оценивается как ***неправильное*****!**

6.(*10 баллов*) На горизонтальной поверхности располагаются два одинаковых небольших неподвижных бруска массами M каждый. Расстояние между ними S. В левый брусок попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля. Скорость пули перед попаданием в брусок v. Известно, что конечное расстояние между брусками было также равно S. Столкновение между брусками абсолютно упругое. Определите массу пули, если известно, что она намного меньше массы бруска. Коэффициент трения между брусками и горизонтальной поверхностью μ, ускорение свободного падения g.



Ответ: $m=\dfrac{2M}{v}\sqrt{\mu gS}$

Решение. Закон сохранения импульса для столкновения пули с левым бруском: $mv=(M+m)u=Mu$. **(2 балла)**

В случае абсолютно упругого удара между телами одинаковой массы происходит «обмен скоростями». **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для последующего движения брусков:

$$\frac{Mu^2}{2}=A_{тр}=2\mu MgS.$$ **(3 балла)**

В результате, масса пули: $m=\dfrac{2M}{v}\sqrt{\mu gS}$. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Камень массой $m=800\,г$ бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью $v_0=20\,м/с$. При наличии силы сопротивления воздуха пропорциональной скорости камня (коэффициент пропорциональности $k=0{,}2\,(Н\cdot с)/м$), максимальная высота на которой оказался камень равна $h=10\,м$. Работа силы сопротивления за этот промежуток времени равна

$A = 40$ *Дж*. Определите ускорение камня для самой высокой точки траектории. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

Ответ: $\approx 10{,}3\ \frac{м}{с^2}$

Решение. Закон сохранения энергии в данной ситуации выглядит следующим образом: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh + A.$ **(3 балла)**

В результате, находим скорость в самой верхней точке:

$$v_к = \sqrt{v_0^2 - 2gh - \frac{2A}{m}} = \sqrt{20^2 - 2\cdot 10\cdot 10 - \frac{2\cdot 40}{0{,}8}} = 10\ \frac{м}{с}.$$ **(3 балла)**

Ускорение, связанное с силой сопротивления, направлено против скорости, то есть параллельно оси *OX*, и оно равно: $a_x = \frac{F_{сопр}}{m} = \frac{kv_к}{m} = \frac{0{,}2\cdot 10}{0{,}8} = 2{,}5\ \frac{м}{с^2}$.

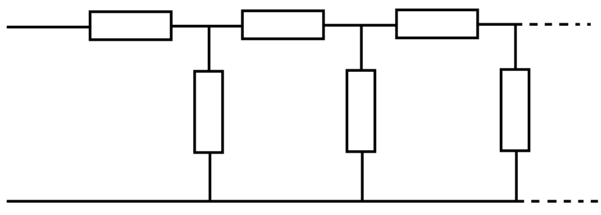
(3 балла)

Ускорение, связанное с силой тяжести, направлено вертикально вниз:

$a_y = g = 10\ м/с^2$. **(2 балла)**

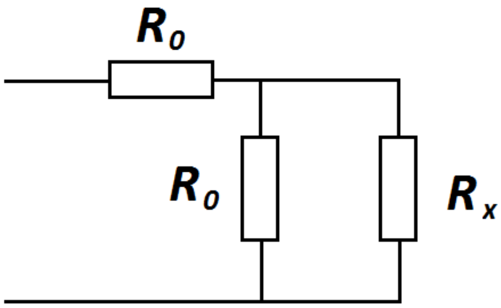
Полное ускорение: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 10^2} \approx 10{,}3\ \frac{м}{с^2}$. **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) Определите сопротивление бесконечно длинной цепи, составленной из одинаковых резисторов $R_0 = 50\ Ом$.



Ответ: $\approx 81\ Ом$

Решение. Пусть сопротивление всей цепи R_X. Тогда добавляя к R_X два резистора R_0, мы получаем следующую схему: **(4 балла)**



Её сопротивление также R_X. **(1 балл)**

В результате получаем: $R_X = R_0 + \dfrac{R_0 R_X}{R_0 + R_X}$. **(2 балла)**

Решая данное уравнение, получаем окончательный ответ: $R_X = 25 + 25\sqrt{5} \approx 81\,Ом$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

11 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Колонна пехоты растянулась на 1 км. Старшина Ким, выехав на гироскутере из конца колонны, достиг её начала и вернулся к концу. Пехотинцы прошли за это время 4/3 км. А какое расстояние за это время проехал старшина?

Ответ: 8/3 км

Решение. Пусть скорость колонны x км/ч, а старшина ехал в k раз быстрее, т. е. со скоростью kx км/ч. До конца колонны Ким ехал $t_1 = \frac{1}{kx-x}$ ч (движение вдогонку), а в обратном направлении $t_2 = \frac{1}{kx+x}$ ч (движение навстречу). За это время колонна преодолела 4/3 км, т. е. $x(t_1 + t_2) = 4/3$. Подставив выражения для t_1 и t_2, получим

$$\frac{x}{kx-x} + \frac{x}{kx+x} = 4/3; \quad \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} = 4/3; \quad 2k = \frac{4}{3}(k^2-1).$$

У полученного квадратного уравнения единственный положительный корень $k = 2$. Старшина едет в 2 раза быстрее, чем колонна. Поэтому и расстояние, которое он преодолеет, будет в 2 раза больше.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. Решите неравенство $\sqrt{9-x} - 3 \geqslant x|x-3| + \ln(1+x)$.

Ответ: $(-1; 0]$.

Решение. ОДЗ: $(-1; 9]$. Обозначим

$$f(x) = \sqrt{9-x} - 3, \quad g(x) = x|x-3| + \ln(1+x).$$

При $x = 0$ обе функции обращаются в нуль.

Пусть $-1 < x < 0$. Тогда $f(x) > 0$, а $g(x) < 0$ (оба слагаемых отрицательны). Поэтому $f(x) > g(x)$.

Если же $0 < x \leqslant 9$, то, наоборот, $f(x) < 0$, а $g(x) > 0$ (первое слагаемое неотрицательно, а второе положительно). В этом случае $f(x) < g(x)$.

Таким образом, неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ выполняется только при $x \in (-1; 0]$.

Оценивание. За полное решение 12 баллов. Если указано, что части неравенства знакопостоянны на полуосях, но неверный ответ из-за (возможно, частичного) игнорирования ОДЗ, 4 балла.

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида. Сторона основания равна 6, длина бокового ребра 5. Сфера Q_1 вписана в пирамиду. Сфера Q_2 касается Q_1 и всех боковых граней пирамиды. Найдите радиус сферы Q_2.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{7}}{49}$.

Решение. Обозначим через r_1 и r_2 соответственно радиусы сфер Q_1 и Q_2. Пусть $ABCD$ — основание пирамиды, M — вершина пирамиды, E — центр основания, F — середина CD. С помощью теоремы Пифагора найдём апофему боковой грани MF и высоту пирамиды $h_1 = ME$:

$$MF = \sqrt{MC^2 - FC^2} = 4; \quad h = \sqrt{MF^2 - EF^2} = \sqrt{7}.$$

Теперь вычислим объём пирамиды V и её полную поверхность S:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h_1 = 12\sqrt{7}; \quad S = S_{ABCD} + 4S_{MCD} = 36 + 4 \cdot 12 = 84.$$

По известной формуле определим радиус вписанной сферы:

$$r_1 = \frac{3V}{S} = \frac{36\sqrt{7}}{84} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Проведём касательную плоскость к сфере Q_1, параллельную основанию пирамиды. Она отсечёт от неё пирамиду $T = A_1B_1C_1D_1M$. Очевидно, сфера Q_2 вписана в эту пирамиду. Легко найти высоту отсечённой пирамиды: $h_2 = h_1 - 2r_1 = \frac{\sqrt{7}}{7}$. Пирамида T подобна исходной с коэффициентом $k = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{7}$. В таком же отношении находятся и радиусы их вписанных сфер. Поэтому $r_2 = kr_1 = \frac{3\sqrt{7}}{49}$.

Оценивание. За полное решение 12 баллов. Если найден только радиус 1-й сферы, 4 балла.

4. По кругу записаны 2019 чисел. Для любых двух соседних чисел x и y выполняются неравенства $|x - y| \geqslant 2$, $x + y \geqslant 6$. Найдите наименьшую возможную сумму записанных чисел.

Ответ: 6060.

Решение. Из-за нечётности общего количества чисел найдутся три подряд стоящих числа x, y и z таких, что $x > y > z$. Сложив неравенства $y - z \geqslant 2$ и $y + z \geqslant 6$, получим $y \geqslant 4$. Тогда $x \geqslant y + 2 \geqslant 6$. Нашлось число, не меньшее 6. Остальные числа разбиваются на 1009 пар соседних чисел. Поэтому сумма всех чисел $S \geqslant 6 + 1009 \cdot 6 = 6060$.

Полученная оценка снизу для S достигается, если одно из чисел равно 6, а далее, по кругу, чередуясь, стоят числа 4 и 2.

Оценивание. За полное решение 14 баллов. За пример без оценки 5 баллов, за оценку без примера 7 баллов.

5. (*10 баллов*) Небольшая вагонетка с реактивным двигателем стоит на рельсах. Рельсы уложены в форме окружности радиусом R. Вагонетка стартует с места, при этом реактивная сила имеет постоянное значение. До какой максимальной скорости вагонетка разгонится за один полный круг, если её ускорение за этот промежуток времени не должно превысить значение a?

Ответ: $v_{\max} = \sqrt[4]{\frac{16a^2R^2\pi^2}{(1+16\pi^2)}}$

Решение. Ускорение разгона вагонетки: $a_1 = \dfrac{v^2}{2s} = \dfrac{v^2}{4\pi R}$. **(3 балла)**

Кроме того, у вагонетки присутствует центростремительное ускорение:

$a_2 = \dfrac{v^2}{R}$. **(1 балл)**

Полное ускорение вагонетки: $a^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\frac{v^2}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2$. **(3 балла)**

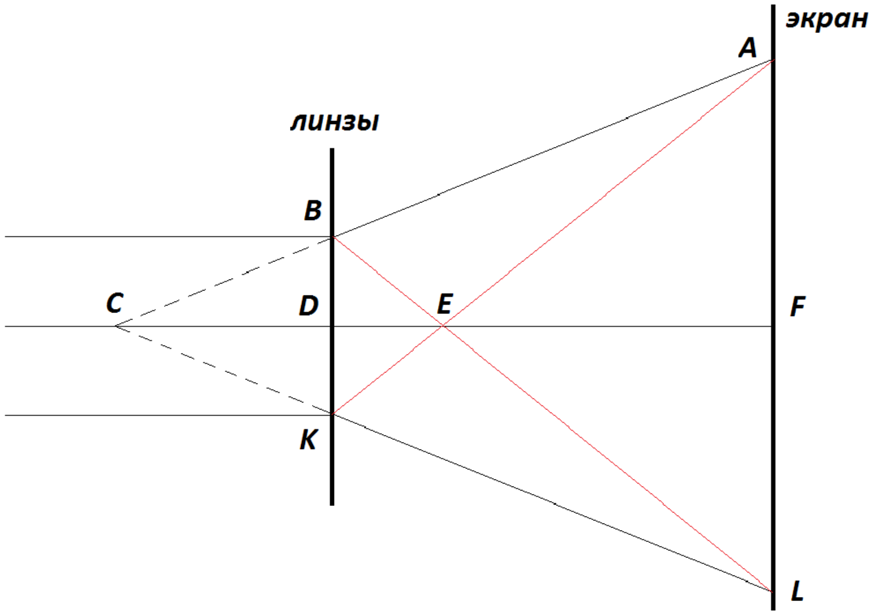
Получаем, что конечная скорость вагонетки не может быть больше чем:

$v_{\max} = \sqrt[4]{\frac{16a^2R^2\pi^2}{(1+16\pi^2)}}$. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) На тонкую рассеивающую линзу, оптическая сила которой $D_p = -6$ *Дптр*, падает пучок света диаметром $d_1 = 10$ *см*. На экране расположенном параллельно линзе наблюдается светлое пятно диаметром $d_2 = 20$ *см*. После замены тонкой рассеивающей линзы на тонкую собирающую линзу размер пятна на экране не изменился. Определите оптическую силу D_c собирающей линзы.

Ответ: 18 *Дптр*

Решение. Оптическая схема, соответствующая условию: **(3 балла)**



Чёрным цветом изображается ход лучей после рассеивающей линзы, красным – после собирающей. Имеем $CD = \left|\frac{1}{D_p}\right| = \frac{1}{6}$. **(1 балл)**

Из подобия треугольников следует, что: $\frac{CD}{CF} = \frac{BK}{AL} = \frac{1}{2}$, **(1 балл)**

тогда получаем $DF = CF - CD = 2CD - CD = CD = \frac{1}{6}$. **(1 балл)**

Из подобия треугольников следует, что: $\frac{DE}{FE} = \frac{BK}{AL}$. **(1 балл)**

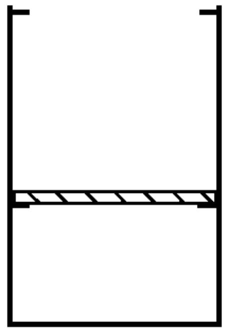
Получаем, что: $DE = \frac{1}{3}DF = \frac{1}{18}$. **(1 балл)**

В результате оптическая сила собирающей линзы:

$$D_c = \frac{1}{DE} = 18\ \text{Дптр}.$$ **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Внутри цилиндра располагаются две пары одинаковых упоров. Расстояние между нижними упорами и дном $l_1 = 10\ см$, между нижними и верхними упорами $l_2 = 15\ см$. На нижних упорах лежит поршень с максимально возможной массой $M = 10\ кг$, которую они способны выдержать. Площадь основания цилиндра $S = 10\ см^2$. Какое минимальное количество теплоты Q следует передать одноатомному идеальному газу под поршнем, для того чтобы поршень мог выскочить из цилиндра? Количество газа под поршнем $\nu = 1\ моль$, его начальное давление равно атмосферному

$p_0 = 10^5$ *Па*. Толщиной поршня пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ *м/с²*.



Ответ: 127,5 *Дж*

Решение. В ходе передачи газу теплоты можно выделить три этапа.

Во-первых, изохорное повышение давления до значения, позволяющего сдвинуть поршень с места: $p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S}$. **(2 балла)**

Количество теплоты, полученное газом в ходе этого этапа:

$$Q_1 = \Delta U_1 = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}V\Delta p = \frac{3}{2}l_1 S\frac{Mg}{S} = \frac{3}{2}Mgl_1 = 15\ Дж.$$ **(3 балла)**

Второй этап – это изобарное увеличение объёма газа, в ходе которого поршень перемещается к верхним упорам.

Количество теплоты, полученное газом в ходе этого этапа:

$$Q_2 = \Delta U_2 + A_2 = \frac{5}{2}p_1\Delta V = \frac{5}{2}\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)Sl_2 = 75\ Дж.$$ **(3 балла)**

Третий этап – это изохорное увеличение давления до значения, которое позволит выломать верхний упор: $p_2 = p_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{Mg}{S}$. **(2 балла)**

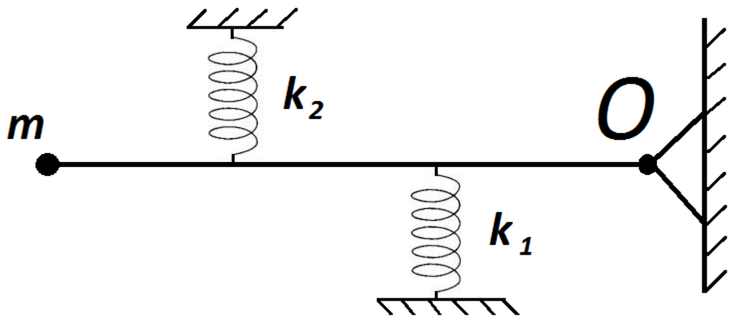
Количество теплоты, полученное газом в ходе этого этапа:

$$Q_3 = \Delta U_3 = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}V\Delta p = \frac{3}{2}(l_1 + l_2)S\frac{Mg}{S} = \frac{3}{2}Mg(l_1 + l_2) = 37{,}5\ Дж.$$

(3 балла)

Окончательный ответ: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 15 + 75 + 37{,}5 = 127{,}5\ Дж.$ **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Конструкция из жёстко соединенных лёгкого стержня и небольшого груза массой $m = 1\,кг$ может совершать колебания под действием двух пружин с жёсткостями $k_1 = 60\,\frac{Н}{м}$ и $k_2 = 10\,\frac{Н}{м}$, двигаясь при вращении без трения вокруг вертикальной оси O по гладкой горизонтальной поверхности стола. Пружины лёгкие, их оси горизонтальны, а точки прикрепления к стержню делят его на три равные части. В положении равновесия пружины не деформированы. Найдите период малых колебаний конструкции.



Ответ: $\approx 1{,}9\,с$

Решение. Отклоним стержень из положения равновесия на малый угол α. В этом положении полная механическая энергия системы:

$$\frac{k_1x_1^2}{2} + \frac{k_2x_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const,$$ **(3 балла)**

где $x_1 = \alpha\frac{l}{3}$, $x_2 = \alpha\frac{2l}{3}$, $v = \omega l$. **(2 балла)**

Продифференцируем по времени закон сохранения полной механической энергии: $\frac{k_1}{2}\cdot\frac{l^2}{9}\cdot 2\alpha\cdot\omega + \frac{k_2}{2}\cdot\frac{4l^2}{9}\cdot 2\alpha\cdot\omega + \frac{m}{2}\cdot l^2\cdot 2\omega\cdot\varepsilon = 0,$ **(4 балла)**

$$\frac{k_1 + 4k_2}{9m}\cdot\alpha + \varepsilon = 0.$$ **(1 балл)**

В результате, получаем, что циклическая частота колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{9m}}.$$ **(3 балла)**

Период колебаний конструкции: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + 4k_2}} = 0{,}6\pi \approx 1{,}9\,с$. **(2 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

11 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Колонна пехоты растянулась на 1 км. Старшина Ким, выехав на гироскутере из конца колонны, достиг её начала и вернулся к концу. Пехотинцы прошли за это время 2 км 400 м. А какое расстояние за это время проехал старшина?

Ответ: 3 км 600 м

Решение. Пусть скорость колонны x км/ч, а старшина ехал в k раз быстрее, т. е. со скоростью kx км/ч. До конца колонны Ким ехал $t_1 = \frac{1}{kx-x}$ ч (движение вдогонку), а в обратном направлении $t_2 = \frac{1}{kx+x}$ ч (движение навстречу). За это время колонна преодолела 2,4 км, т. е. $x(t_1 + t_2) = 2{,}4$. Подставив выражения для t_1 и t_2, получим

$$\frac{x}{kx-x} + \frac{x}{kx+x} = 2{,}4; \quad \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} = 2{,}4; \quad 2k = 2{,}4(k^2-1).$$

У полученного квадратного уравнения единственный положительный корень $k = \frac{3}{2}$. Старшина едет в 1,5 раза быстрее, чем колонна. Поэтому и расстояние, которое он преодолеет, будет в 1,5 раза больше.

Оценивание. За полное решение 12 баллов.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4-x} - 2 \leqslant x|x-3| + \operatorname{arctg} x.$$

Ответ: $[0; 4]$.

Решение. ОДЗ: $(-\infty; 4]$. Обозначим

$$f(x) = \sqrt{4-x} - 2, \quad g(x) = x|x-3| + \operatorname{arctg} x.$$

При $x = 0$ обе функции обращаются в нуль.

Пусть $x < 0$. Тогда $f(x) > 0$, а $g(x) < 0$ (оба слагаемых отрицательны). Поэтому $f(x) > g(x)$.

Если же $0 < x \leqslant 4$, то, наоборот, $f(x) < 0$, а $g(x) > 0$ (первое слагаемое неотрицательно, а второе положительно). В этом случае $f(x) < g(x)$.

Таким образом, неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ выполняется только при $x \in [0; 4]$.

Оценивание. За полное решение 12 баллов. Если указано, что части неравенства знакопостоянны на полуосях, но неверный ответ из-за (возможно, частичного) игнорирования ОДЗ, 4 балла.

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида. Сторона основания равна 12, длина бокового ребра 10. Сфера Q_1 вписана в пирамиду. Сфера Q_2 касается Q_1 и всех боковых граней пирамиды. Найдите радиус сферы Q_2.

Ответ: $\dfrac{6\sqrt{7}}{49}$.

Решение. Обозначим через r_1 и r_2 соответственно радиусы сфер Q_1 и Q_2. Пусть $ABCD$ — основание пирамиды, M — вершина пирамиды, E — центр основания, F — середина CD. С помощью теоремы Пифагора найдём апофему боковой грани MF и высоту пирамиды $h_1 = ME$:

$$MF = \sqrt{MC^2 - FC^2} = 8; \quad h = \sqrt{MF^2 - EF^2} = 2\sqrt{7}.$$

Теперь вычислим объём пирамиды V и её полную поверхность S:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h_1 = 96\sqrt{7}; \quad S = S_{ABCD} + 4S_{MCD} = 144 + 4 \cdot 48 = 336.$$

По известной формуле определим радиус вписанной сферы:

$$r_1 = \frac{3V}{S} = \frac{288\sqrt{7}}{336} = \frac{6\sqrt{7}}{7}.$$

Проведём касательную плоскость к сфере Q_1, параллельную основанию пирамиды. Она отсечёт от неё пирамиду $T = A_1B_1C_1D_1M$. Очевидно, сфера Q_2 вписана в эту пирамиду. Легко найти высоту отсечённой пирамиды: $h_2 = h_1 - 2r_1 = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. Пирамида T подобна исходной с коэффициентом $k = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{7}$. В таком же отношении находятся и радиусы их вписанных сфер. Поэтому $r_2 = kr_1 = \frac{6\sqrt{7}}{49}$.

Оценивание. За полное решение 12 баллов. Если найден только радиус 1-й сферы, 4 балла.

4. По кругу записаны 1001 чисел. Для любых двух соседних чисел x и y выполняются неравенства $|x - y| \geqslant 4$, $x + y \geqslant 6$. Найдите наименьшую возможную сумму записанных чисел.

Ответ: 3009.

Решение. Из-за нечётности общего количества чисел найдутся три подряд стоящих числа x, y и z таких, что $x > y > z$. Сложив неравенства $y - z \geqslant 4$ и $y + z \geqslant 6$, получим $y \geqslant 5$. Тогда $x \geqslant y + 4 \geqslant 9$. Нашлось число, не меньшее 9. Остальные числа разбиваются на 500 пар соседних чисел. Поэтому сумма всех чисел $S \geqslant 9 + 500 \cdot 6 = 3009$.

Полученная оценка снизу для S достигается, если одно из чисел равно 9, а далее, по кругу, чередуясь, стоят числа 5 и 1.

Оценивание. За полное решение 14 баллов. За пример без оценки 5 баллов, за оценку без примера 7 баллов.

5. (*10 баллов*) Небольшая вагонетка с реактивным двигателем стоит на рельсах. Рельсы уложены в форме окружности радиусом R. Вагонетка стартует с места, при этом реактивная сила имеет постоянное значение. До какой максимальной скорости вагонетка разгонится за один полный круг, если её ускорение за этот промежуток времени не должно превысить значение a?

Ответ: $v_{\max} = \sqrt[4]{\frac{16a^2R^2\pi^2}{(1+16\pi^2)}}$

Решение. Ускорение разгона вагонетки: $a_1 = \frac{v^2}{2s} = \frac{v^2}{4\pi R}$. **(3 балла)**

Кроме того, у вагонетки присутствует центростремительное ускорение:

$$a_2 = \frac{v^2}{R}.$$ **(1 балл)**

Полное ускорение вагонетки: $a^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\frac{v^2}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2$. **(3 балла)**

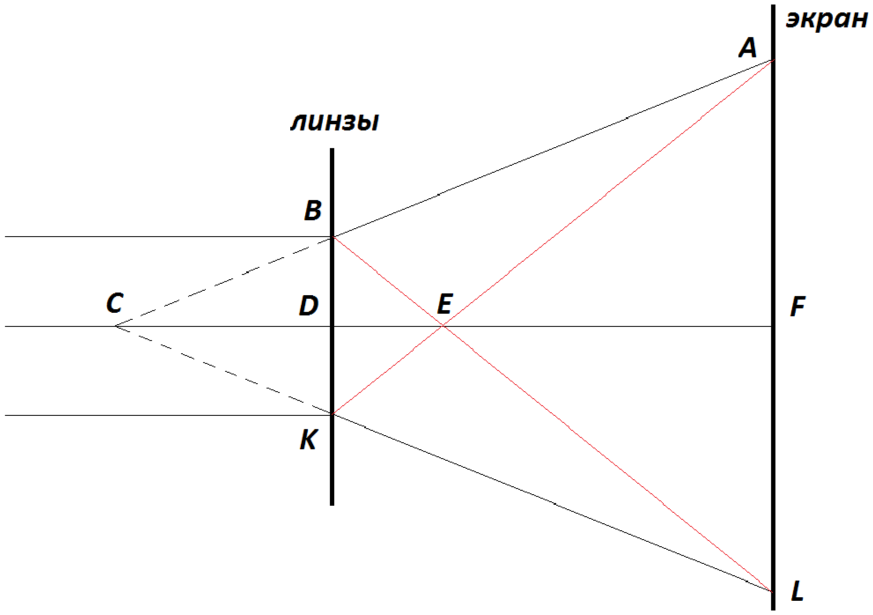
Получаем, что конечная скорость вагонетки не может быть больше чем:

$$v_{\max} = \sqrt[4]{\frac{16a^2R^2\pi^2}{(1+16\pi^2)}}.$$ **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) На тонкую рассеивающую линзу, оптическая сила которой $D_p = -6$ *Дптр*, падает пучок света диаметром $d_1 = 5$ *см*. На экране расположенном параллельно линзе наблюдается светлое пятно диаметром $d_2 = 20$ *см*. После замены тонкой рассеивающей линзы на тонкую собирающую линзу размер пятна на экране не изменился. Определите оптическую силу D_c собирающей линзы.

Ответ: 10 *Дптр*

Решение. Оптическая схема, соответствующая условию: **(3 балла)**



Чёрным цветом изображается ход лучей после рассеивающей линзы, красным – после собирающей. Имеем $CD = \left|\frac{1}{D_p}\right| = \frac{1}{6}$. **(1 балл)**

Из подобия треугольников следует, что: $\frac{CD}{CF} = \frac{BK}{AL} = \frac{1}{4}$, **(1 балл)**

тогда $DF = CF - CD = 4CD - CD = 3CD = \frac{1}{2}$. **(1 балл)**

Из подобия треугольников следует, что: $\frac{DE}{FE} = \frac{BK}{AL}$. **(1 балл)**

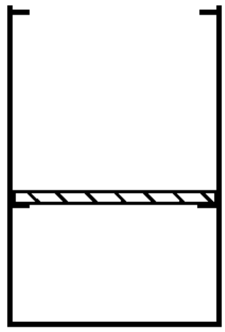
Получаем, что: $DE = \frac{1}{5}DF = \frac{1}{10}$. **(1 балл)**

В результате оптическая сила собирающей линзы: $D_c = \frac{1}{DE} = 10\ Дптр$.

(2 балла)

7. (*15 баллов*) Внутри цилиндра располагаются две пары одинаковых упоров. Расстояние между нижними упорами и дном $l_1 = 20\ см$, между нижними и верхними упорами $l_2 = 25\ см$. На нижних упорах лежит поршень с максимально возможной массой $M = 10\ кг$, которую они способны выдержать. Площадь основания цилиндра $S = 10\ см^2$. Какое минимальное количество теплоты Q следует передать двухатомному идеальному газу под поршнем, для того чтобы поршень мог выскочить из цилиндра? Количество газа под поршнем $\nu = 1\ моль$, его начальное давление равно атмосферному

$p_0 = 10^5$ *Па*. Толщиной поршня пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ *м/с*^{2}.



Ответ: 337,5 *Дж*

Решение. В ходе передачи газу теплоты можно выделить три этапа.

Во-первых, изохорное повышение давления до значения, позволяющего сдвинуть поршень с места: $p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S}$. **(2 балла)**

Количество теплоты, полученное газом в ходе этого этапа:

$$Q_1 = \Delta U_1 = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = \frac{5}{2}V\Delta p = \frac{5}{2}l_1 S\frac{Mg}{S} = \frac{5}{2}Mgl_1 = 50 \text{ Дж}.$$ **(3 балла)**

Второй этап – это изобарное увеличение объёма газа, в ходе которого поршень перемещается к верхним упорам.

Количество теплоты, полученное газом в ходе этого этапа:

$$Q_2 = \Delta U_2 + A_2 = \frac{7}{2}p_1\Delta V = \frac{7}{2}\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)Sl_2 = 175 \text{ Дж}.$$ **(3 балла)**

Третий этап – это изохорное увеличение давления до значения, которое позволит выломать верхний упор: $p_2 = p_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{Mg}{S}$. **(2 балла)**

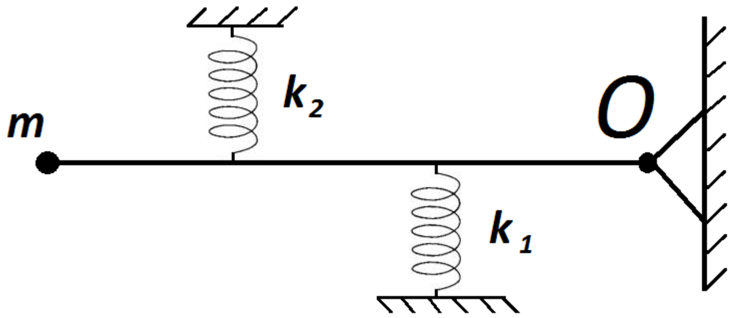
Количество теплоты, полученное газом в ходе этого этапа:

$$Q_3 = \Delta U_3 = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = \frac{5}{2}V\Delta p = \frac{5}{2}(l_1 + l_2)S\frac{Mg}{S} = \frac{5}{2}Mg(l_1 + l_2) = 112{,}5 \text{ Дж}.$$

(3 балла)

Окончательный ответ: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 50 + 175 + 112{,}5 = 337{,}5$ *Дж*. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Конструкция из жёстко соединенных лёгкого стержня и небольшого груза массой $m = 1{,}6\,кг$ может совершать колебания под действием двух пружин с жёсткостями $k_1 = 10\,\frac{Н}{м}$ и $k_2 = 7{,}5\,\frac{Н}{м}$, двигаясь при вращении без трения вокруг вертикальной оси O по гладкой горизонтальной поверхности стола. Пружины лёгкие, их оси горизонтальны, а точки прикрепления к стержню делят его на три равные части. В положении равновесия пружины не деформированы. Найдите период малых колебаний конструкции.



Ответ: $\approx 3{,}8\,с$

Решение. Отклоним стержень из положения равновесия на малый угол α. В этом положении полная механическая энергия системы:

$$\frac{k_1x_1^2}{2} + \frac{k_2x_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = const,$$ **(3 балла)**

где $x_1 = \alpha\frac{l}{3}$, $x_2 = \alpha\frac{2l}{3}$, $v = \omega l$. **(2 балл)**

Продифференцируем по времени закон сохранения полной механической энергии: $\frac{k_1}{2}\cdot\frac{l^2}{9}\cdot 2\alpha\cdot\omega + \frac{k_2}{2}\cdot\frac{4l^2}{9}\cdot 2\alpha\cdot\omega + \frac{m}{2}\cdot l^2\cdot 2\omega\cdot\varepsilon = 0,$ **(4 балла)**

$$\frac{k_1 + 4k_2}{9m}\cdot\alpha + \varepsilon = 0.$$ **(1 балл)**

В результате, получаем, что циклическая частота колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{9m}}.$$ **(3 балла)**

Период колебаний конструкции: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + 4k_2}} = 1{,}2\pi \approx 3{,}8\,с$.**(2 балла)**