Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

6 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Полная бочка с квасом весит 54 кг, а бочка, заполненная наполовину, весит 32 кг. Сколько будет весить бочка, если её заполнить квасом на четверть?

Ответ: 21 кг.

Решение. Квас объёмом в половину бочки весит $54 - 32 = 22$ кг. Значит, квас объёмом в четверть бочки весит $22 : 2 = 11$ кг. Поэтому бочка, заполненная на четверть, будет на 11 кг легче, чем бочка, заполненная наполовину, т. е. $32 - 11 = 21$ кг. Кстати, как следует из предыдущих рассуждений, сама пустая бочка весит 10 кг.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. В 2052 г. в марте воскресений больше, чем понедельников. На какой день недели выпадет 1 июня 2052 г.?

Ответ: на субботу.

Решение. За воскресеньем идёт понедельник. Если в каком-то месяце воскресений оказалось больше, чем понедельников, то последний день месяца — воскресенье. Итак, 31 марта 2052 г. — воскресенье. Воскресенье выпадает также на 28 апреля и 26 мая, а 1 июня будет суббота.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если определено, что 31 марта 2052 г. — воскресенье, но ошибка в дальнейших выкладках, 5 баллов.

3. Имеется 9 гирек весом 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 грамм. Можно ли их разложить в три коробочки так, чтобы в первой было четыре гирьки, во второй — три, а в третьей — две, но при этом суммарный вес гирек во всех коробочках был одинаковым?

Ответ: можно.

Решение. Можно в 3-ю коробочку положить гирьки весом 9 и 6 г, во 2-ю — 8, 5 и 2 г, в 1-ю — 7, 4, 3, 1 г.

Оценивание. За верный пример 12 б. Если найден лишь суммарный вес гирек в одной коробочке, 4 б.

4. В избирательном округе проживает 100 избирателей. Среди них некоторые всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. На выборах в городскую думу каждый из них проголосовал за одного из четырёх кандидатов (A, B, C или D). По выходу из участка для голосования 4 социологические службы, представлявшие всех кандидатов, спросили каждого избирателя, голосовал ли он за их кандидата. Службы от кандидатов A, B и C получили соответственно 35, 45 и 50 ответов «да», а вот служба от D слышала только отрицательные ответы. Сколько голосов в этом округе на самом деле получили кандидаты?

Ответ: 20, 30, 35, 15.

Решение. По результатам экзитпола кандидат D получил 0 голосов. Это означает, что за D не голосовал никто из рыцарей, а за других кандидатов никто из лжецов. Голосующий рыцарь даёт один ответ «да», а голосующий лжец — три ответа «да». Значит, каждый лжец увеличивает общее число ответов «да» на 2. Поскольку общее число ответов «да» превышает число голосовавших на 30, всего было 15 лжецов, и все они голосовали за D и добавили по 15 утвердительных ответов в экзитполах, которые проводили представители других кандидатов. Отсюда ответ.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*15 баллов*) Чтобы проехать от склада до магазина по расписанию, грузовик с товаром должен развивать среднюю скорость 60 км/ч. Но из-за пробок и плохой дороги на первой половине пути грузовику удавалось развивать скорость только 50 км/ч. С какой скоростью необходимо проехать вторую половину пути, чтобы вовремя привезти товар?

Ответ: 75 км/ч.

Решение. Если S – расстояние от склада до магазина, то общее время движения: $t = \frac{S}{60}$. **(3 балла)**

В реальности, первая половина пройдена за $t_1 = \frac{S}{2} : 50 = \frac{S}{100}$, **(3 балла)**

а вторая половина пути за $t_2 = \frac{S}{2} : v = \frac{S}{2v}$. **(3 балла)**

По условию: $t = t_1 + t_2$, **(1 балл)**

то есть $\frac{S}{60} = \frac{S}{100} + \frac{S}{2v}$.
(2 балла)

В результате: v=75 км/ч. **(3 балла)**

6. (*20 баллов*) Расстояние между точками A и B равно S=4000 м. Из точки O, располагающейся ровно посередине между точками A и B, начинают двигаться два тела. Первое тело со скоростью v_1 едет в сторону точки A, второе тело со скоростью v_2=1,5v_1 едет в сторону точки B. Каждое из тел, доехав до соответствующей точки, меняет направление своего движения на противоположное. На каком расстоянии от точки O, тела встретятся в первый раз после начала движения?

Ответ: 800 м.

Решение. К моменту встречи суммарное расстояние, пройденное телами, равно $S_{сум} = 2S = 8000\,км$. **(4 балла)**

Так как расстояние, проходимое каждым из тел пропорционально его скорости, то $S_2 = 1{,}5S_1$. **(4 балла)**

Получаем, что $S_1 + S_2 = 2{,}5S_1 = S_{сум} = 8000\,м$. **(4 балла)**

В результате, первое тело пройдет $S_1 = 3200\,м$. **(4 балла)**

Получаем, что тела встретятся на расстоянии $x = 4000 - 3200 = 800\,м$ от точки О. **(4 балла)**

7. (*15 баллов*) При нагреве воды на электроплите изменение температуры ΔT прямо пропорционально времени нагрева, мощности плитки и обратно пропорционально её массе. Если время нагрева увеличить на 50%, мощность плитки увеличить на 25% и массу воды уменьшить на 50%, то на сколько процентов будет отличаться изменение температуры воды по сравнению с первоначальной ситуацией. Считайте, что температура кипения не достигается в обоих случаях.

Ответ: больше на 275%

Решение. По условию $\Delta T = \frac{cPt}{m}$, где c=const. **(5 баллов)**

Во втором случае: $\Delta T_2 = \frac{c \cdot 1{,}25P \cdot 1{,}5t}{0{,}5m} = 3{,}75\frac{cPt}{m} = 3{,}75\Delta T$. **(5 баллов)**

То есть изменение температуры во втором случае будет больше на 275%.
(5 баллов)

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

6 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Полная бочка с квасом весит 52 кг, а бочка, заполненная наполовину, весит 30 кг. Сколько будет весить бочка, если её заполнить квасом на четверть?

Ответ: 19 кг.

Решение. Квас объёмом в половину бочки весит $52 - 30 = 22$ кг. Значит, квас объёмом в четверть бочки весит $22 : 2 = 11$ кг. Поэтому бочка, заполненная на четверть, будет на 11 кг легче, чем бочка, заполненная наполовину, т. е. $30 - 11 = 19$ кг. Кстати, как следует из предыдущих рассуждений, сама пустая бочка весит 8 кг.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. В 2053 г. в марте понедельников больше, чем вторников. На какой день недели выпадет 1 июня 2053 г.?

Ответ: на воскресенье.

Решение. За понедельником идёт вторник. Если в каком-то месяце понедельников оказалось больше, чем вторников, то последний день месяца — понедельник. Итак, 31 марта 2053 г. — понедельник. Понедельник выпадает также на 28 апреля и 26 мая, а 1 июня будет воскресенье.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если определено, что 31 марта 2052 г. — воскресенье, но ошибка в дальнейших выкладках, 5 баллов.

3. Имеется 12 гирек весом 1, 2, 3, $\ldots$, 12 грамм. Можно ли их разложить в три коробочки так, чтобы в первой было пять гирек, второй — четыре, а в третьей — три, но при этом суммарный вес гирек во всех коробочках был одинаковым?

Ответ: можно.

Решение. Можно в 3-ю коробочку положить гирьки весом 12, 11 и 3 г, во 2-ю — 10, 9, 6 и 1 г, в 1-ю — 2, 4, 5, 7, 8 г.

Оценивание. За верный пример 12 б. Если найден лишь суммарный вес гирек в одной коробочке, 4 б.

4. В избирательном округе проживает 100 избирателей. Среди них некоторые всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. На выборах в городскую думу каждый из них проголосовал за одного из четырёх кандидатов (A, B, C или D). По выходу из участка для голосования 4 социологические службы, представлявшие всех кандидатов, спросили каждого избирателя, голосовал ли он за их кандидата. Службы от кандидатов A, B и C получили соответственно 30, 50 и 60 ответов «да», а вот служба от D слышала только отрицательные ответы. Сколько голосов в этом округе на самом деле получили кандидаты?

Ответ: 10, 30, 40, 20.

Решение. По результатам экзитпола кандидат D получил 0 голосов. Это означает, что за D не голосовал никто из рыцарей, а за других кандидатов никто из лжецов. Голосующий рыцарь даёт один ответ «да», а голосующий лжец — три ответа «да». Значит, каждый лжец увеличивает общее число ответов «да» на 2. Поскольку общее число ответов «да» превышает число голосовавших на 40, всего было 20 лжецов, и все они голосовали за D и добавили по 20 утвердительных ответов в экзитполах, которые проводили представители других кандидатов. Отсюда ответ.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*15 баллов*) Чтобы проехать от склада до магазина по расписанию, грузовик с товаром должен развивать среднюю скорость 70 км/ч. Но из-за пробок и плохой дороги на первой половине пути грузовику удавалось развивать скорость только 60 км/ч. С какой постоянной скоростью необходимо проехать вторую половину пути, чтобы вовремя привезти товар?

Ответ: 84 км/ч.

Решение. Если S – расстояние от склада до магазина, то общее время движения: $t = \frac{S}{70}$. **(3 балла)**

В реальности, первая половина пройдена за $t_1 = \frac{S}{2} : 60 = \frac{S}{120}$, **(3 балла)**

а вторая половина пути за $t_2 = \frac{S}{2} : v = \frac{S}{2v}$. **(3 балла)**

По условию: $t = t_1 + t_2$, **(1 балл)**

То есть $\frac{S}{70} = \frac{S}{120} + \frac{S}{2v}$.
(2 балла)

В результате: v=84 км/ч. **(3 балла)**

6. (*20 баллов*) Расстояние между точками A и B равно S=6000 м. Из точки O, располагающейся ровно посередине между точками A и B, начинают двигаться два тела. Первое тело со скоростью v_1 едет в сторону точки A, второе тело со скоростью v_2=2v_1 едет в сторону точки B. Каждое из тел, доехав до соответствующей точки, меняет направление своего движения на противоположное. На каком расстоянии от точки O, тела встретятся в первый раз после начала движения?

Ответ: 2000 м.

Решение. К моменту встречи суммарное расстояние, пройденное телами, равно $S_{\text{сум}} = 2S = 12000$ км. **(4 балла)**

Так как расстояние, проходимое каждым из тел пропорционально его скорости, то $S_2 = 2S_1$. **(4 балла)**

Получаем, что: $S_1 + S_2 = 3S_1 = S_{\text{сум}} = 12000$ м. **(4 балла)**

В результате, первое тело пройдет $S_1 = 4000$ м. **(4 балла)**

Получаем, что тела встретятся на расстоянии $x = 6000 - 4000 = 2000$ м от точки O. **(4 балла)**

7. (*15 баллов*) При нагреве воды на электроплите изменение температуры ΔT прямо пропорционально времени нагрева, мощности плитки и обратно пропорционально её массе. Если время нагрева уменьшить на 50%, мощность плитки увеличить на 50% и массу воды уменьшить на 20%, то на сколько процентов будет отличаться изменение температуры воды по сравнению с первоначальной ситуацией? Считайте, что температура кипения не достигается в обоих случаях.

Ответ: меньше на 6,25%.

Решение. По условию: $\Delta T = \frac{cPt}{m}$, где c=const. **(5 баллов)**

Во втором случае: $\Delta T_2 = \frac{c \cdot 1{,}5P \cdot 0{,}5t}{0{,}80m} = 0{,}9375\frac{cPt}{m} = 0{,}9375\Delta T$. **(5 баллов)**

То есть изменение температуры во втором случае будет меньше на 6,25%.
(5 баллов)

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

7 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. В 2052 г. в марте воскресений больше, чем понедельников. На какой день недели выпадет 1 июня 2052 г.?

Ответ: на субботу.

Решение. За воскресеньем идёт понедельник. Если в каком-то месяце воскресений оказалось больше, чем понедельников, то последний день месяца — воскресенье. Итак, 31 марта 2052 г. — воскресенье. Воскресенье выпадает также на 28 апреля и 26 мая, а 1 июня будет суббота.

Оценивание. За верное решение 11 баллов. Если определено, что 31 марта 2052 г. — воскресенье, но ошибка в дальнейших выкладках, 5 баллов.

2. Имеется 9 гирек весом 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 грамм. Можно ли их разложить в три коробочки так, чтобы в первой было четыре гирьки, во второй — три, а в третьей — две, но при этом суммарный вес гирек во всех коробочках был одинаковым?

Ответ: можно.

Решение. Можно в 3-ю коробочку положить гирьки весом 9 и 6 г, во 2-ю — 8, 5 и 2 г, в 1-ю — 7, 4, 3, 1 г.

Оценивание. За верный пример 11 б. Если найден лишь суммарный вес гирек в одной коробочке, 4 б.

3. В избирательном округе проживает 100 избирателей. Среди них некоторые всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. На выборах в городскую думу каждый из них проголосовал за одного из четырёх кандидатов (A, B, C или D). По выходу из участка для голосования 4 социологические службы, представлявшие всех кандидатов, спросили каждого избирателя, голосовал ли он за их кандидата. Службы от кандидатов A, B и C получили соответственно 35, 45 и 50 ответов «да», а вот служба от D слышала только отрицательные ответы. Сколько голосов в этом округе на самом деле получили кандидаты?

Ответ: 20, 30, 35, 15.

Решение. По результатам экзитпола кандидат D получил 0 голосов. Это означает, что за D не голосовал никто из рыцарей, а за других кандидатов никто из лжецов. Голосующий рыцарь даёт один ответ «да», а голосующий лжец — три ответа «да». Значит, каждый лжец увеличивает общее число ответов «да» на 2. Поскольку общее число ответов «да» превышает число голосовавших на 30, всего было 15 лжецов, и все они голосовали за D и добавили по 15 утвердительных ответов в экзитполах, которые проводили представители других кандидатов. Отсюда ответ.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. Турагенство имеет автобусы, рассчитанные на 10, 23, 36 и 49 туристов (автобусов каждого типа не меньше ста). Из жадности владелец агенства выпускает в рейс только полностью заполненные автобусы. Сможет ли он отправить на отдых 2700 туристов, использовав ровно 100 автобусов?

Ответ: нет.

Решение. Пусть сможет, и при этом он использует x автобусов с 10 туристами, y автобусов с 23 туристами, z с 36 и t с 49. Тогда

$$10x + 23y + 36z + 49t = 10(x + y + z + t) + 13(y + 2z + 3t) = 2700.$$

Учитывая, что общее число автобусов 100, получаем $13(y + 2z + 3t) = 1700$. В последнем равенстве левая часть делится на 13, а правая — нет.

Оценивание. За верное решение 14 б.

5. (*20 баллов*) Грузовой автомобиль проезжает расстояние между двумя городами за 1 час, а легковой автомобиль проезжает то же самое расстояние за 40 минут. Через сколько времени они встретятся, если выедут навстречу друг другу?

Ответ: 24 мин.

Решение. Скорость грузового автомобиля: $v_г = \frac{S}{60}$. **(5 баллов)**

Скорость легкового автомобиля: $v_л = \frac{S}{40}$. **(5 баллов)**

Если они едут навстречу друг другу, то $v_г + v_л = \frac{S}{60} + \frac{S}{40} = \frac{S}{t}$. **(5 баллов)**

В результате, получаем, что время движения до встречи t=24 минуты. **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) Изделие из сплава золота и серебра имеет плотность 14000 кг/м^3. Его масса 0,4 кг. Известно, что плотность золота 19360 кг/м^3, серебра 10500 кг/м^3. Определите массу серебра в изделии.

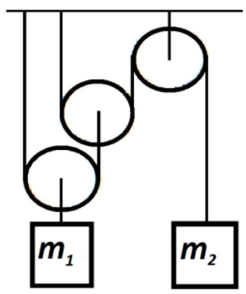
Ответ: 0,18 кг.

Решение. Объём сплава $V = V_з + V_с$. **(5 баллов)**

Получаем, что $\frac{m}{\rho} = \frac{m - m_c}{\rho_з} + \frac{m_c}{\rho_c}$. **(5 баллов)**

В результате, масса серебра $m_c \approx 0{,}18$ кг. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Определите при каком отношении масс грузов m_1/m_2 система, показанная на рисунке, будет находиться в равновесии. Нити невесомые и нерастяжимые, блоки невесомые. Трением в осях блоков пренебречь.



Ответ: 4.

Решение. Условие равновесия для первого груза $m_1 g = T_1$. **(4 балла)**

Условие равновесия для второго груза $m_2 g = T_2$. **(4 балла)**

При этом, $T_1 = 4T_2$. **(4 балла)**

В результате, получаем: $\frac{m_1}{m_2} = 4$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

7 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. В 2053 г. в марте понедельников больше, чем вторников. На какой день недели выпадет 1 июня 2053 г.?

Ответ: на воскресенье.

Решение. За понедельником идёт вторник. Если в каком-то месяце понедельников оказалось больше, чем вторников, то последний день месяца — понедельник. Итак, 31 марта 2053 г. — понедельник. Понедельник выпадает также на 28 апреля и 26 мая, а 1 июня будет воскресенье.

Оценивание. За верное решение 11 баллов. Если определено, что 31 марта 2052 г. — воскресенье, но ошибка в дальнейших выкладках, 5 баллов.

2. Имеется 12 гирек весом 1, 2, 3, ..., 12 грамм. Можно ли их разложить в три коробочки так, чтобы в первой было пять гирек, второй — четыре, а в третьей — три, но при этом суммарный вес гирек во всех коробочках был одинаковым?

Ответ: можно.

Решение. Можно в 3-ю коробочку положить гирьки весом 12, 11 и 3 г, во 2-ю — 10, 9, 6 и 1 г, в 1-ю — 2, 4, 5, 7, 8 г.

Оценивание. За верный пример 11 б. Если найден лишь суммарный вес гирек в одной коробочке, 4 б.

3. В избирательном округе проживает 100 избирателей. Среди них некоторые всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. На выборах в городскую думу каждый из них проголосовал за одного из четырёх кандидатов (A, B, C или D). По выходу из участка для голосования 4 социологические службы, представлявшие всех кандидатов, спросили каждого избирателя, голосовал ли он за их кандидата. Службы от кандидатов A, B и C получили соответственно 30, 50 и 60 ответов «да», а вот служба от D слышала только отрицательные ответы. Сколько голосов в этом округе на самом деле получили кандидаты?

Ответ: 10, 30, 40, 20.

Решение. По результатам экзитпола кандидат D получил 0 голосов. Это означает, что за D не голосовал никто из рыцарей, а за других кандидатов никто из лжецов. Голосующий рыцарь даёт один ответ «да», а голосующий лжец — три ответа «да». Значит, каждый лжец увеличивает общее число ответов «да» на 2. Поскольку общее число ответов «да» превышает число голосовавших на 40, всего было 20 лжецов, и все они голосовали за D и добавили по 20 утвердительных ответов в экзитполах, которые проводили представители других кандидатов. Отсюда ответ.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. Турагенство имеет автобусы, рассчитанные на 10, 23, 36 и 49 туристов (автобусов каждого типа не меньше ста). Из жадности владелец агенства выпускает в рейс только полностью заполненные автобусы. Сможет ли он отправить на отдых 2345 туристов, использовав ровно 100 автобусов?

Ответ: нет.

Решение. Пусть сможет, и при этом он использует x автобусов с 10 туристами, y автобусов с 23 туристами, z с 36 и t с 49. Тогда

$$10x + 23y + 36z + 49t = 10(x + y + z + t) + 13(y + 2z + 3t) = 2345.$$

Учитывая, что общее число автобусов 100, получаем $13(y + 2z + 3t) = 1345$. В последнем равенстве левая часть делится на 13, а правая — нет.

Оценивание. За верное решение 14 б.

5. (*20 баллов*) Грузовой автомобиль проезжает расстояние между двумя городами за 1,5 часа, а легковой автомобиль проезжает то же самое расстояние за 45 минут. Через сколько времени они встретятся, если выедут из разных городов одновременно навстречу друг другу?

Ответ: 30 мин.

Решение. Скорость грузового автомобиля: $v_г = \frac{S}{90}$. **(5 баллов)**

Скорость легкового автомобиля: $v_л = \frac{S}{45}$. **(5 баллов)**

Если они едут навстречу друг другу, то: $v_г + v_л = \frac{S}{90} + \frac{S}{45} = \frac{S}{t}$. **(5 баллов)**

В результате, получаем, что время движения до встречи t=30 минут. **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) Изделие из сплава золота и серебра имеет плотность 14000 кг/м^3. Его масса 0,4 кг. Известно, что плотность золота 19360 кг/м^3, серебра 10500 кг/м^3. Определите массу золота в изделии.

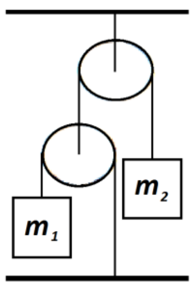
Ответ: $\approx$ 0,22 кг.

Решение. Объём сплава $V = V_з + V_с$. **(5 баллов)**

Получаем, что $\frac{m}{\rho} = \frac{m_з}{\rho_з} + \frac{m - m_з}{\rho_c}$. **(5 баллов)**

В результате, масса серебра $m_з \approx 0{,}22$ кг. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Определите при каком отношении масс грузов m_1/m_2 система, показанная на рисунке, будет находиться в равновесии. Нити невесомые и нерастяжимые, блоки невесомые. Трением в осях блоков пренебречь.



Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Условие равновесия для первого груза $m_1 g = T_1$. **(4 балла)**

Условие равновесия для второго груза $m_2 g = T_2$. **(4 балла)**

При этом, $T_2 = 2T_1$. **(4 балла)**

В результате, получаем: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

8 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя выезжает на велосипеде из дома в школу. Если его средняя скорость будет равна 12 км/ч, то он приедет на 1 мин позже звонка на урок. Если его средняя скорость будет равна 20 км/ч, то он приедет на 11 мин раньше звонка. С какой средней скоростью нужно ехать Пете, если он хочет приехать в школу ровно за 5 мин до звонка?

Ответ: 15 км/ч.

Решение. Пусть расстояние от дома до школы S км, а время от момента выезда до звонка t ч. Из системы уравнений

$$\frac{S}{12} = t + \frac{1}{60}, \quad \frac{S}{20} = t - \frac{11}{60}$$

находим $S = 6$ км, $t = \frac{29}{60}$ ч. Тогда искомая скорость равна

$$\frac{S}{t - \frac{1}{12}} = \frac{6}{\frac{24}{60}} = 15 \text{ км/ч}.$$

Оценивание. За верное решение 12 б. Если уравнения выписаны верно, но решение не доведено до верного ответа, то 4 б.

2. На гранях кубика написаны числа 2, 3, 5, 7, 11, 13. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 25, во второй — 32. Какое число написано на грани, противоположной той, где стоит число 5?

Ответ: 11.

Решение. Сумма чисел на всех гранях равна $2+3+5+7+11+13 = 41$. При первом броске сумма на верхней и нижней гранях равна $41 - 25 = 16$, при втором $41 - 32 = 9$. Значит, на третьей паре противоположных граней сумма равна $41 - (16+9) = 16$. Сумму 16 из чисел на гранях можно получить двумя способами: $3+13$ или $5+11$. Следовательно, на парах граней с суммой 16 напротив 3 находится 13, а напротив 5 число 11.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Сколько способов выбрать два натуральных числа x и y, где $x \leqslant y$, наименьшее общее кратное которых равно 100?

Ответ: 13.

Решение. 1) Если $y = 100$, то x — произвольный делитель 100. Поскольку $100 = 2^2 \cdot 5^2$, имеем $x = 2^i \cdot 5^j$, где i и j независимо друг от друга принимают значения 0, 1 или 2. Всего имеем $3 \cdot 3 = 9$ значений числа x.

2) Если $y < 100$, одно из чисел $2^2 \cdot 5$ или 2^2, а другое $5^2 \cdot 2$ или 5^2. Здесь всего 4 варианта.

Оценивание. За верное решение 13 б.

4. В сообществе одной из социальных сетей 400 участников. Оказалось, что каждый член сообщества имеет ровно 300 друзей среди его участников. Обязательно ли найдётся 5 членов сообщества, каждый из которых дружит с каждым?

Ответ: нет.

Решение. Приведём соответствующий пример. Разобьём сообщество на 4 группы по 100 человек в каждой. Пусть член каждой группы дружит со всеми участниками трёх других групп, но ни с кем из своей группы. Тогда у каждого будет ровно по 300 друзей. С другой стороны, если бы нашлось пять попарно дружащих, то все они должны были быть из разных групп, но пяти разных групп нет!

Оценивание. За верное решение 13 б.

5. (*15 баллов*) Брусок, нагретый до температуры 100^0C, опустили в неизвестную жидкость, и её температура поднялась от 0^0C до 20^0C. Брусок вытащили, нагрели до 50^0C, и опять опустили в ту же жидкость. Какова будет конечная температура этой жидкости?

Ответ: 26℃.

Решение. Уравнение теплового баланса для первой ситуации:

$c_б m_б(100-20) = c_ж m_ж(20-0)$. **(4 балла)**

Уравнение теплового баланса для второго погружения жидкости:

$c_б m_б(50-t) = c_ж m_ж(t-20)$. **(4 балла)**

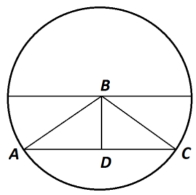
В результате, получаем: $\frac{c_ж m_ж(20-0)}{(100-20)}(50-t) = c_ж m_ж(t-20)$. **(4 балла)**

Окончательный результат: $t = 26℃$. **(3 балла)**

6. (*20 баллов*) Пуля, летящая со скоростью *v*=20 м/с, пробивает равномерно крутящийся вокруг вертикальной оси тонкостенный барабан. Радиус барабана *R*=20 м. Траектория пули проходит на расстоянии *r*=10 м от центра барабана. С какой частотой должен вращаться барабан, чтобы в нём в результате пролёта пули осталось только одно отверстие? Считайте, что скорость пули во время движения остаётся постоянной.

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{N}{\sqrt{3}}$ или $\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{N}{\sqrt{3}}$ оборотов в секунду.

Решение. *AC* – участок траектории пули, проходящий внутри барабана.



Так как *BD*=*r*=10 м и *AB*=*R*=20 м, то получаем что $\angle BAC = 30°$. Получаем, что пуля внутри барабана пролетела $AC = \sqrt{3}R = 20\sqrt{3}$ м. **(5 баллов)**

Время движения пули внутри барабана $t = \frac{AC}{v} = \sqrt{3}$ с. **(5 баллов)**

В зависимости от направления вращения барабана, он за это время должен повернуться на $\frac{1}{3} + N$ или $\frac{2}{3} + N$ оборотов, где N – целое число. **(5 баллов)**

В результате, частота барабана: $\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{N}{\sqrt{3}}$ или $\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{N}{\sqrt{3}}$ оборотов в секунду.

(5 баллов)

7. (*15 баллов*) К резистору *R* подключили батарейку, при этом через неё течёт ток *I*. Если в цепь последовательно к *R* добавить неизвестный резистор, через батарейку течёт ток 3*I*/4. Если неизвестный резистор и *R* соединить параллельно и подключить к той же батарейке, через неё будет течь ток 6*I*/5. Найдите сопротивление неизвестного резистора.

Ответ: *R*.

Решение. Законы Ома для всех ситуаций, описанных в условии:

$U = IR + Ir$, **(4 балла)**; $U = \frac{3}{4}IR + \frac{3}{4}Ix + \frac{3}{4}Ir$, **(4 балла)**

$U = \frac{6}{5}I\frac{Rx}{R+x} + \frac{6}{5}Ir$, **(4 балла)**

где x – сопротивление неизвестного резистора, r – собственное сопротивление источника. Решая данную систему уравнений, получим: x=R. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

8 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя выезжает на велосипеде из дома в школу. Если его средняя скорость будет равна 10 км/ч, то он приедет на 1 мин позже звонка на урок. Если его средняя скорость будет равна 15 км/ч, то он приедет на 11 мин раньше звонка. С какой средней скоростью нужно ехать Пете, если он хочет приехать в школу ровно за 5 мин до звонка?

Ответ: 12 км/ч.

Решение. Пусть расстояние от дома до школы S км, а время от момента выезда до звонка t ч. Из системы уравнений

$$\frac{S}{10}=t+\frac{1}{60}, \quad \frac{S}{15}=t-\frac{11}{60}$$

находим $S=6$ км, $t=\frac{7}{12}$ ч. Тогда искомая скорость равна

$$\frac{S}{t-\frac{1}{12}}=\frac{6}{\frac{6}{12}}=12 \text{ км/ч.}$$

Оценивание. За верное решение 12 б. Если уравнения выписаны верно, но решение не доведено до верного ответа, то 4 б.

2. На гранях кубика написаны числа 3, 5, 7, 11, 13, 17. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 40, во второй — 32. Какое число написано на грани, противоположной той, где стоит число 3?

Ответ: 13.

Решение. Сумма чисел на всех гранях равна $2+3+5+7+11+13=41$. При первом броске сумма на верхней и нижней гранях равна $56-40=16$, при втором $56-32=24$. Значит, на третьей паре противоположных граней сумма равна $56-(16+24)=16$. Сумму 16 из чисел на гранях можно получить двумя способами: $3+13$ или $5+11$. Следовательно, на парах граней с суммой 16 напротив 5 находится 11, а напротив 3 число 13.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Сколько способов выбрать два натуральных числа x и y, где $x \leqslant y$, наименьшее общее кратное которых равно 441?

Ответ: 13.

Решение. 1) Если $y=441$, то x — произвольный делитель 441. Поскольку $441=3^2 \cdot 7^2$, имеем $x=3^i \cdot 7^j$, где i и j независимо друг от друга принимают значения 0, 1 или 2. Всего имеем $3 \cdot 3=9$ значений числа x.

2) Если $y<441$, одно из чисел $3^2 \cdot 7$ или 3^2, а другое $7^2 \cdot 3$ или 7^2. Здесь всего 4 варианта.

Оценивание. За верное решение 13 б.

4. В сообществе одной из социальных сетей 300 участников. Оказалось, что каждый член сообщества имеет ровно 200 друзей среди его участников. Обязательно ли найдётся 4 члена сообщества, каждый из которых дружит с каждым?

Ответ: нет.

Решение. Приведём соответствующий пример. Разобьём сообщество на 3 группы по 100 человек в каждой. Пусть член каждой группы дружит со всеми участниками трёх других групп, но ни с кем из своей группы. Тогда у каждого будет ровно по 200 друзей. С другой стороны, если бы нашлось четверо попарно дружащих, то все они должны были быть из разных групп, но четырёх разных групп нет!

Оценивание. За верное решение 13 б.

5. (*15 баллов*) Брусок, нагретый до температуры 100^0С, опустили в неизвестную жидкость, и её температура поднялась от 0^0С до 40^0С. Брусок вытащили, нагрели до 80^0С, и опять опустили в ту же жидкость. Какова будет конечная температура этой жидкости? Потерями тепла пренебречь.

Ответ: $56°\text{C}$.

Решение. Уравнение теплового баланса для первой ситуации:

$c_б m_б(100-40) = c_ж m_ж(40-0)$. **(4 балла)**

Уравнение теплового баланса для второго погружения жидкости:

$c_б m_б(80-t) = c_ж m_ж(t-40)$. **(4 балла)**

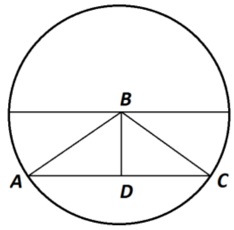
В результате, получаем: $\frac{c_ж m_ж(40-0)}{(100-40)}(80-t) = c_ж m_ж(t-40)$. **(4 балла)**

Окончательный результат: $t = 56°\text{C}$. **(3 балла)**

6. (*20 баллов*) Пуля, летящая со скоростью v=10 м/с, пробивает равномерно крутящийся вокруг вертикальной оси тонкостенный барабан. Радиус барабана R=10 м. Траектория пули проходит на расстоянии r=5 м от центра барабана. С какой частотой должен вращаться барабан, чтобы в нём в результате пролёта пули осталось только одно отверстие? Считайте, что скорость пули во время движения остается постоянной.

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{N}{\sqrt{3}}$ или $\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{N}{\sqrt{3}}$ оборотов в секунду.

Решение. AC – участок траектории пули, проходящий внутри барабана.



Так как BD=r=5 м и AB=R=10 м, то получаем что $\angle BAC = 30°$. Получаем, что пуля внутри барабана пролетела $AC = \sqrt{3}R = 10\sqrt{3}$ *м*. **(5 баллов)**

Время движения пули внутри барабана $t = \frac{AC}{v} = \sqrt{3}$ *с*. **(5 баллов)**

В зависимости от направления вращения барабана, он за это время должен повернуться на: $\frac{1}{3} + N$ или $\frac{2}{3} + N$ оборотов, где N – целое число. **(5 баллов)**

В результате, частота барабана: $\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{N}{\sqrt{3}}$ или $\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{N}{\sqrt{3}}$ оборотов в секунду.

(5 баллов)

7. (*15 баллов*) К резистору R подключили батарейку, при этом через неё течёт ток I. Если в цепь последовательно к R добавить неизвестный резистор, через батарейку течёт ток $0{,}75I$. Если неизвестный резистор и R соединить параллельно и подключить к той же батарейке, через неё будет течь ток $1{,}2I$. Найдите сопротивление неизвестного резистора.

Ответ: R.

Решение. Законы Ома для всех ситуаций, описанных в условии:

$U = IR + Ir$, **(4 балла)**; $U = 0{,}75IR + 0{,}75Ix + 0{,}75Ir$, **(4 балла)**

$U = 1{,}2I\frac{Rx}{R+x} + 1{,}2Ir,$ **(4 балла)**

где x – сопротивление неизвестного резистора, r – собственное сопротивление источника. Решая данную систему уравнений, получим: $x=R$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

9 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Лодка прошла по течению реки 9 км и против течения 14 км, затратив на это столько времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде 25 км. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

Ответ: 5.

Решение. Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, а y км/ч — скорость течения. Условию задачи соответствует уравнение

$$\frac{9}{x+y}+\frac{14}{x-y}=\frac{25}{x}.$$

Отсюда

$$2x^2-5xy-25y^2=0.$$

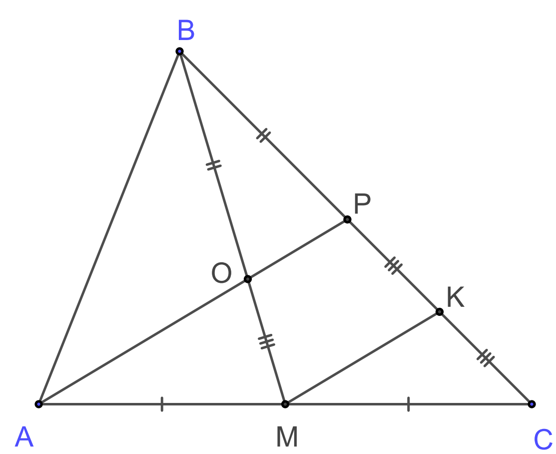
Поделим обе части уравнения на y^2, обозначив $k=\dfrac{x}{y}$. Получится уравнение $2k^2-5k-25=0$, у которого единственный положительный корень $k=5$.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC. На стороне BC выбрана точка P. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O. Оказалось, что $BO=BP$. Найдите PC, если $OM=6$.

Ответ: 12.

Решение. Пусть K — точка пересечения прямой, проходящей через M параллельно AP, и стороны BC.



Тогда треугольник MBK подобен треугольнику OBP, а тот, по условию, равнобедренный. Отсюда $PK = OM$. В то же время MK — средняя линия в треугольнике APC. Следовательно,

$$PC = 2PK = 2OM = 12.$$

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. В избирательном округе проживает 100 избирателей. Среди них некоторые всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. На выборах в городскую думу каждый из них проголосовал за одного из четырёх кандидатов (A, B, C или D). По выходу из участка для голосования 4 социологические службы, представлявшие всех кандидатов, спросили каждого избирателя, голосовал ли он за их кандидата. Службы от кандидатов A, B и C получили соответственно 35, 45 и 50 ответов «да», а вот служба от D слышала только отрицательные ответы. Сколько голосов в этом округе на самом деле получили кандидаты?

Ответ: 20, 30, 35, 15.

Решение. По результатам экзитпола кандидат D получил 0 голосов. Это означает, что за D не голосовал никто из рыцарей, а за других кандидатов никто из лжецов.

Голосующий рыцарь даёт один ответ «да», а голосующий лжец — три ответа «да». Значит, каждый лжец увеличивает общее число ответов «да» на 2.

Поскольку общее число ответов «да» превышает число голосовавших на 30, всего было 15 лжецов, и все они голосовали за D и добавили по 15 утвердительных ответов в экзитполах, которые проводили представители других кандидатов. Отсюда ответ.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. В сообществе одной из социальных сетей 400 участников. Оказалось, что каждый член сообщества имеет ровно 300 друзей среди его участников. Обязательно ли найдётся 5 членов сообщества, каждый из которых дружит с каждым?

Ответ: нет.

Решение. Приведём соответствующий пример.

Разобьём сообщество на 4 группы по 100 человек в каждой. Пусть член каждой группы дружит со всеми участниками трёх других групп, но ни с кем из своей группы. Тогда у каждого будет ровно по 300 друзей.

С другой стороны, если бы нашлось пять попарно дружащих, то все они должны были быть из разных групп, но пяти разных групп нет!

Оценивание. За верное решение 13 б.

5. (*15 баллов*) Кипятильник мощностью P=3000 Вт нагрел 2 литра воды от 20^{O}С до 100^{O}С за 5 минут. За какое время она остынет обратно до 20^{O}С? Удельная теплоёмкость воды c=4200 Дж/кг·К, плотность воды ρ=1000 кг/м^3? Мощность потерь считайте постоянной, испарением воды пренебречь.

Ответ: $\approx$ 884 секунды

Решение. Масса воды: $m = \rho V = 2$ кг. **(3 балла)**

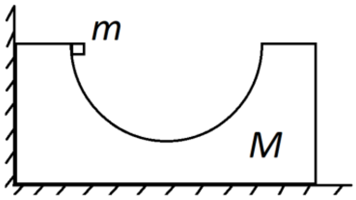
Закон сохранения энергии для нагрева воды: $Pt_1 = cm\Delta T + P_{\text{потерь}} t_1$. **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для остывания воды: $cm\Delta T = P_{\text{потерь}} t_2$. **(3 балла)**

В результате, получаем: $Pt_1 = cm\Delta T + \frac{cm\Delta T}{t_2} t_1$, **(3 балла)**

$t_2 = \frac{cm\Delta T}{Pt_1 - cm\Delta T} t_1 = \frac{4200 \cdot 2 \cdot 80}{3000 \cdot 300 - 4200 \cdot 2 \cdot 80} \cdot 300 \approx 884$ секунды. **(3 балла)**

6. (*15 баллов*) Деталь массой M=1 кг, имеющую выемку в форме полуокружности радиусом R=5 см, поставили на гладкий пол вплотную к гладкой стенке. К верхней части выемки поднесли маленький грузик массой m=0,4 кг и он начал скользить по выемке без начальной скорости. Определите максимальную скорость детали. Трение между грузиком и деталью отсутствует. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



Ответ: $v_{max} \approx 0{,}57$ м/c.

Решение. Из закона сохранения энергии находим скорость груза, когда он в первый раз окажется в самой нижней точке своей траектории:

$v_1 = \sqrt{2gR} = 1$ м/с. **(3 балла)**

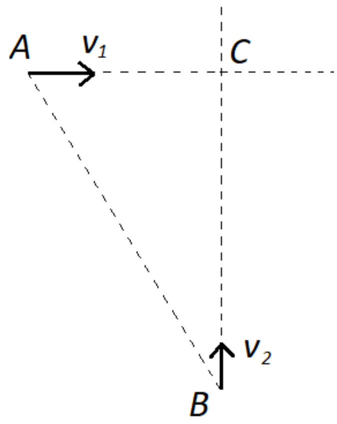
Максимальная скорость детали будет достигаться в тот момент, когда груз находится в самой нижней точке траектории, двигаясь в обратную сторону. **(3 балла)**

Закон сохранения импульса: $mv_1 = -mv_2 + Mv_{max}$. **(3 балла)**

Закон сохранения энергии: $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mv_{max}^2}{2}$. **(3 балла)**

Решая данную систему уравнений, получаем: $v_{max} \approx 0{,}57$ м/c. **(3 балла)**

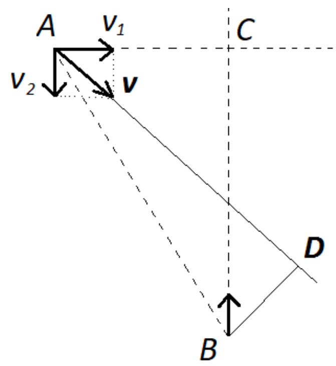
7. (*20 баллов*) Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 2000 метров друг от друга, одновременно пошли два пешехода со скоростями $v_1=\sqrt{3}$ м/с и v_2=1 м/с. Скорости пешеходов изначально направлены в сторону точки C, причём известно, что расстояние AC=1000 м. Найдите минимальное расстояние между пешеходами. Пешеходы остановок не делают.



Ответ: 1000 м.

Решение. Из условия: $\angle \mathrm{CAB} = 60°$. **(3 балла)**

Перейдём в систему отсчёта, связанную с вторым телом. Скорость первого тела в данной системе отсчёта равна *v*. *BD* – искомое минимальное расстояние.
(5 баллов)



Так как $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то получаем, что угол *CAD* равен 30^0. **(4 балла)**

Следовательно, $\angle D\mathrm{AB} = \angle \mathrm{CAB} - \angle \mathrm{CA}D = 30°$. **(4 балла)**

Получаем: $BD = \frac{1}{2}AB = 1000$ м. **(4 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

9 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Лодка прошла по течению реки 21 км и против течения 10 км, затратив на это столько времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде 30 км. Каким может быть отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения?

Ответ: 5 или 6.

Решение. Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, а y км/х — скорость течения. Условию задачи соответствует уравнение

$$\frac{21}{x+y} + \frac{10}{x-y} = \frac{30}{x}.$$

Отсюда

$$x^2 - 11xy + 30y^2 = 0.$$

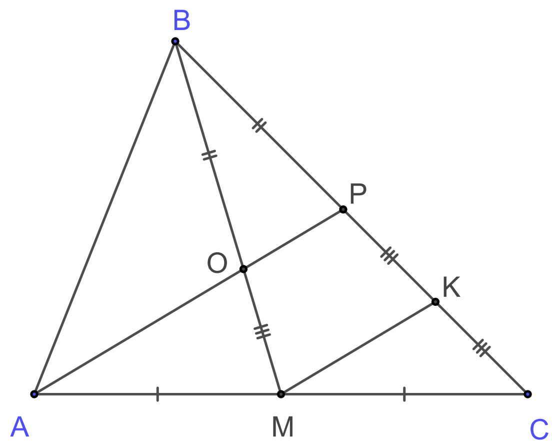
Поделим обе части уравнения на y^2, обозначив $k = \frac{x}{y}$. Получится уравнение $k^2 - 11k + 30 = 0$, у которого корни 5 и 6.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC. На стороне BC выбрана точка P. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите OM, если $PC = 6$.

Ответ: 3.

Решение. Пусть K — точка пересечения прямой, проходящей через M параллельно AP, и стороны BC.



Тогда треугольник MBK подобен треугольнику OBP, а тот, по условию, равнобедренный. Отсюда $PK = OM$. В то же время MK — средняя линия в треугольнике APC. Следовательно,

$$PC = 2PK = 2OM.$$

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. В избирательном округе проживает 100 избирателей. Среди них некоторые всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. На выборах в городскую думу каждый из них проголосовал за одного из четырёх кандидатов (A, B, C или D). По выходу из участка для голосования 4 социологические службы, представлявшие всех кандидатов, спросили каждого избирателя, голосовал ли он за их кандидата. Службы от кандидатов A, B и C получили соответственно 30, 50 и 60 ответов «да», а вот служба от D слышала только отрицательные ответы. Сколько голосов в этом округе на самом деле получили кандидаты?

Ответ: 10, 30, 40, 20.

Решение. По результатам экзитпола кандидат D получил 0 голосов. Это означает, что за D не голосовал никто из рыцарей, а за других кандидатов никто из лжецов.

Голосующий рыцарь даёт один ответ «да», а голосующий лжец — три ответа «да». Значит, каждый лжец увеличивает общее число ответов «да» на 2.

Поскольку общее число ответов «да» превышает число голосовавших на 40, всего было 20 лжецов, и все они голосовали за D и добавили по 20 утвердительных ответов в экзитполах, которые проводили представители других кандидатов. Отсюда ответ.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. В сообществе одной из социальных сетей 300 участников. Оказалось, что каждый член сообщества имеет ровно 200 друзей среди его участников. Обязательно ли найдётся 4 члена сообщества, каждый из которых дружит с каждым?

Ответ: нет.

Решение. Приведём соответствующий пример. Разобьём сообщество на 3 группы по 100 человек в каждой. Пусть член каждой группы дружит со всеми участниками трёх других групп, но ни с кем из своей группы. Тогда у каждого будет ровно по 200 друзей. С другой стороны, если бы нашлось четверо попарно дружащих, то все они должны были быть из разных групп, но четырёх разных групп нет!

Оценивание. За верное решение 13 б.

5. (*15 баллов*) Кипятильник мощностью P=4 кВт нагрел 2 литра воды от 40^{O}C до 100^{O}C за 5 минут. За какое время она остынет обратно до 40^{O}C? Удельная теплоёмкость воды c=4200 Дж/кг·К, плотность воды ρ=1000 кг/м^3. Мощность потерь считайте постоянной, испарением воды пренебречь.

Ответ: $\approx$ 217 секунд.

Решение. Масса воды: $m = \rho V = 2$ кг. **(3 балла)**

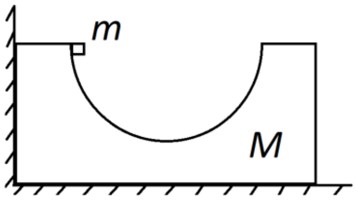
Закон сохранения энергии для нагрева воды: $Pt_1 = cm\Delta T + P_{\text{потерь}} t_1$. **(3 балла)**

Закон сохранения энергии для остывания воды: $cm\Delta T = P_{\text{потерь}} t_2$. **(3 балла)**

В результате, получаем $Pt_1 = cm\Delta T + \frac{cm\Delta T}{t_2} t_1$. **(3 балла)**

$t_2 = \frac{cm\Delta T}{Pt_1 - cm\Delta T} t_1 = \frac{4200\cdot 2\cdot 60}{4000\cdot 300 - 4200\cdot 2\cdot 60} \cdot 300 \approx 217$ секунд. **(3 балла)**

6. (*15 баллов*) Деталь массой M=2 кг, имеющую выемку в форме полуокружности радиусом R=20 см, поставили на гладкий пол вплотную к гладкой стенке. К верхней части выемки поднесли маленький грузик массой m=0,5 кг и он начал скользить по выемке без начальной скорости. Определите максимальную скорость детали. Трение между грузиком и деталью отсутствует. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



Ответ: $v_{max} = 0{,}8$ м/c.

Решение. Из закона сохранения энергии находим скорость груза, когда он в первый раз окажется в самой нижней точке своей траектории:

$v_1 = \sqrt{2gR} = 2$ м/с. **(3 балла)**

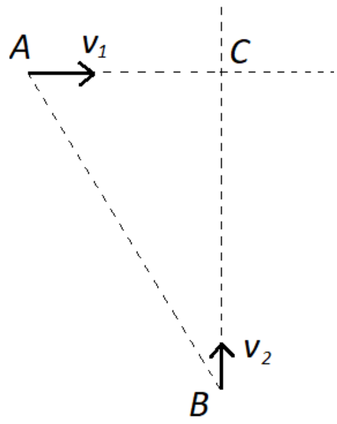
Максимальная скорость детали будет достигаться в тот момент, когда груз находится в самой нижней точке траектории, двигаясь в обратную сторону. **(3 балла)**

Закон сохранения импульса: $mv_1 = -mv_2 + Mv_{max}$. **(3 балла)**

Закон сохранения энергии: $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mv_{max}^2}{2}$. **(3 балла)**

Решая данную систему уравнений, получаем: $v_{max} = 0{,}8$ м/c. **(3 балла)**

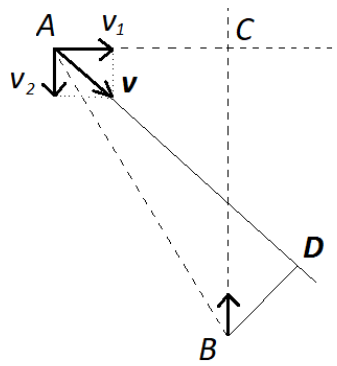
7. (*20 баллов*) Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 1000 метров друг от друга, одновременно побежали два человека с постоянными скоростями v_1=2$\sqrt{3}$ м/с и v_2=2 м/с. Скорости людей изначально направлены в сторону точки C, причём известно, что расстояние AC=500 м. Найдите минимальное расстояние между бегунами. Остановок они не делают.



Ответ: 500 м.

Решение. Из условия: $\angle CAB = 60°$. **(3 балла)**

Перейдём в систему отсчёта, связанную с вторым человеком. Скорость первого в данной системе отсчёта равна v. BD – искомое минимальное расстояние. **(5 баллов)**



Так как $\frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{2\sqrt{3}}$, то получаем, что угол CAD равен 30^0. **(4 балла)**

Следовательно, $\angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 30°$. **(4 балла)**

Получаем: $BD = \frac{1}{2}AB = 500$ м. **(4 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

10 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Лодка прошла по течению реки 9 км и против течения 14 км, затратив на это столько времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде 25 км. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

Ответ: 5.

Решение. Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, а y км/ч — скорость течения. Условию задачи соответствует уравнение

$$\frac{9}{x+y}+\frac{14}{x-y}=\frac{25}{x}.$$

Отсюда

$$2x^2-5xy-25y^2=0.$$

Поделим обе части уравнения на y^2, обозначив $k=\dfrac{x}{y}$. Получится уравнение

$$2k^2-5k-25=0,$$

у которого единственный положительный корень $k=5$.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. Сколько способов выбрать два натуральных числа x и y, где $x \leqslant y$, наименьшее общее кратное которых равно 10 000?

Ответ: 41.

Решение.

1) Если $y=10000$, то x — произвольный делитель 10000. Поскольку $10000=2^4\cdot 5^4$, имеем

$$x=2^i\cdot 5^j,$$

где i и j независимо друг от друга принимают значения 0, 1, 2, 3 или 4. Всего имеем $5\cdot 5=25$ значений числа x.

2) Если $y<10000$, одно из чисел имеет вид $2^4\cdot 5^j$, где $j=0,1,2$ или 3, а другое $2^i\cdot 5^4$, где $i=0,1,2$ или 3. Здесь всего $4\cdot 4=16$ вариантов.

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Муравей сидит в вершине прямоугольного параллелепипеда с длинами рёбер 2, 3 и 5 см. Сможет ли он, двигаясь по поверхности параллелепипеда со скоростью 1 см/с, добраться до противоположной вершины менее чем за 7 секунд?

Ответ: нет.

Решение. Найдём длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда. Он проходит по двум смежным граням. Развёртка этих граней — прямоугольник. Здесь возможны три варианта в зависимости от длины общего ребра этих граней:

$$2 \times (3+5), \quad 3 \times (2+5), \quad 5 \times (2+3).$$

Наименьшее расстояние между двумя противоположными вершинами прямоугольника — длина его диагонали. Наименьшую длину имеет диагональ третьего прямоугольника. Она равна $\sqrt{50}$ и больше 7.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. Решите уравнение $x^{10} + x^6 + 2 = 4x^4$.

Ответ: ± 1.

Первое решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для четырёх чисел,

$$\frac{x^{10} + x^6 + 1 + 1}{4} \geqslant \sqrt[4]{x^{10} \cdot x^6 \cdot 1 \cdot 1} = x^4.$$

По условию, имеем равенство. Оно имеет место только в случае равенства всех слагаемых: $x^{10} = x^6 = 1$. Отсюда ответ.

Второе решение. Воспользуемся дважды неравенством $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$:

$$x^{10} + x^6 \geqslant 2x^8, \quad 2(x^8 + 1) \geqslant 2 \cdot 2x^4.$$

По условию, имеем равенство. Поскольку

$$a^2 + b^2 = 2ab \iff a = b,$$

получаем $x^{10} = x^6 = 1$. Отсюда ответ.

Третье решение. Замена $t = x^2$. Получаем уравнение

$$t^5 + t^3 - 4t^2 + 2 = 0.$$

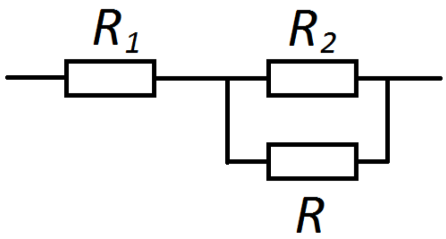
Его можно представить в виде

$$(t-1)^2(t^3 + 2t^2 + 4t + 2) = 0.$$

Единственное неотрицательное решение $t = 1$. Отсюда $x = \pm 1$.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если только угадан ответ, но не показано, что нет других решений, 2 б.

5. (*20 баллов*) В схеме, представленной на рисунке, сопротивления R_1=20 Ом и R_2=30 Ом. При каком значении сопротивления R выделяемая на нём мощность практически не будет зависеть от малых изменений этого сопротивления? Напряжение, подаваемое на данную схему, постоянно.



Ответ: 12 Ом.

Решение. Мощность, практически, не будет зависеть от малых изменений этого сопротивления, следовательно, мы ищем значение сопротивления, при котором выделяемая мощность максимальна. **(4 балла)**

Общее сопротивление цепи $R_1+\frac{R_2R}{R_2+R}$. **(3 балла)**

Общий ток в цепи $\frac{U}{R_1+\frac{R_2R}{R_2+R}}$. **(3 балла)**

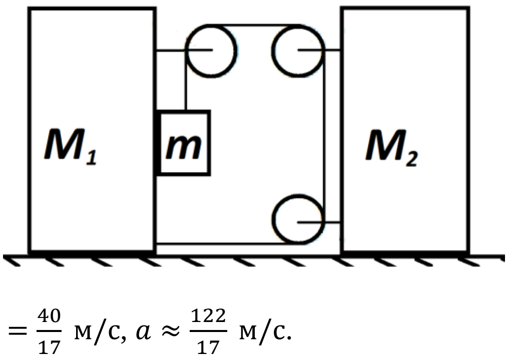
Ток, текущий через сопротивление R, равен $\frac{U}{R_1+\frac{R_2R}{R_2+R}}\cdot\frac{R_2}{R_2+R}$. **(3 балла)**

Мощность, выделяемая на этом резисторе, определяется выражением

$(\frac{U}{R_1+\frac{R_2R}{R_2+R}}\cdot\frac{R_2}{R_2+R})^2\cdot R$. **(3 балла)**

Максимум этой функции достигается при $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=12$ Ом. **(4 балла)**

6. (*15 баллов*) Определите ускорения всех тел в системе, показанной на рисунке. Известны массы тел M_1=8 кг, M_2=5 кг, m=2 кг. Нить невесомая и нерастяжимая. Трением пренебречь.



Ответ: $a_1=\frac{20}{17}$ м/с, $a_2=\frac{40}{17}$ м/с, $a\approx\frac{122}{17}$ м/с.

Решение. Второй закон Ньютона. Для первого тела в проекции на горизонтальное направление $2T=(M_1+m)a_1$, **(2 балла)**

Для второго тела в проекции на горизонтальное направление $2T=M_2a_2$, **(1 балл)**

Для груза в проекции на вертикальное направление $T - mg = -ma_y$. **(2 балла)**

С учетом нерастяжимости нити, получаем, что $a_y = 6a_1$. **(2 балла)**

Решая данную систему, получаем: $a_1 = \frac{20}{17}$ м/с, **(2 балла)**

$a_2 = 2a_1 = \frac{40}{17}$ м/с , **(2 балла)**

$a_y = \frac{120}{17}$ м/с. **(2 балла)**

Полное ускорение груза $a = \sqrt{a_1^2 + a_y^2} \approx \frac{122}{17}$ м/с. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Танк, двигаясь по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v_0=20 м/с, производит выстрел по ходу своего движения. Ствол пушки в этот момент располагался под углом α=30^O к горизонту. Через 10 секунд после выстрела цель, двигавшаяся по той же горизонтальной поверхности со скоростью $v_ц$=10 м/с, была поражена. Ускорение свободного падения считайте равным g=10 м/с^2. Найдите скорость $v_с$, с которой снаряд вылетает из ствола. Определите расстояние S между танком и целью в момент выстрела и радиус R зоны поражения, которую обеспечит танк, стоящий неподвижно.

Ответ: $v_с$=100 м/с; 966 м $\leq S \leq$ 1166 м; R=1000 м.

Решение. Уравнения движения для снаряда: $x=(v_0+v_с\cos\alpha)t$, **(2 балла)**

$y=v_с\sin\alpha t-gt^2/2$. **(2 балла)**

С учётом того, что y=0, получаем начальную скорость снаряда: $v_с$=100 м/с. **(2 балла)**

Дальность полета снаряда составила: $x=(20+50\sqrt{3})\cdot 10\approx 1066$ метров. **(2 балла)**

Следовательно, расстояние между танком и целью в момент выстрела составляло: $S=x\pm v_ц\cdot t=1066\pm 10\cdot 10$, **(1 балл)**

То есть 966 м $\leq S \leq$ 1166 м. **(1 балл)**

Максимальная дальность полета появляется при угле наклона башни в 45^O. **(2 балла)**

Радиус зоны поражения, которую обеспечивает неподвижный танк, составляет:

$R=v_с^2/g$=1000 м. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

10 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Лодка прошла по течению реки 21 км и против течения 10 км, затратив на это столько времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде 30 км. Каким может быть отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения?

Ответ: 5 или 6.

Решение. Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, а y км/ч — скорость течения. Условию задачи соответствует уравнение

$$\frac{21}{x+y}+\frac{10}{x-y}=\frac{30}{x}.$$

Отсюда

$$x^2-11xy+30y^2=0.$$

Поделим обе части уравнения на y^2, обозначив $k=\dfrac{x}{y}$. Получится уравнение

$$k^2-11k+30=0,$$

у которого корни 5 и 6.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. Сколько способов выбрать два натуральных числа x и y, где $x \leqslant y$, наименьшее общее кратное которых равно 4 000?

Ответ: 39.

Решение. 1) Если $y=4000$, то x — произвольный делитель 4000. Поскольку $4000=2^5\cdot 5^3$, имеем

$$x=2^i\cdot 5^j,$$

где $i=0$, 1, 2, 3, 4 или 5, а $j=0$, 1, 2 или 3. Всего имеем $6\cdot 4=24$ значений числа x.

2) Если $y<4000$, одно из чисел имеет вид $2^5\cdot 5^j$, где $j=0,1$ или 2, а другое $2^i\cdot 5^3$, где $i=0,1,2,3$ или 4. Здесь всего $3\cdot 5=15$ вариантов.

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Муравей сидит в вершине прямоугольного параллелепипеда с длинами рёбер 3, 4 и 7 см. Сможет ли он, двигаясь по поверхности параллелепипеда со скоростью 1 см/с, добраться до противоположной вершины менее чем за 10 секунд?

Ответ: да.

Решение. Найдём длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда. Он проходит по двум смежным граням. Развёртка этих граней — прямоугольник. Здесь возможны три варианта в зависимости от длины общего ребра этих граней:

$$3 \times (4+7), \quad 4 \times (3+7), \quad 7 \times (3+4).$$

Наименьшее расстояние между двумя противоположными вершинами прямоугольника — длина его диагонали. Наименьшую длину имеет диагональ третьего прямоугольника. Она равна $\sqrt{98}$ и меньше 10.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. Решите уравнение $x^{12} + 2x^2 + 1 = 4x^4$.

Ответ: ± 1.

Первое решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для четырёх чисел,

$$\frac{x^{12} + x^2 + x^2 + 1}{4} \geqslant \sqrt[4]{x^{12} \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot 1} = x^4.$$

По условию, имеем равенство. Оно имеет место только в случае равенства всех слагаемых: $x^{12} = x^2 = 1$. Отсюда ответ.

Второе решение. Воспользуемся дважды неравенством $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$:

$$x^{12} + 1 \geqslant 2x^6, \quad 2x^6 + 2x^2 \geqslant 2 \cdot 2x^4,$$

откуда $x^{12} + 2x^2 + 1 \geqslant 4x^4$. По условию, имеем равенство. Поскольку

$$a^2 + b^2 = 2ab \iff a = b,$$

получаем $x^{12} = x^2 = 1$. Отсюда ответ.

Третье решение. Замена $t = x^2$. Получаем уравнение

$$t^6 - 4t^2 + 2t + 1 = 0.$$

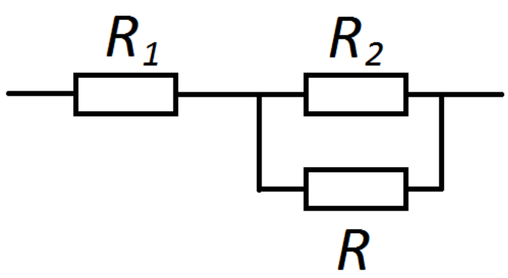
Его можно представить в виде

$$(t-1)^2(t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 4t + 1) = 0.$$

Единственное неотрицательное решение $t = 1$. Отсюда $x = \pm 1$.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если только угадан ответ, но не показано, что нет других решений, 2 б.

5. (*20 баллов*) В схеме, представленной на рисунке, сопротивления R_1=30 Ом и R_2=70 Ом. При каком значении сопротивления R выделяемая на нём мощность практически не будет зависеть от малых изменений этого сопротивления? Напряжение, подаваемое на данную схему, постоянно.



Ответ: 21 Ом.

Решение. Мощность практически не будет зависеть от малых изменений этого сопротивления, следовательно, мы ищем значение сопротивления, при котором выделяемая мощность максимальна. **(4 балла)**

Общее сопротивление цепи $R_1 + \frac{R_2 R}{R_2+R}$. **(3 балла)**

Общий ток в цепи $\frac{U}{R_1+\frac{R_2 R}{R_2+R}}$. **(3 балла)**

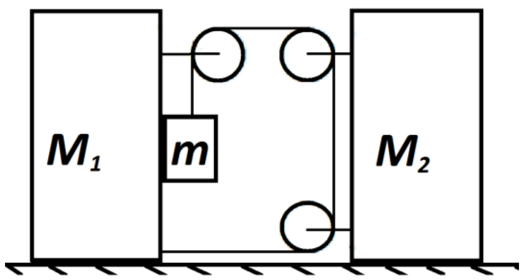
Ток, текущий через сопротивление R, равен $\frac{U}{R_1+\frac{R_2 R}{R_2+R}} \cdot \frac{R_2}{R_2+R}$. **(3 балла)**

Мощность, выделяемая на этом резисторе, определяется выражением

$(\frac{U}{R_1+\frac{R_2 R}{R_2+R}} \cdot \frac{R_2}{R_2+R})^2 \cdot R$. **(3 балла)**

Максимум этой функции достигается при $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = 21\ Ом$. **(4 балла)**

6. (*15 баллов*) Определите ускорения всех тел в системе, показанной на рисунке. Известны массы тел M_1=4 кг, M_2=10 кг, m=1 кг. Нить невесомая и нерастяжимая. Блоки невесомые. Трением пренебречь.



Ответ: $a_1 = \frac{20}{11}$ м/с, $a_2 = \frac{10}{11}$ м/с, $a \approx \frac{122}{11}$ м/с.

Решение. Второй закон Ньютона. Для первого тела с грузом в проекции на горизонтальное направление $2T = (M_1 + m)a_1$, **(2 балла)**

Для второго тела в проекции на горизонтальное направление $2T = M_2a_2$, **(1 балл)**

Для груза в проекции на вертикальное направление $T - mg = -ma_y$. **(2 балла)**

С учётом нерастяжимости нити, получаем, что $a_y = 6a_2$. **(2 балла)**

Решая данную систему, получаем: $a_1 = 2a_2 = \frac{20}{11}$ м/с, **(2 балла)**

$a_2 = \frac{10}{11}$ м/с , **(2 балла)**

$a_y = \frac{60}{11}$ м/с. **(2 балла)**

Полное ускорение груза $a = \sqrt{a_1^2 + a_y^2} \approx 6{,}32$ м/с. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Танк, двигаясь по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v_0=20 м/с, производит выстрел по ходу своего движения. Ствол пушки в этот момент располагался под углом α=30^O к горизонту. Через 10 секунд после выстрела цель, двигавшаяся по той же горизонтальной поверхности со скоростью $v_ц$=10 м/с, была поражена. Ускорение свободного падения считайте равным g=10 м/с^2. Найдите скорость $v_с$, с которой снаряд вылетает из ствола. Определите расстояние S между танком и целью в момент выстрела и радиус R зоны поражения, которую обеспечит танк, стоящий неподвижно.

Ответ: $v_с$=100 м/с; 966 м $\leq S \leq$ 1166 м; R=1000 м.

Решение. Уравнения движения для снаряда: $x=(v_0+v_с\cos\alpha)t$, **(2 балла)**

$y=v_с\sin\alpha t-gt^2/2$. **(2 балла)**

С учётом того, что y=0, получаем начальную скорость снаряда: $v_с$=100 м/с. **(2 балла)**

Дальность полёта снаряда составила: $x=(20+50\sqrt{3})\cdot 10\approx 1066$ метров. **(2 балла)**

Следовательно, расстояние между танком и целью в момент выстрела составляло: $S=x\pm v_ц\cdot t=1066\pm 10\cdot 10$, **(1 балл)**

То есть, 966 м $\leq S \leq$ 1166 м. **(1 балл)**

Максимальная дальность полёта появляется при угле наклона ствола в 45^O. **(2 балла)**

Радиус зоны поражения, которую обеспечивает неподвижный танк, составляет:

$R=(v_с^2)/g$=1000 м. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

11 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. В 2052 г. в марте воскресений больше, чем понедельников. На какой день недели выпадет 1 июня 2052 г.?

Ответ: на субботу.

Решение. За воскресеньем идёт понедельник. Если в каком-то месяце воскресений оказалось больше, чем понедельников, то последний день месяца — воскресенье. Итак, 31 марта 2052 г. — воскресенье. Воскресенье выпадает также на 28 апреля и 26 мая, а 1 июня будет суббота.

Оценивание. За верное решение 11 баллов. Если определено, что 31 марта 2052 г. — воскресенье, но ошибка в дальнейших выкладках, 5 баллов.

2. Пусть n — натуральное число. Докажите, что дробная часть числа $\sqrt{4n^2+n}$ меньше $1/4$. (Дробная часть числа равна разности самого числа и его целой части. Целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данного числа.)

Доказательство. Легко проверить, что

$$2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n+1.$$

Поэтому $2n$ — целая часть данного числа, а $\sqrt{4n^2+n}-2n$ — его дробная часть. Оценим сверху эту разность:

$$\sqrt{4n^2+n}-2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} < \frac{n}{2n+2n} = \frac{1}{4}.$$

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если верно определена целая часть числа (без дальнейшего продвижения), 3 б.

3. Муравей сидит в вершине прямоугольного параллелепипеда с длинами рёбер 2, 3 и 5 см. Сможет ли он, двигаясь по поверхности параллелепипеда со скоростью 1 см/с, добраться до противоположной вершины менее чем за 7 секунд?

Ответ: нет.

Решение. Найдём длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда. Он проходит по двум смежным граням. Развёртка этих граней — прямоугольник. Здесь возможны три варианта в зависимости от длины общего ребра этих граней: $2\times(3+5)$, $3\times(2+5)$, $5\times(2+3)$. Наименьшее расстояние между двумя противоположными вершинами прямоугольника — длина его диагонали. Наименьшую длину имеет диагональ третьего прямоугольника. Она равна $\sqrt{50}$ и больше 7.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. Существует ли такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(4)=1$, $f(9)=11$, а $f'(4)=0$?

Ответ: нет.

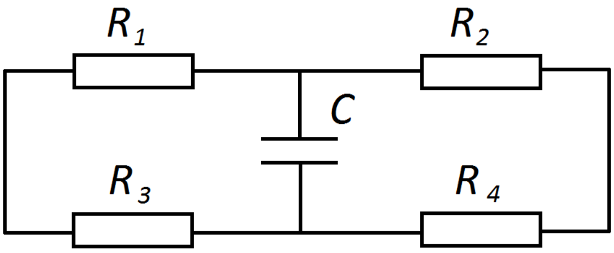
Решение. Предположим, что такой многочлен существует. Рассмотрим многочлен $g(x)=f(x+4)-1$. Он также имеет целые коэффициенты. При этом $g(0)=g'(0)=0$, $g(5)=10$. Тогда многочлен $g(x)$ имеет вид

$$g(x)=a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n.$$

Число $g(5)$ должно делиться на 5^2. Противоречие.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*20 баллов*) Электрическая цепь, состоит из конденсатора ёмкостью C и резисторов R_1, R_2, R_3 и R_4. Цепь находится в магнитном поле, магнитная индукция которого равномерно увеличивается со временем. Известно, что установившийся ток через резистор R_1 равен I_1. Определите установившийся заряд конденсатора.



Ответ: $q = \frac{C}{2} I_1 [R_2 + R_4 - R_1 - R_3]$.

Решение. Запишем правила Кирхгофа. Для левого контура:

$\varepsilon = I_1(R_1 + R_3) + U_C = I_1(R_1 + R_3) + \frac{q}{C}$. **(5 баллов)**

Для общего контура: $2\varepsilon = I_1(R_1 + R_3) + I_2(R_2 + R_4)$. **(5 баллов)**

В установившемся режиме ток через конденсатор не течёт, следовательно, $I_1 = I_2$. **(2 балла)**

Получаем, что: $2\left[I_1(R_1 + R_3) + \frac{q}{C}\right] = I_1(R_1 + R_3) + I_2(R_2 + R_4)$. **(1 балл)**

Окончательный результат: $q = \frac{C}{2} I_1 [R_2 + R_4 - R_1 - R_3]$. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) С пятью молями одноатомного идеального газа проводят процесс, в ходе которого температура газа зависит от его работы следующим образом: $T = T_0 - \frac{RA}{\alpha}$, где T_0 – начальная температура газа, $R = 8,31\ \frac{Дж}{моль \cdot K}$ – газовая постоянная, α=const. При каком значении α теплоёмкость в этом процессе будет равна нулю?

Ответ: $\propto \approx 518$.

Решение. Теплоёмкость газа: $C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU + dA}{dT} = \frac{\frac{3}{2}\vartheta R dT + dA}{dT} = \frac{3}{2}\vartheta R + \frac{dA}{dT}$. **(3 балла)**

Работа газа: $A = \frac{\propto}{R} T_0 - \frac{\propto}{R} T$. **(3 балла)**

Следовательно, $\frac{dA}{dT} = -\frac{\propto}{R}$. **(3 балла)**

Получаем: $C = \frac{3}{2}\vartheta R - \frac{\propto}{R} = 0$. **(3 балла)**

Окончательно: $\propto = \frac{3}{2}\vartheta R^2 \approx 518$. **(3 балла)**

7. (*15 баллов*) С помощью плосковыпуклой тонкой линзы, оптическая сила которой в воздухе F=10 Дптр, получают изображение предмета на экране, расположенном параллельно линзе на расстоянии 40 см от неё. Линза расположена горизонтально, плоской стороной вниз. Экран расположен над линзой. Пространство под линзой заполняют водой таким образом, что теперь линза своей плоской стороной касается воды. Предмет перемещают так, чтобы на экране снова появилось его резкое изображение. Определите конечное увеличение линзы. Показатель преломления материала линзы n_1=1,7, воды n_2=1,3.

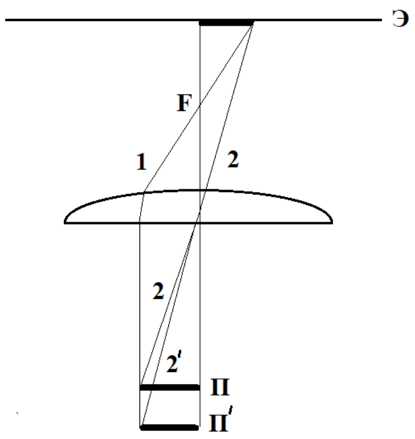
Ответ: 3.

Решение. Формула тонкой линзы для ситуации, когда она располагается целиком в воздухе: $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$. **(3 балла)**

Расстояние от линзы до предмета в этом случае: $d = \frac{f}{Df-1} = \frac{0,4}{3}$ м. **(2 балла)**

Увеличение в этом случае $\Gamma = \frac{f}{d} = 3$. **(2 балла)**

После добавления воды под линзой, получаем следующую оптическую схему: **(5 баллов)**



Из-за обратимости хода луча, луч 1 идёт по той же траектории, что и раньше.

Луч 2 теперь преломляется так, что предмет должен стоять дальше от линзы

То есть размеры изображения и предмета остаются неизменными, следовательно, увеличение также не изменилось. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

11 класс **Заключительный этап** **2019–2020**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. В 2053 г. в марте понедельников больше, чем вторников. На какой день недели выпадет 1 июня 2053 г.?

Ответ: на воскресенье.

Решение. За понедельником идёт вторник. Если в каком-то месяце понедельников оказалось больше, чем вторников, то последний день месяца — понедельник. Итак, 31 марта 2053 г. — понедельник. Понедельник выпадает также на 28 апреля и 26 мая, а 1 июня будет воскресенье.

Оценивание. За верное решение 11 баллов. Если определено, что 31 марта 2052 г. — воскресенье, но ошибка в дальнейших выкладках, 5 баллов.

2. Пусть n — натуральное число. Докажите, что дробная часть числа $\sqrt{9n^2+n}$ меньше $1/6$. (Дробная часть числа равна разности самого числа и его целой части. Целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данного числа.)

Доказательство. Легко проверить, что

$$3n < \sqrt{9n^2+n} < 3n+1.$$

Поэтому $3n$ — целая часть данного числа, а $\sqrt{9n^2+n}-3n$ — его дробная часть. Оценим сверху эту разность:

$$\sqrt{9n^2+n}-3n = \frac{n}{\sqrt{9n^2+n}+3n} < \frac{n}{3n+3n} = \frac{1}{6}.$$

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если верно определена целая часть числа (без дальнейшего продвижения), 3 б.

3. Муравей сидит в вершине прямоугольного параллелепипеда с длинами рёбер 3, 4 и 7 см. Сможет ли он, двигаясь по поверхности параллелепипеда со скоростью 1 см/с, добраться до противоположной вершины менее чем за 10 секунд?

Ответ: да.

Решение. Найдём длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда. Он проходит по двум смежным граням. Развёртка этих граней — прямоугольник. Здесь возможны три варианта в зависимости от длины общего ребра этих граней: $3\times(4+7)$, $4\times(3+7)$, $7\times(3+4)$. Наименьшее расстояние между двумя противоположными вершинами прямоугольника — длина его диагонали. Наименьшую длину имеет диагональ третьего прямоугольника. Она равна $\sqrt{98}$ и меньше 10.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. Существует ли такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(19)=20$, $f(24)=35$, а $f'(19)=0$?

Ответ: нет.

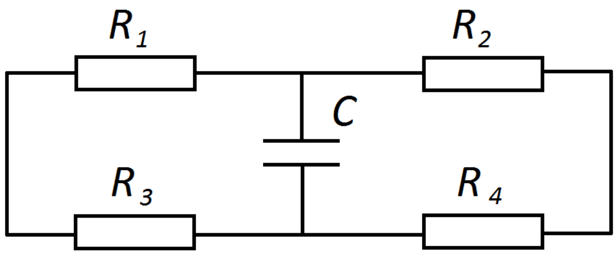
Решение. Предположим, что такой многочлен существует. Рассмотрим многочлен $g(x)=f(x+19)-20$. Он также имеет целые коэффициенты. При этом $g(0)=g'(0)=0$, $g(5)=15$. Тогда многочлен $g(x)$ имеет вид

$$g(x)=a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n.$$

Число $g(5)$ должно делиться на 5^2. Противоречие.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*20 баллов*) Электрическая цепь, состоит из конденсатора ёмкостью C и резисторов R_1, R_2, R_3 и R_4. Цепь находится в магнитном поле, магнитная индукция которого равномерно увеличивается со временем. Известно, что установившийся ток через резистор R_1 равен I_1. Определите установившийся заряд конденсатора.



Ответ: $q = \frac{C}{2} I_1 [R_2 + R_4 - R_1 - R_3]$.

Решение. Запишем правила Кирхгофа.

Для левого контура: $\varepsilon = I_1(R_1 + R_3) + U_C = I_1(R_1 + R_3) + \frac{q}{C}$. **(5 баллов)**

Для общего контура: $2\varepsilon = I_1(R_1 + R_3) + I_2(R_2 + R_4)$. **(5 баллов)**

В установившемся режиме ток через конденсатор не течёт, следовательно, $I_1 = I_2$. **(2 балла)**

Получаем, что: $2\left[I_1(R_1 + R_3) + \frac{q}{C}\right] = I_1(R_1 + R_3) + I_2(R_2 + R_4)$. **(1 балл)**

Окончательный результат: $q = \frac{C}{2} I_1 [R_2 + R_4 - R_1 - R_3]$. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) С двумя молями двухатомного идеального газа проводят процесс, в ходе которого температура газа зависит от его работы следующим образом: $T = T_0 - \frac{RA}{\alpha}$, где T_0 – начальная температура газа, $R = 8,31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль·К}}$ – газовая постоянная, α=const. При каком значении α теплоёмкость в этом процессе будет равна нулю?

Ответ: $\propto \approx 345$.

Решение. Теплоёмкость газа: $C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU + dA}{dT} = \frac{\frac{5}{2}\vartheta R dT + dA}{dT} = \frac{5}{2}\vartheta R + \frac{dA}{dT}$. **(3 балла)**

Работа газа: $A = \frac{\propto}{R} T_0 - \frac{\propto}{R} T$. **(3 балла)**

Следовательно, $\frac{dA}{dT} = -\frac{\propto}{R}$. **(3 балла)**

Получаем: $C = \frac{5}{2}\vartheta R - \frac{\propto}{R} = 0$. **(3 балла)**

Окончательно: $\propto = \frac{5}{2}\vartheta R^2 \approx 345$. **(3 балла)**

7. (*15 баллов*) С помощью плосковыпуклой тонкой линзы, оптическая сила которой в воздухе F=10 Дптр, получают изображение предмета на экране, расположенном параллельно линзе на расстоянии 40 см от неё. Линза расположена горизонтально, плоской стороной вниз. Экран расположен над линзой. Пространство под линзой заполняют водой таким образом, что теперь линза своей плоской стороной касается воды. Предмет перемещают так, чтобы на экране снова появилось его резкое изображение. Определите конечное увеличение линзы. Показатель преломления материала линзы n_1=1,6, воды n_2=1,4.

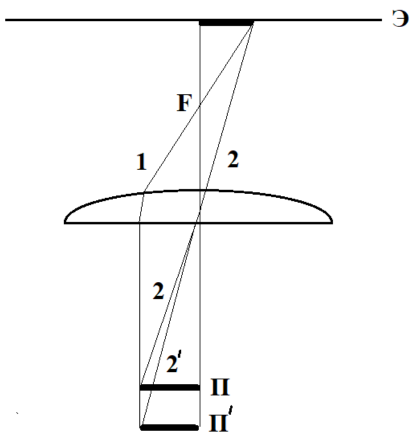
Ответ: 3.

Решение. Формула тонкой линзы для ситуации, когда она располагается целиком в воздухе: $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$. **(3 балла)**

Расстояние от линзы до предмета в этом случае: $d = \frac{f}{Df-1} = \frac{0,4}{3}$ м. **(2 балла)**

Увеличение в этом случае $\Gamma = \frac{f}{d} = 3$. **(2 балла)**

После добавления воды под линзой, получаем следующую оптическую схему: **(5 баллов)**



Из-за обратимости хода луча, луч 1 идёт по той же траектории, что и раньше.

Луч 2 теперь преломляется так, что предмет должен стоять дальше от линзы.

То есть размеры изображения и предмета остаются неизменными, следовательно, увеличение также не изменилось. **(3 балла)**