Отборочный этап

7-8 классы **2019-2020**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*15 баллов*) Ваня, Даша и Миша пошли в лес по грибы. Они собрали разное количество грибов. Ваня отдал третью часть своих грибов Даше, после этого Даша отдала четверть грибов Мише, и, наконец, Миша отдал десятую часть всех своих грибов Ване. В итоге оказалось, что у всех детей по 18 грибов в корзинках. Сколько грибов собрал первоначально Ваня?

Ответ: 24.

Решение. Начнём с конца. На предпоследнем шаге количество грибов у детей соответственно: 16, 18, 20. Перед перекладыванием грибов от Даши к Мише: 16, 24, 14. И в начале: 24, 16, 14. Значит, Ваня собрал 24 гриба.

2. (*15 баллов*) На какое натуральное число можно сократить дробь $\frac{19n+20}{14n+15}$, если известно, что она сократима и n – натуральное число?

Ответ: 5.

Решение. Сначала выделим целую часть $\frac{19n+20}{14n+15}=\frac{(14n+15)+(5n+5)}{14n+15}=$ $=1+\frac{5n+5}{14n+15}$. Дробь $\frac{5n+5}{14n+15}$ сократима, тогда и только тогда, когда сократима дробь $\frac{14n+15}{5n+5}$. Имеем $\frac{14n+15}{5n+5}=3-\frac{n}{5n+5}$. Так как НОД($n$;$5n+5$) равен либо 1, либо 5, то дробь сократима на 5.

3. (*20 баллов*) Человек вышел подышать свежим воздухом. Первый участок равный половине всего пути он прошёл за 20 мин. Второй участок длиной 3 км был преодолён за полчаса. И на последний участок длиной 2000 м времени было затрачено столько же, сколько в сумме на первые два участка. Определите его среднюю скорость за время прогулки.

Ответ: 6 км/ч.

Решение: Длина первого участка: $S_1=S_2+S_3=3+2=5$ км. Время, затраченное на последний участок: $t_3=t_1+t_2=(1/3)+(1/2)=5/6$ часа. Средняя скорость за всю прогулку:

$$v_{\text{ср}}=\frac{S}{t}=\frac{5+3+2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}=6\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

4. (*15 баллов*) Расстояние L=120 км автомобиль проехал за время T=2 часа. Его скорость на первом, хорошем участке пути была на 5 км/ч больше средней скорости, а на втором, плохом участке, на 5 км/ч меньше средней скорости. Какова длина хорошего участка пути?

Ответ: 65 км.

Решение. Средняя скорость: $v_{ср}=L/T=120/2=60$ км/ч. С другой стороны:

$$v_{ср}=\frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}=\frac{120}{\frac{S_1}{65}+\frac{120-S_1}{55}}.$$

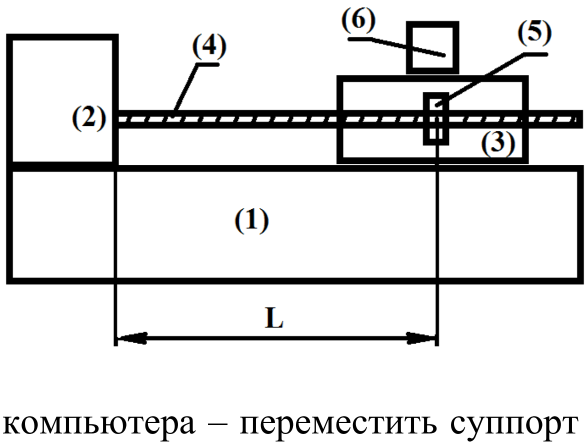
В результате, получаем: $S_1=65$ км.

5. (*15 баллов*) Спидометр автомобиля американского производства размечен в милях в час. Водитель видит на спидометре число 40. Он знает, что до пункта назначения ему ещё остаётся ехать 30 км. Через сколько минут он доберётся до места? 1 миля = 1,60934 км.

Ответ: ≈28 минут

Решение. Скорость автомобиля: $v=40\frac{\text{миль}}{\text{час}}=\frac{1{,}60934\text{ км}}{60\text{ минут}}=1{,}073\frac{\text{км}}{\text{мин}}$. Время до цели: $t=\frac{S}{v}=\frac{30\text{ км}}{1{,}073\frac{\text{км}}{\text{мин}}}\approx 28$ минут.

6. (*20 баллов*) Компьютеризированный токарный станок состоит из трех частей в виде прямоугольных параллелепипедов: станины (1), коробки с электродвигателями (2) и суппорта (3). Суппорт (3) может перемещаться вправо и влево, скользя по станине (1). Такое скольжение обеспечивается вращением винта (4) от закрепленного в коробке (2) электродвигателя. На винт (4) свободно навинчена гайка (5), жестко закрепленная в суппорте (3). Таким образом, вращение винта (4) приводит к перемещению гайки (5) и связанного с ней суппорта (3) вправо и влево. В данный момент времени расстояние от гайки (5) до торца коробки (2) равно L=1000 мм. Все детали станка являются абсолютно жесткими, за исключением упругого винта. На суппорте сверху жестко закреплен резцедержатель (6) массой m=10 кг. Компьютер по программе дает команду двигателю повернуть винт (4) и, таким образом, переместить суппорт (3) с гайкой (5) вправо на расстояние S=2 мм. На какое расстояние ΔS на самом деле переместится суппорт с гайкой, если продольная жесткость винта (4) на указанном расстоянии L равна k=10000 Н/мм? Масса суппорта (3) равна Mc=90 кг, коэффициент трения суппорта о станину μ=0.1. Ускорение свободного падения принять равным $g=10м/с^2$.



Ответ: ΔS=1.99 мм.

Решение. Команда от компьютера – переместить суппорт (3) на расстояние S=2 мм. Такое перемещение обеспечивает сила F воздействия винта (4) на гайку (5). Однако сказано, что винт станка упругий. На винт действует от гайки та же самая сила F, которая будет сжимать винт. Согласно закону Гука винт в правой точке сожмется на расстояние x=F/k. Сила F определяется сопротивлением суппорта перемещению вправо. Такая сила будет равна силе трения суппорта (3) о станину (1) Fтр = F. Сила трения определяется от силы нормального давления N. Fтр= μ*N. Нормальная сила N равна весу суппорта и резцедержателя N=(Mc+m)*g. Тогда сжатие винта равно: x= μ*(Mc+m)*g /k или x=0.1*(90+10)*10/10000=0.01мм. Следовательно, на самом деле суппорт переместится вправо на расстояние ΔS=S–x или ΔS=2–0.01 =1.99 мм.

Отборочный этап

9-11 классы **2019-2020**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*15 баллов*) Четыре квалифицированных работника должны выполнить пять разных работ, причём каждый из них должен выполнить хотя бы одну работу, а на каждую работу назначается ровно один работник. Сколько способов назначить работников на работы?

Ответ: 240.

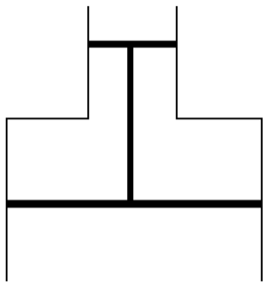
Решение. Из условия следует, что какой-то работник должен выполнить две работы (остальные по одной). Этого работника можно выбрать 4 способами, а две работы для него $C_5^2 = 10$ способами. Оставшиеся 3 работы среди остальных работников распределяются 3!=6 способами. По правилу произведения, количество возможных распределений работ равно $4 \cdot 10 \cdot 6 = 240$.

2. (*15 баллов*) Медианы, проведённые из вершин *A* и *B* треугольника *ABC*, друг другу перпендикулярны. Найдите площадь квадрата со стороной *AB*, если *BC*=33, *AC*=21.

Ответ: 306.

Решение. Пусть *D* – середина *BC*, *E* – середина *AC*, *M* – точка пересечения медиан. Положим *MD*=*a*, *ME*=*b*, *AC*=α, *BC*=β. Тогда *AM*=2*a*, *BM*=2*b*. Из прямоугольных треугольников *BMD* и *AME* соответственно имеем $a^2 + 4b^2 = BD^2 = (\beta/2)^2$ и $4a^2 + b^2 = AE^2 = (\alpha/2)^2$. Сложив полученные равенства, после деления на 5 и умножения на 4 получим $AB^2 = AM^2 + BM^2 = 4(a^2 + b^2) = (\alpha^2 + \beta^2)/5$. Подставляя α=21, β=33, получаем ответ.

3. (*20 баллов*) Есть вертикальная труба переменного сечения с гладкими стенками. Площадь сечения верхней части $S_в$=1 см^2, в нижней части площадь сечения в 3 раза больше. Поршни – невесомые. Из области между поршнями откачан воздух. Определите массу стержня, соединяющего поршни, если известно, что система находится в равновесии. Атмосферное давление p_a=10^5 Па, ускорение свободного падения принять равным *g*=10 м/с^2.



Ответ: 2 кг.

Решение. Условие равновесия:

$$mg + F_{\text{давления на верхний поршень}} = F_{\text{давления на нижний поршень}}.$$

$$mg + p_a S_в = p_a 3 S_в.$$

Получаем: $m = \frac{p_a 2 S_в}{g} = \frac{10^5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{10} = 2$ кг.

4. (*15 баллов*) Предмет располагается на расстоянии 20 см от тонкой собирающей линзы. После того, как предмет передвинули на 5 см к линзе, оказалось, что расстояние от линзы до изображения осталось прежним. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ: ≈17,1 см.

Решение. Ситуация, описанная в условии, возможна, если изображение сначала было действительным, а потом стало мнимым. Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{20} + \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{15} - \frac{1}{f}.$$

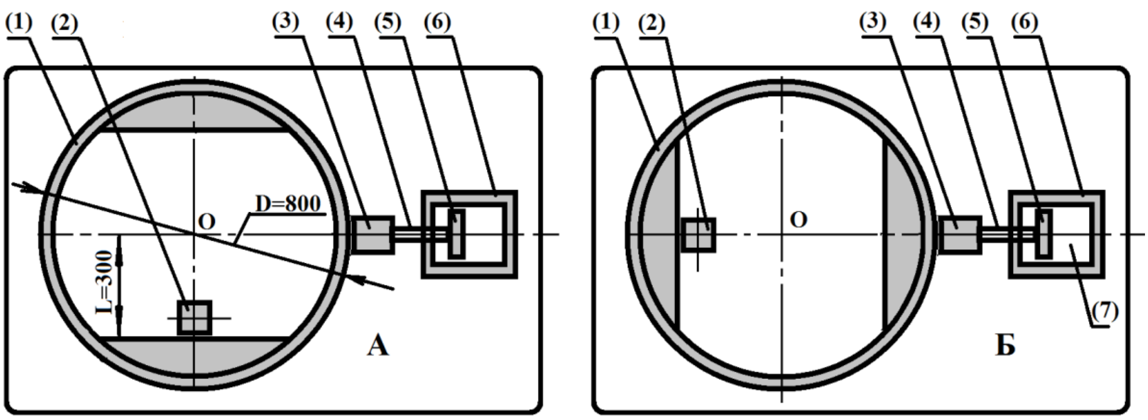
Решая эту систему уравнений, получаем: F=120/7≈17,1 см.

5. (*15 баллов*) Мяч бросили с поверхности Земли под углом 45^{O} со скоростью v_0=20 м/с. За какое время вектор скорости мяча повернётся на угол 90^{O}? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: ≈2,83 с.

Решение. Проекции скорости на оси X и Y меняются по закону:
$v_x=v_0\cos45^{O}=10\sqrt{2}$, $v_y=v_0\sin45^{O}-gt=10\sqrt{2}-10t$. В искомый момент времени:
$v_x=-v_y$. В результате получаем: $t=2\sqrt{2}$≈2,83 с.

6. (*20 баллов*) Современные компьютеризированные пяти-координатные фрезерные станки имеют пятую координату – поворот круглого стола в вертикальной плоскости (см. рис. А). На круглом поворотном столе (1), на его рабочей плоскости закрепляется кубическая заготовка (2). Размер стороны куба H=200 мм. Диаметр стола D=800 мм, Расстояние от горизонтальной оси поворота O стола до его опорной плоскости L=300 мм. После поворота стола вокруг точки O на 90 градусов по часовой стрелке заготовка оказывается слева (см. рис. Б). В этот момент начинается обработка, и стол от поворота фиксируется прижимом (3) гидроцилиндра (6). При фиксации поршень (5) площадью S=10000 мм^2 со штоком (4) и прижимом (3) перемещаются влево. Перемещение обеспечивается давлением масла в полости (7). Каково должно быть давление P в такой полости (7) для удержания заготовки со столом, если коэффициент трения между прижимом и диском стола равен μ=0.1? Ускорение свободного падения принять равным g=10 м/с^2. Плотность материала заготовки ρ=5 г/см^3.



Ответ: 200000 Па или 200 КПа

Решение. Чтобы стол не повернулся под действием веса заготовки, момент силы трения должен уравновесить момент от веса заготовки: $M*g*(L–H/2) = F_{тр}*(D/2)$, где $F_{тр}= \mu*F$ и где $F=S*P$.

Таким образом: $P=[M*g*(L–H/2)/(D/2)/\mu]/S$. Масса кубической заготовки $M=\rho*H*H*H$. Тогда:

$P=[\rho*H*H*H*g*(L–H/2)/(D/2)/\mu]/S$

Масса заготовки $M=\rho*H*H*H$ или $M=0.005*20*20*20=40$ кг.

$P=40*10*(300–100)/400 /0.1/0.01=200000$ Па или $P=200$ КПа.