Вариант 1

1. (*12 баллов*) Найдите наименьшее натуральное значение n, удовлетворяющее уравнению $\sin n^o = \sin(2021n)^o$.

Ответ: 18.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{2021n-n}{2}\right)^{\mathrm{o}} = 0;\\ \cos\left(\frac{2021n+n}{2}\right)^{\mathrm{o}} = 0.\end{array}\right.$ Получаем $\left[\begin{array}{l}(1010n)^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}}\cdot k;\\ (1011n)^{\mathrm{o}} = 90^{\mathrm{o}}+180^{\mathrm{o}}\cdot m,\end{array}\right.$ где $k,m \in$ **N**. Далее $\left[\begin{array}{l}101n = 18k,\\ 337n = 30(2m+1).\end{array}\right.$ Так как 101 и 337 – простые числа, то в первом уравнении наименьшее n=18, а во втором – наименьшее значение n=30.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В правильной четырёхугольной пирамиде *ABCDS* площадь основания совпадает с площадью боковой грани и равна 1. *M* – точка пересечения медиан грани *CDS*. Точка *N* лежит на прямой *AM* и *AN*:*NM*=3:4. Найдите сумму расстояний от точки *N* до всех граней пирамиды.

Ответ: $\sqrt{15}/2$.

Решение. Из условия задачи сторона основания пирамиды равна 1, апофема боковой грани – 2. Тогда высота пирамиды $h = \sqrt{4-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Объём пирамида *ABCDS* равен $V = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

С другой стороны, объём пирамиды можно найти как сумму объёмов пяти пирамид, вершина которых – точка *N*, а основания – грани пирамиды *ABCDS*. Тогда $V = \frac{1}{3}(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)$, где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – расстояния от точки *N* до граней пирамиды *ABCDS* (или высоты маленьких пирамид). Приравнивая объёмы, получаем ответ. Заметим, что сумма расстояний не зависит от расположения точки внутри данной пирамиды.

Оценивание. Если правильно найдена высота пирамиды, то 2 балла. Найдены правильно отдельно расстояния до граней – по 2 балла за каждое. За верное решение – 12 баллов.

3. (*12 баллов*) В зависимости от параметра $a > 1$ найдите решение системы

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} = a^2-1,\\ y^{(x-a)^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.\end{array}\right.$$

Ответ: *x*=*y*=*a*.

Решение. Из первого уравнения получим, что переменные больше 1 (отрицательные отпадают сразу). Логарифмируем второе уравнение по основанию y:

$$\log_y y^{(x-a)^2} = \log_y \left(\frac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.$$

Получаем: $(x-a)^2 = (\log_x y - 1)\log_y\left(\frac{x}{y}\right) = (\log_x y - 1)(\log_y x - 1)$. В правой части – неположительное число, значит $x=y$ и $x=a$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если ответ угадан, то 2 балла.

4. (*14 баллов*) В бесконечной последовательности цифр 2, 0, 1, 9, … каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предшествующих четырёх цифр этой последовательности. Встретятся ли в этой последовательности:

а) подряд числа 4, 3, 2, 1; *б*) вторично четвёрка 2, 0, 1, 9 (в этом же порядке)?

Ответ: *а*) нет; *б*) да.

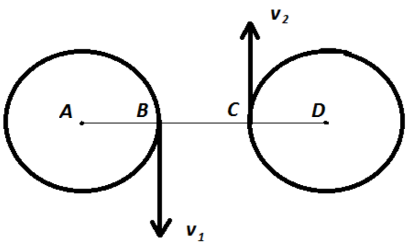
Решение. *а*) Будем записывать только чётности (чётная – пишем Ч, нечётная – Н) цифр этой последовательности, начиная с пятой. Получим:

Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н,… и т.д. Последовательность чётностей данной последовательности 4, 3, 2, 1 имеет вид Ч, Н, Ч, Н, и её нет в этом ряде.

б) Рассмотрим упорядоченные четвёрки из всевозможных цифр. На каждое место в такой четвёрке можно поставить любую из 10 цифр. Значит, всего разных четвёрок существует 10^4. Возьмём начало данной нам последовательности, содержащее 10^4+4 цифры. Из неё можно выбрать 10^4+1 четвёрку цифр, идущих в ней подряд. Так как всего таких **разных** четвёрок 10^4, то (по принципу Дирихле) из этих 10^4+1 четверок есть хотя бы две одинаковые. Пусть это $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$ ($k<m$). В них, как мы заметили, $a_k = a_m$, $a_{k+1} = a_{m+1}$, $a_{k+2} = a_{m+2}$, $a_{k+3} = a_{m+3}$. Данная последовательность построена так, что по четырём её идущим подряд элементам $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ предыдущий элемент a_{k-1} ими однозначно определяется по формуле: $a_{k-1} = a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2}$ (равенство по модулю 10). Тогда $a_{k-1} = a_{m-1}$. Это значит, что если равны 2 четвёрки $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$, то равны 2 предыдущие четвёрки $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ $a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}$. Тогда, двигаясь по данной последовательности влево, к её началу, получим, что a_1, a_2, a_3, a_4 совпадает с $a_{m-k+1}, a_{m-k+2}, a_{m-k+3}, a_{m-k+4}$. Это требовалось доказать, так как эти последовательности разные ($k<m$).

Оценивание. За верное доказательство пункта *а*) – 6 баллов, за верное решение пункта *б*) – 8 баллов.

5. (*10 баллов*) Два автомобиля двигаются по окружностям одинакового радиуса с одинаковыми по модулю скоростями $v_1 = v_2 = v$. Известно, что $AB=BC=CD=R$. Определите скорость v_{21} второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем в момент времени, указанный на рисунке.



Ответ: $3v$.

Решение. Переносная скорость точки C в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем: $v_C = \frac{AC}{AB} v_1 = 2v.$ **(5 баллов)**

При этом она направлена вертикально вниз. Следовательно, скорость второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым:

$v_{21} = v_2 + v_C = v + 2v = 3v.$ **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) К колесу радиусом R=0,1 м с горизонтально расположенной осью прикрепили на ободе маленький грузик массой m=1 кг. Найдите массу колеса M, предполагая её однородно распределённой по ободу, если частота малых колебаний колеса вокруг оси равна ω=5 рад/с. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 3 кг.

Решение. Выведем колёса из положения равновесия на угол α. Закон сохранения полной механической энергии:

$mgR(1 - \cos\alpha) + \frac{mv^2}{2} + \frac{MR^2\omega^2}{2} = const.$ **(5 баллов)**

С учётом того, что $v=\omega R$, продифференцируем это выражение по времени:

$mgR\sin\alpha \cdot \omega + \frac{mR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon + \frac{MR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon = 0.$ **(5 баллов)**

Так как для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$, то получаем, что частота малых колебаний:

$\omega = \sqrt{\frac{mg}{R(m+M)}}\,.$ **(3 балла)**

В результате масса колеса: $M = \frac{mg}{\omega^2 R} - m = \frac{1 \cdot 10}{5^2 \cdot 0{,}1} - 1 = 3$ кг . **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Два моля идеального газа находятся в цилиндрическом вертикальном сосуде под лёгким поршнем. Известно, что при изменении температуры газа от 27°C до 127 °C местоположение поршня не меняется. Определите объём занимаемый газом в этом температурном интервале. Атмосферное давление 10^5 Па.

Ответ: 0,058 м^3.

Решение. Условия равновесия для начального и конечного состояний газа:

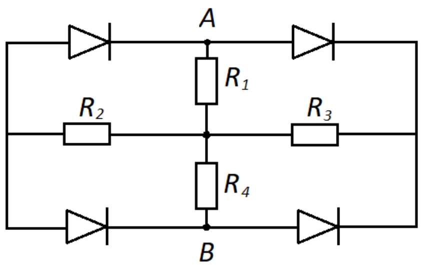
$p_a S + F_{\text{тр}} = p_1 S,$ **(4 балла)**

$p_a S - F_{\text{тр}} = p_2 S.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $2p_a = p_1 + p_2 = \frac{\vartheta R}{V}(T_1 + T_2).$ **(3 балла)**

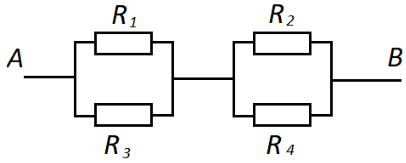
$V = \frac{\vartheta R}{2p_a}(T_1 + T_2) = \frac{2\cdot 8{,}31\cdot(300+400)}{2\cdot 10^5} \approx 0{,}058 \text{ м}^3.$ **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов R_1=1 Ом, R_2=2 Ом, R_3=3 Ом, и R_4=4 Ом. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками A и B в ситуации, когда к точке A подключают положительный полюс источника тока, а к точке B – отрицательный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.



Ответ: ≈2,08 Ом.

Решение. В предложенной ситуации получается следующая эквивалентная схема: **(5 баллов)**



Её общее сопротивление: $R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{1\cdot 3}{1+3} + \frac{2\cdot 4}{2+4} = \frac{25}{12} \approx 2{,}08$ Ом. **(5 баллов)**

Вариант 2

1. (*12 баллов*) Найдите наименьшее натуральное значение n, удовлетворяющее уравнению $\sin n^o + \sin(2021n)^o = 0$.

Ответ: 9.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{2021n+n}{2}\right)^{\mathrm{o}} = 0;\\ \cos\left(\frac{2021n-n}{2}\right)^{\mathrm{o}} = 0.\end{array}\right.$ Получаем $\left[\begin{array}{l}(1011n)^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}}\cdot k;\\ (1010n)^{\mathrm{o}} = 90^{\mathrm{o}}+180^{\mathrm{o}}\cdot m,\end{array}\right.$ где $k,m\in$ **N**. Далее $\left[\begin{array}{l}337n = 60k,\\ 101n = 9(2m+1).\end{array}\right.$ Так как 101 и 337 – простые числа, то в первом уравнении наименьшее n=60, а во втором – наименьшее значение n=9.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В правильной четырёхугольной пирамиде *ABCDS* площадь основания совпадает с площадью боковой грани и равна 4. M – точка пересечения медиан грани *CDS*. Точка N лежит на прямой *AM* и *AN*:*NM*=2:3. Найдите сумму расстояний от точки N до всех граней пирамиды.

Ответ: $\sqrt{15}$.

Решение. Из условия задачи сторона основания пирамиды равна 2, апофема боковой грани – 4. Тогда высота пирамиды $h = \sqrt{16-1}$=$\sqrt{15}$. Объём пирамида *ABCDS* равен $V = \frac{4\sqrt{15}}{3}$.

С другой стороны, объём пирамиды можно найти как сумму объёмов пяти пирамид, вершина которых – точка N, а основания – грани пирамиды *ABCDS*. Тогда $V = \frac{4}{3}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)$, где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – расстояния от точки N до граней пирамиды *ABCDS* (или высоты маленьких пирамид). Приравнивая объёмы, получаем ответ. Заметим, что сумма расстояний не зависит от расположения точки внутри данной пирамиды.

Оценивание. Если правильно найдена высота пирамиды, то 2 балла. Найдены правильно отдельно расстояния до граней – по 2 балла за каждое. За верное решение – 12 баллов.

3. (*12 баллов*) В зависимости от параметра $a > 2$ найдите решение системы

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-4}\sqrt{y^2-4} = a^2 - 4,\\ y^{(x-a)^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.\end{cases}$$

Ответ: x=y=a.

Решение. Из первого уравнения получим, что переменные больше 2 (отрицательные отпадают сразу). Логарифмируем второе уравнение по основанию y:

$$\log_y y^{(x-a)^2} = \log_y \left(\frac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.$$

Получаем: $(x-a)^2 = (\log_x y - 1)\log_y\left(\frac{x}{y}\right) = (\log_x y - 1)\left(\log_y x - 1\right)$. В правой части – неположительное число, значит $x=y$ и $x=a$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если ответ угадан, то 2 балла.

4. (*14 баллов*) В бесконечной последовательности цифр 2, 0, 2, 1, … каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предшествующих четырёх цифр этой последовательности. Встретятся ли в этой последовательности:

а) подряд числа 9, 8, 7, 6; *б*) вторично четвёрка 2, 0, 2, 1 (в этом же порядке)?

Ответ: *а*) нет; *б*) да.

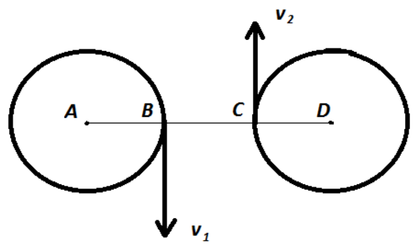
Решение. *а*) Будем записывать только чётности (чётная – пишем Ч, нечётная – Н) цифр этой последовательности, начиная с пятой. Получим:

Н, Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н,… и т.д. Последовательность чётностей данной последовательности 9, 8, 7, 6 имеет вид Н, Ч, Н, Ч, и её нет в этом ряде.

б) Рассмотрим упорядоченные четвёрки из всевозможных цифр. На каждое место в такой четвёрке можно поставить любую из 10 цифр. Значит, всего разных четвёрок существует 10^4. Возьмём начало данной нам последовательности, содержащее 10^4+4 цифры. Из неё можно выбрать 10^4+1 четвёрку цифр, идущих в ней подряд. Так как всего таких **разных** четвёрок 10^4, то (по принципу Дирихле) из этих 10^4+1 четверок есть хотя бы две одинаковые. Пусть это $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$ ($k<m$). В них, как мы заметили, $a_k = a_m$, $a_{k+1} = a_{m+1}$, $a_{k+2} = a_{m+2}$, $a_{k+3} = a_{m+3}$. Данная последовательность построена так, что по четырём её идущим подряд элементам $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ предыдущий элемент a_{k-1} ими однозначно определяется по формуле: $a_{k-1} = a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2}$ (равенство по модулю 10). Тогда $a_{k-1} = a_{m-1}$. Это значит, что если равны 2 четвёрки $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$, то равны 2 предыдущие четвёрки $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ $a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}$. Тогда, двигаясь по данной последовательности влево, к её началу, получим, что a_1, a_2, a_3, a_4 совпадает с $a_{m-k+1}, a_{m-k+2}, a_{m-k+3}, a_{m-k+4}$. Это требовалось доказать, так как эти последовательности разные ($k<m$).

Оценивание. За верное доказательство пункта *а*) – 6 баллов, за верное решение пункта *б*) – 8 баллов.

5. (*10 баллов*) Два автомобиля двигаются по окружностям одинакового радиуса со скоростями $v_1 = v$ и $v_2 = 2v$. Известно, что $AB=BC=CD=R$. Определите скорость v_{21} второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем в момент времени, указанный на рисунке.



Ответ: $4v$.

Решение. Переносная скорость точки C в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем: $v_C = \frac{AC}{AB} v_1 = 2v$. **(5 баллов)**

При этом она направлена вертикально вниз. Следовательно, скорость второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым:

$v_{21} = v_2 + v_C = 2v + 2v = 4v$. **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) К колесу радиусом R=0,2 м с горизонтально расположенной осью прикрепили на ободе маленький грузик массой m=0,5 кг. Найдите массу колеса M, предполагая её однородно распределённой по ободу, если частота малых колебаний колеса вокруг оси равна ω=5 рад/с. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 0,5 кг.

Решение. Выведем колёса из положения равновесия на угол α. Закон сохранения полной механической энергии:

$mgR(1 - \cos\alpha) + \frac{mv^2}{2} + \frac{MR^2\omega^2}{2} = const$. **(5 баллов)**

С учётом того, что $v=\omega R$, продифференцируем это выражение по времени:

$mgR\sin\alpha \cdot \omega + \frac{mR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon + \frac{MR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon = 0$. **(5 баллов)**

Так как для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$, то получаем, что частота малых колебаний:

$\omega = \sqrt{\frac{mg}{R(m+M)}}$. **(3 балла)**

В результате масса колеса: $M = \frac{mg}{\omega^2 R} - m = \frac{0{,}5\cdot 10}{5^2 \cdot 0{,}2} - 0{,}5 = 0{,}5$ кг. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Три моля идеального газа находятся в цилиндрическом вертикальном сосуде под лёгким поршнем. Известно, что при изменении температуры газа от 27°С до 177 °С местоположение поршня не меняется. Определите объём занимаемый газом в этом температурном интервале. Атмосферное давление 10^5 Па.

Ответ: 0,093 м^3.

Решение. Условия равновесия для начального и конечного состояний газа:

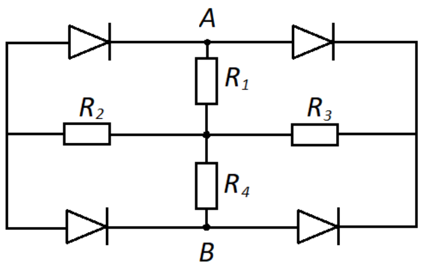
$p_a S + F_{\text{тр}} = p_1 S,$ **(4 балла)**

$p_a S - F_{\text{тр}} = p_2 S.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $2p_a = p_1 + p_2 = \frac{\vartheta R}{V}(T_1 + T_2).$ **(3 балла)**

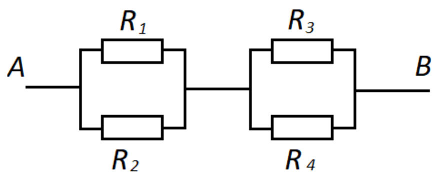
$V = \frac{\vartheta R}{2p_a}(T_1 + T_2) = \frac{3\cdot 8{,}31\cdot(300+450)}{2\cdot 10^5} \approx 0{,}093\ \text{м}^3.$ **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов R_1=1 Ом, R_2=2 Ом, R_3=3 Ом, и R_4=4 Ом. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками A и B в ситуации, когда к точке A подключают отрицательный полюс источника тока, а к точке B – положительный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.



Ответ: ≈2,38 Ом.

Решение. В предложенной ситуации получается следующая эквивалентная схема: **(5 баллов)**



Её общее сопротивление: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3+R_4} = \frac{1\cdot 2}{1+2} + \frac{3\cdot 4}{3+4} = \frac{50}{21} \approx 2{,}38$ Ом. **(5 баллов)**

Вариант 1

1. (*11 баллов*) Известно, что $\cos\alpha + \cos\beta = c \neq 0$, $\sin\alpha + \sin\beta = s \neq 0$. Выразите $\cos(\alpha+\beta)$ через c и s.

Ответ: $\frac{c^2-s^2}{c^2+s^2}$.

Решение. Имеем $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = c$,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = s.$$

Поделив второе равенство на первое, получим $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{c}$. Осталось применить формулу универсальной подстановки

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Оценивание. За верное решение 11 баллов.

2. (*12 баллов*) Пусть *ABCD* – трёхзвенная ломаная в пространстве, все звенья которой равны и $\angle BCD = 90^o$. Найдите расстояние от точки *A* до середины *BD*, если *AD*=2.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Пусть *M* – середина *BD*. Треугольники *ABM* и *BDA* подобны. Действительно, угол при вершине *B* у них общий, и $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BM} = \sqrt{2} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AB}$. Коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{2}$, следовательно, $AM = AD/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Дан набор действительных чисел $x_1, x_2, \dots x_{2k+1}$. Для произвольной нечётной степени m большей 2021 известно, что $x_1^m + x_2^m + \dots + x_{2k+1}^m = 0$. Докажите, что произведение этих чисел равно 0.

Решение. Докажем, что среди данных чисел имеются пары *a* и –*a*. Возьмём максимальное по модулю слагаемое (если не одно – любое из них) и разделим на этот модуль. Тогда получаем несколько 1 и –1, а остальные числа будут меньше 1 по модулю. Начнём увеличивать степень. Числа меньшие 1 в сумме дадут число меньшее 1, начиная с некоторой степени. Так как сумма 1 и –1 равна 0, то найдётся по крайней мере одно число равное максимальному по модулю, но с обратным знаком и ещё, возможно, несколько таких пар. Рассмотрим оставшиеся числа (их нечётное число) и повторим для них рассуждение. После конечного числа таких операций получим, что все ненулевые числа исчерпаны, а числа остались. Следовательно, среди чисел есть нуль.

Оценивание. За верное доказательство 13 баллов. Если без обоснования считается, что в наборе есть равное нулю число, то 2 балла.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2021 = 0$ и $x^2 + 2021x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2022.

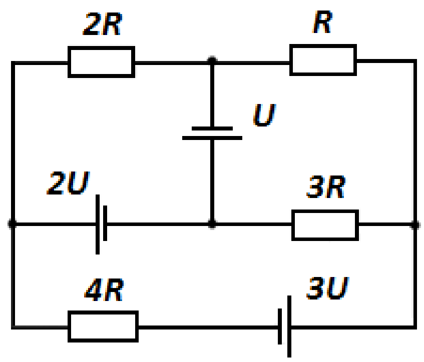
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2021$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2021}{2} = 1012{,}5$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2021 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2019$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2019$=4038. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2022.

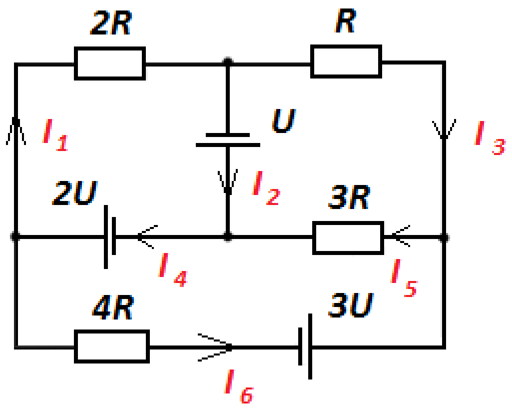
Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 баллов.

5. (*15 баллов*) Найдите ток, протекающий через резистор с сопротивлением 3*R* в цепи, схема которой изображена на рисунке. Все батарейки идеальные, напряжение *U*=5 В, сопротивление *R*=100 Ом.



Ответ: ≈2,6 мА.

Решение. Расставим токи, текущие по цепи.



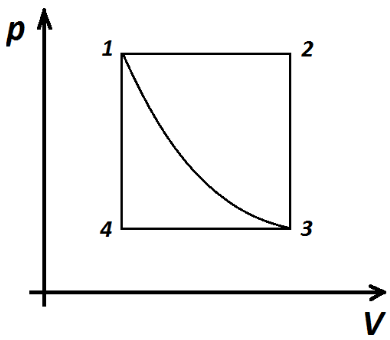
Запишем правила Кирхгофа: $-U = RI_3 + 3R \cdot I_5$, **(4 балла)**

$$3U + 2U = 4R \cdot I_6 + 3R \cdot I_5 ,$$ **(4 балла)**

$$I_3 + I_6 = I_5 .$$ **(4 балла)**

Решая данную систему, получаем: $I_5 = \frac{1}{380}$ А $\approx 2{,}6$ мА. **(3 балла)**

6. (*15 баллов*) С одноатомным идеальным газом провели два цикла: 1-2-3-1, коэффициент полезного действия которого η_1, и 1-3-4-1, коэффициент полезного действия которого η_2. Известно, что изменение температуры ΔT в процессах 4-1 и 1-2 одинаковое. Определите кпд цикла 1-2-3-4-1. Процесс 3-1 – адиабатный.



Ответ: $\frac{1}{8}(5\eta_1 + 3\eta_2)$.

Решение. КПД цикла 1-2-3-1: $\eta_1 = \frac{A_1}{Q_{12}}$. **(2 балла)**

КПД цикла 1-3-4-1: $\eta_2 = \frac{A_2}{Q_{41}}$. **(2 балла)**

Искомый КПД: $\eta = \frac{A_1 + A_2}{Q_{12} + Q_{41}} = \frac{\eta_1 Q_{12} + \eta_2 Q_{41}}{Q_{12} + Q_{41}}$. **(4 балла)**

С учётом того, что: $Q_{12} = \frac{5}{2}\nu R \Delta T_{12}$ **(2 балла)**

и $Q_{41} = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_{41}$, получаем: **(2 балла)**

$\eta = \frac{1}{8}(5\eta_1 + 3\eta_2)$. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Жёсткий стержень AB длиной 100 см скользит по горизонтальной поверхности. Известно, что в данный момент времени скорость точки A равная 5 м/с направлена точно в сторону точки B. Найдите значение скорости точки B, если известно, что она направлена под углом 60^{o} к стержню.

Ответ: 10 м/с.

Решение. Проекция скорости точки B вдоль стержня: $v_{\text{вдоль}} = v_{\text{A}} = 5\ \text{м/с}.$

(5 баллов)

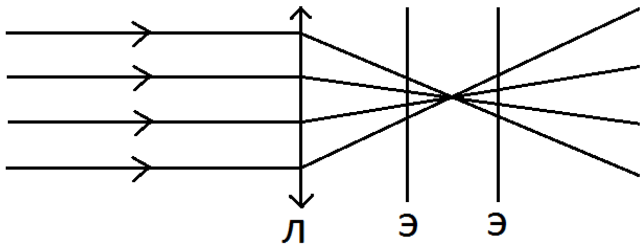
Следовательно, её скорость: $v_{\text{B}} = \frac{v_{\text{вдоль}}}{\cos 60^{o}} = 10\ \text{м/с}.$ **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) На тонкую линзу падает нормально параллельный пучок света. За линзой на расстоянии 80 см от неё располагается экран, на котором видно круглое пятно определенного диаметра. Если экран передвинуть на 40 см, то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ: 100 см или 60 см.

Решение. Рисунок, объясняющий ситуацию, которая описывается в условии:

(4 балла)



Отсюда видно, что возможны два варианта: экран могут отодвигать от линзы или подвигать к ней. В результате фокусное расстояние линзы:

F_1=80+20=100 см или **(3 балла)**

F_2=80–20=60 см. **(3 балла)**

Вариант 2

1. (*11 баллов*) Известно, что $\cos\alpha + \cos\beta = c \neq 0$, $\sin\alpha + \sin\beta = s \neq 0$. Выразите $\sin(\alpha+\beta)$ через c и s.

Ответ: $\frac{2sc}{c^2+s^2}$.

Решение. Имеем $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = c$,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = s.$$

Поделив второе равенство на первое, получим $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{c}$. Осталось применить формулу универсальной подстановки

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Оценивание. За верное решение 11 баллов.

2. (*12 баллов*) Пусть *ABCD* – трёхзвенная ломаная в пространстве, все звенья которой равны и $\angle BCD = 90^o$. Найдите расстояние от точки *A* до середины *BD*, если *AD*=1.

Ответ: $\sqrt{2}/2$.

Решение. Пусть *M* – середина *BD*. Треугольники *ABM* и *BDA* подобны. Действительно, угол при вершине *B* у них общий, и $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BM} = \sqrt{2} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AB}$. Коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{2}$, следовательно, $AM = AD/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Дан набор действительных чисел $x_1, x_2, \dots x_{2k+1}$. Для произвольной нечётной степени m большей 2020 известно, что $x_1^m + x_2^m + \dots + x_{2k+1}^m = 0$. Докажите, что произведение этих чисел равно 0.

Решение. Докажем, что среди данных чисел имеются пары *a* и *–a*. Возьмём максимальное по модулю слагаемое (если не одно – любое из них) и разделим на этот модуль. Тогда получаем несколько 1 и –1, а остальные числа будут меньше 1 по модулю. Начнём увеличивать степень. Числа меньшие 1 в сумме дадут число меньшее 1, начиная с некоторой степени. Так как сумма 1 и –1 равна 0, то найдётся по крайней мере одно число равное максимальному по модулю, но с обратным знаком и ещё, возможно, несколько таких пар. Рассмотрим оставшиеся числа (их нечётное число) и повторим для них рассуждение. После конечного числа таких операций получим, что все ненулевые числа исчерпаны, а числа остались. Следовательно, среди чисел есть нуль.

Оценивание. За верное доказательство 13 баллов. Если без обоснования считается, что в наборе есть равное нулю число, то 2 балла.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2020 = 0$ и $x^2 + 2020x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2021.

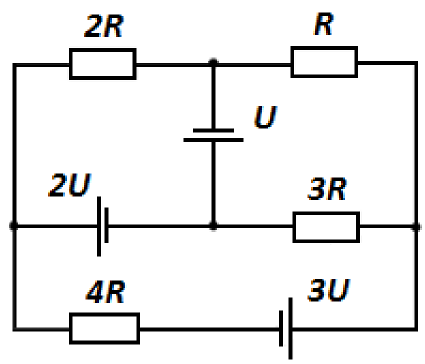
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2020$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2020}{2} = 1012$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2020 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2018$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2018$=4036. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2021.

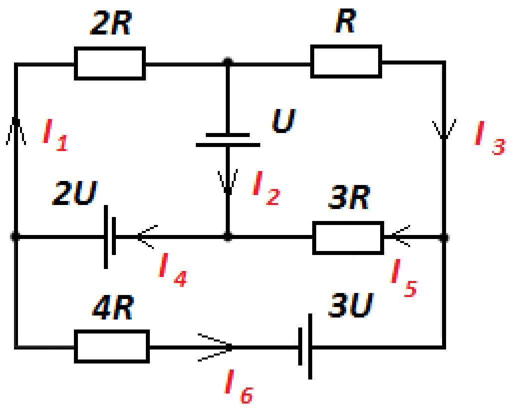
Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 балла.

5. (*15 баллов*) Найдите ток, протекающий через резистор с сопротивлением 4*R*, в цепи, схема которой изображена на рисунке. Все батарейки идеальные, напряжение *U*=10 В, сопротивление *R*=10 Ом.



Ответ: ≈1,21 А.

Решение. Расставим токи, текущие по цепи.



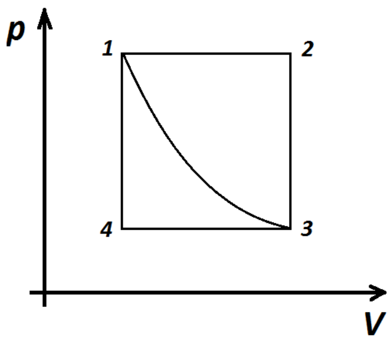
Запишем правила Кирхгофа: $-U = RI_3 + 3R \cdot I_5$, **(4 балла)**

$$3U + 2U = 4R \cdot I_6 + 3R \cdot I_5,$$ **(4 балла)**

$$I_3 + I_6 = I_5.$$ **(4 балла)**

Решая данную систему, получаем: $I_6 = \frac{23}{19}$ А $\approx 1{,}21$ А. **(3 балла)**

6. (*15 баллов*) С двухатомным идеальным газом провели два цикла: 1-2-3-1, коэффициент полезного действия которого η_1, и 1-3-4-1, коэффициент полезного действия которого η_2. Известно, что изменение температуры ΔT в процессах 4-1 и 1-2 одинаковое. Определите кпд цикла 1-2-3-4-1. Процесс 3-1 – адиабатный.



Ответ: $\frac{1}{12}(7\eta_1 + 5\eta_2)$.

Решение. КПД цикла 1-2-3-1: $\eta_1 = \frac{A_1}{Q_{12}}$. **(2 балла)**

КПД цикла 1-3-4-1: $\eta_2 = \frac{A_2}{Q_{41}}$. **(2 балла)**

Искомый КПД: $\eta = \frac{A_1 + A_2}{Q_{12} + Q_{41}} = \frac{\eta_1 Q_{12} + \eta_2 Q_{41}}{Q_{12} + Q_{41}}$. **(4 балла)**

С учётом того, что: $Q_{12} = \frac{7}{2}\nu R \Delta T_{12}$ **(2 балла)**

и $Q_{41} = \frac{5}{2}\nu R \Delta T_{41}$. **(2 балла)**

Получаем $\eta = \frac{1}{12}(7\eta_1 + 5\eta_2)$. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Жёсткий стержень *AB* длиной 50 см скользит по горизонтальной поверхности. Известно, что в данный момент времени скорость точки *A* равная 4 м/с направлена точно в сторону точки *B*. Найдите значение скорости точки *B*, если известно, что она направлена под углом 30° к стержню.

Ответ: ≈4,6 м/с.

Решение. Проекция скорости точки *B* вдоль стержня:

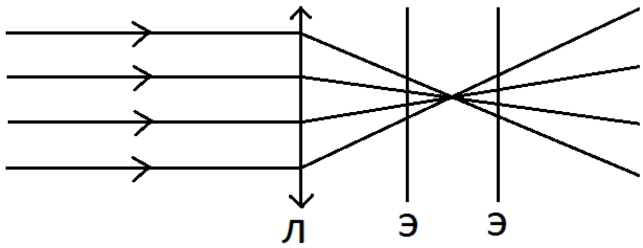
$v_{\text{вдоль}} = v_{\text{А}} = 4$ м/с. **(5 баллов)**

Следовательно, её скорость: $v_{\text{В}} = \frac{v_{\text{вдоль}}}{\cos 30^{\circ}} \approx 4{,}6$ м/с. **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) На тонкую линзу падает нормально параллельный пучок света. За линзой на расстоянии 120 см от неё располагается экран, на котором видно круглое пятно определённого диаметра. Если экран передвинуть на 60 см, то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ: 150 см или 90 см.

Решение. Рисунок, объясняющий ситуацию, которая описывается в условии: **(4 балла)**



Отсюда видно, что возможны два варианта: экран могут отодвигать от линзы или подвигать к ней. В результате фокусное расстояние линзы:

F_1=120+30=150 см **(3 балла)**

или F_2=120–30=90 см. **(3 балла)**

Вариант 1

1. (*10 баллов*) У семейной пары дни рождения в один и тот же день. При очередном праздновании их общего дня рождения муж заметил, что сейчас ему втрое больше лет, чем было его жене тогда, когда ему было столько лет, сколько его жене сейчас. А когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас, им обоим вместе будет 63 года. Сколько лет сейчас мужу?

Ответ: 27.

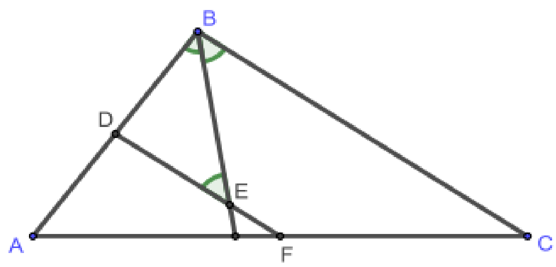
Решение. Пусть сейчас мужу $3x$ лет, а жене – y лет. Когда мужу было y лет, жене было x лет. Так как их возраст изменился одинаково, составим уравнение $y-x=3x-y$. Отсюда $y=2x$, разница в возрасте мужа и жены составляет x лет. Когда жене будет столько же лет, сколько мужу сейчас ($3x$) мужу будет $4x$. Получаем уравнение $3x+4x=63$, $x=9$.

Оценивание. За верное решение 10 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике ABC известны длины сторон $BC=10$, $AB=6$. Точка D – середина AB, точка F – середина AC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DF в точке E. Найдите EF.

Ответ: 2.

Решение. По условию задачи DF – средняя линия треугольника. Поэтому $DF=BC/2$ и $DF \parallel BC$. Углы CBE и DEB равны как накрест лежащие. Кроме того, $\angle DBE=\angle CBE$, так как BE – биссектриса. Значит, треугольник BDE равнобедренный и $DE=DB=AB/2$.



Поэтому $EF=DF-DE=(BC-AB)/2=2$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*14 баллов*) Пусть a и b – натуральные числа, причём $a<1000$. Известно, что a^{21} делится на b^{10}. Верно ли, что a^2 делится на b? Ответ обоснуйте.

Ответ: верно.

Решение. Возьмём произвольный простой делитель p числа b. Он должен быть и делителем числа a (иначе степень a не разделится на степень b). Пусть x и y – наибольшие степени p, на которые делятся соответственно a и b. Тогда

$21x \geq 10y,\ y \leq 2{,}1x$. Так как a<1000, справедливо, что $x \leq 9$ (ведь уже $2^{10} > 1000$).

Итак, $y \leq 2{,}1x \leq 2x + 0{,}1 \cdot 9 = 2x + 0{,}9$. Отсюда $y \leq 2x$. Поскольку это верно для любого простого делителя числа b, получаем, что a^2 делится на b.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2021 = 0$ и $x^2 + 2021x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2022.

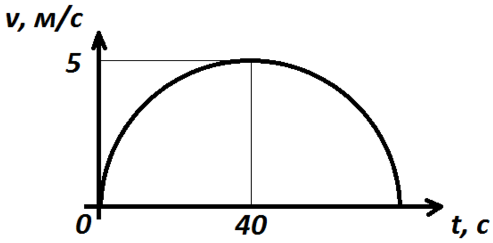
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2021$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2021}{2} = 1012{,}5$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2021 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2019$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2019$=4038. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2022.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 баллов.

5. (*10 баллов*) Зависимость скорости материальной точки от времени представлена на рисунке.



Определите среднюю скорость за первые сорок секунд движения.

Ответ: 3,93 м/с.

Решение. Путь – это площадь под графиком:

$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 5 \cdot 40 = 50\pi.$ **(5 баллов)**

Средняя скорость: $v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{50\pi}{40} = 3{,}93$ м/с. **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) Цепочка массой m=500 грамм состоит из большого числа одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол между потолком и цепочкой равен α=60°. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 1,4 Н.

Решение. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки в любом месте одинакова. Следовательно, $T = T_в \cos\alpha,$ **(5 баллов)**

где $T_в$ – натяжение цепочки в точке соприкосновения с потолком.

Кроме того, $2T_в \sin\alpha = mg.$ **(5 баллов)**

В результате получаем: $T = \frac{mg}{2} ctg\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1{,}4$ Н. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Точечный источник света, располагающийся на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, даёт расходящийся под малым углом α пучок света. После прохождения линзы данный пучок сходится под малым углом β. Определите угол расхождения лучей, если собирающую линзу заменить на такую же по размерам рассеивающую линзу, с такой же по модулю оптической силой.

Ответ: 2α+β.

Решение. Формула тонкой линзы в случае собирающей линзы:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}$. **(2 балла)**

Формула тонкой линзы в случае рассеивающей линзы:

$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2}$. **(2 балла)**

С учётом того, что: $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d}$, **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{f_1}$, **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{f_2}$. **(2 балла)**

Получаем, что: $\gamma = 2\alpha + \beta$. **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) Удельная теплоёмкость тела массой $m = 2$ кг зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 150$ Дж/(кг · °C) – удельная теплоёмкость при 0°C, $\alpha = 0{,}05$ °C^{-1} – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от 20 °C до 100 °C.

Ответ: 96 кДж.

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение:

$c_{ср} = \frac{c_0(1+\alpha t_{Н})+c_0(1+\alpha t_{К})}{2} = 600\ \frac{Дж}{кг\cdot℃}$. **(5 баллов)**

Искомое количество тепла: $Q = c_{ср} m \Delta t = 600 \cdot 2 \cdot 80 = 96000$ Дж $= 96$ кДж.

(5 баллов)

Вариант 2

1. (*10 баллов*) У семейной пары дни рождения в один и тот же день. При очередном праздновании их общего дня рождения муж заметил, что сейчас ему в пять раз больше лет, чем было его жене тогда, когда ему было столько лет, сколько его жене сейчас. А когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас, им обоим вместе будет 84 года. Сколько лет сейчас мужу?

Ответ: 35.

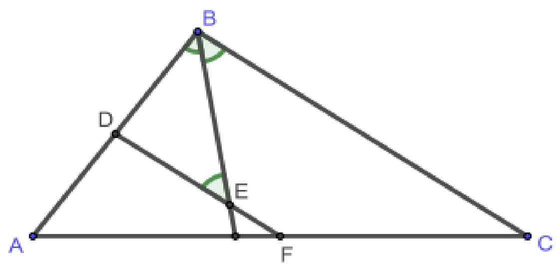
Решение. Пусть сейчас мужу $5x$ лет, а жене – y лет. Когда мужу было y лет, жене было x лет. Так как их возраст изменился одинаково, составим уравнение $y–x=5x–y$. Отсюда $y=3x$, разница в возрасте мужа и жены составляет $2x$ лет. Когда жене будет столько же лет, сколько мужу сейчас ($5x$) мужу будет $7x$. Получаем уравнение $5x+7x=84$, $x=7$.

Оценивание. За верное решение 10 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике ABC известны длины сторон $BC=11$, $AB=5$. Точка D – середина AB, точка F – середина AC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DF в точке E. Найдите EF.

Ответ: 3.

Решение. По условию задачи DF – средняя линия треугольника. Поэтому $DF=BC/2$ и $DF \parallel BC$. Углы CBE и DEB равны как накрест лежащие. Кроме того, $\angle DBE=\angle CBE$, так как BE – биссектриса. Значит, треугольник BDE равнобедренный и $DE=DB=AB/2$.



Поэтому $EF=DF – DE=(BC – AB)/2=3$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*14 баллов*) Пусть a и b – натуральные числа, причём $a<2000$. Известно, что a^{23} делится на b^{11}. Верно ли, что a^2 делится на b? Ответ обоснуйте.

Ответ: верно.

Решение. Возьмём произвольный простой делитель p числа b. Он должен быть и делителем числа a (иначе степень a не разделится на степень b). Пусть x и y – наибольшие степени p, на которые делятся соответственно a и b. Тогда

$23x \geq 11y$, $y \leq 2\frac{1}{11}x$. Так как a<2000, справедливо, что $x \leq 10$ (ведь уже $2^{11} > 2000$).

Итак, $y \leq 2\frac{1}{11}x \leq 2x + \frac{1}{11} \cdot 10 = 2x + \frac{10}{11}$. Отсюда $y \leq 2x$. Поскольку это верно для любого простого делителя числа b, получаем, что a^2 делится на b.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2020 = 0$ и $x^2 + 2020x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2021.

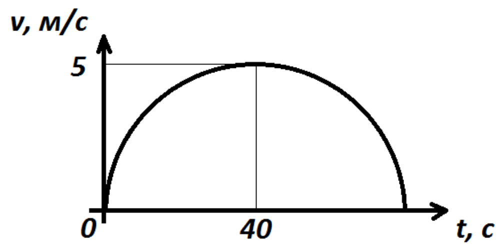
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2020$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2020}{2} = 1012$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2020 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2018$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2018$=4036. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2021.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 балла.

5. (*10 баллов*) Зависимость скорости материальной точки от времени представлена на рисунке.



Определите среднюю скорость за первые восемьдесят секунд движения.

Ответ: 3,93 м/с.

Решение. Путь – это площадь под графиком: $S = \frac{1}{2}\pi \cdot 5 \cdot 40 = 100\pi$.

(5 баллов)

Средняя скорость: $v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{100\pi}{80} = 3{,}93$ м/с. **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) Цепочка массой m=800 грамм состоит из большого числа одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол между потолком и цепочкой равен α=30°. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 6,9 Н.

Решение. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки в любом месте одинакова. Следовательно, $T = T_{\text{в}} \cos\alpha,$ **(5 баллов)**

где $T_{\text{в}}$ – натяжение цепочки в точке соприкосновения с потолком.

Кроме того, $2T_{\text{в}} \sin\alpha = mg.$ **(5 баллов)**

В результате получаем: $T = \frac{mg}{2} ctg\alpha = \frac{8}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = 6{,}9$ Н. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Точечный источник света, располагающийся на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, даёт расходящийся под малым углом α пучок света. После прохождения линзы данный пучок сходится под малым углом β. Определите угол расхождения лучей, если собирающую линзу заменить на такую же по размерам рассеивающую линзу, с такой же по модулю оптической силой.

Ответ: 2α+β.

Решение. Формула тонкой линзы в случае собирающей линзы:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}.$ **(2 балла)**

Формула тонкой линзы в случае рассеивающей линзы:

$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2}.$ **(2 балла)**

С учётом того, что:

$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d},$ **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{f_1},$ **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{f_2}.$ **(2 балла)**

Получаем, что: $\gamma = 2\alpha + \beta.$ **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) Удельная теплоёмкость тела массой $m = 3$ кг зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 200$ Дж/(кг · °C) – удельная теплоёмкость при 0°C, $\alpha = 0{,}05$ °C^{-1} – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от 20 °C до 100 °C.

Ответ: 192 кДж.

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение:

$$c_{cp} = \frac{c_0(1+\alpha t_{\text{Н}}) + c_0(1+\alpha t_{\text{К}})}{2} = 800\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}.$$ **(5 баллов)**

Искомое количество тепла:

$$Q = c_{cp} m \Delta t = 800 \cdot 3 \cdot 80 = 192000\ \text{Дж} = 192\ \text{кДж}.$$ **(5 баллов)**

Вариант 1

1. (*10 баллов*) На электронных часах высвечивается время 13:00:07. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

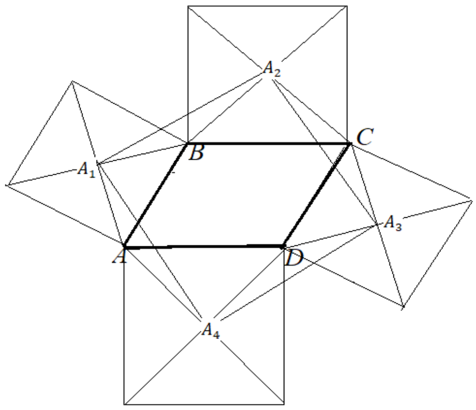
Ответ: через 158 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени ab:xy:zt. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 13:0y:zt. Тогда $y \geq 2$, $z \geq 4$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 13:02:45. То есть пройдёт 2 мин 38 с или 158 с.

Оценивание. За верное решение 10 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 4 балла.

2. (*12 баллов*) На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей квадратов являются вершинами одного квадрата.

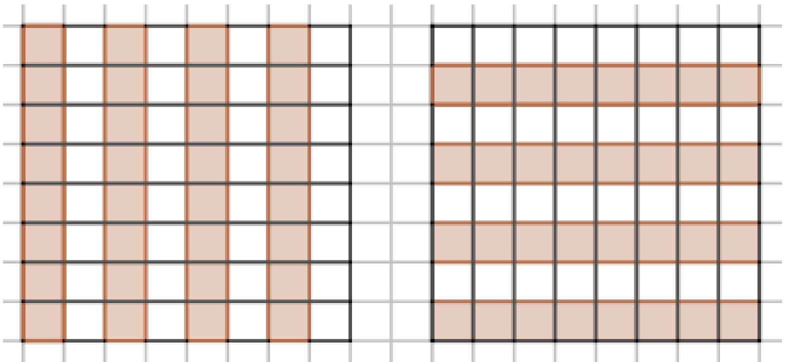
Решение. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм, а центры квадратов – A_1, A_2, A_3, A_4. Тогда треугольники $BA_1A_2, CA_2A_3, DA_3A_4, AA_4A_1$ равны по двум сторонам и углу, то есть $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1$.



Докажем, что углы в четырёхугольнике $A_1A_2A_3A_4$ прямые. Пусть острый угол параллелограмма равен α, а угол $\angle A_1A_4A = \beta$. Тогда $\angle A_1AA_4 = 90^o + \alpha$, $\angle AA_1A_4 = 90^o - \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle A_4A_1B = \alpha + \beta$, а угол $\angle A_2A_1A_4 = 90^o - \alpha - \beta + (\alpha + \beta) = 90^o$. Что и требовалось доказать.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если доказано, что четырёхугольник – ромб, но ничего не сказано про углы, то 6 баллов.

3. (*14 баллов*) Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от горизонтальной полосатой раскраски к вертикальной полосатой раскраске?



Вертикальная полосатая раскраска Горизонтальная полосатая раскраска

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

a	b
d	c

Если применить операции к уголкам

a	b
	c

	b
d	c

a	
d	c

то окажется, что цвет поменяет только клетка c, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки c может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) Найдите все целые решения уравнения

$$x^4 + (x+1)^4 = (x+2)^4.$$

Ответ: –1.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x+1)^4 = (x+2)^4 - x^4$, по формуле разности квадратов получаем

$$(x+1)^4 = ((x+2)^2 - x^2)((x+2)^2 + x^2),$$

$$(x+1)^4 = 8(x+1)((x+1)^2 + 1).$$

Число $(x+1)^2 + 1$ взаимно просто с $(x+1)$, следовательно, $(x+1)^2 + 1 = 1$, то есть $x = -1$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если корень угадан, то 2 балла. За недостаточную обоснованность единственности решения снимаем 4 балла.

5. (*10 баллов*) Два литра переохлаждённой до t=–15$^{\mathrm{O}}$С воды резко встряхнули. Определите объём получаемого льда. Плотность льда 900 кг/м^3, воды – 1000 кг/м^3. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·$^{\mathrm{O}}$С), удельная теплота плавления льда 3,3·10^5 Дж/кг.

Ответ: 0,42 литра.

Решение. Масса исходной воды: $m = \rho V = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2$ кг. **(1 балл)**

Уравнение теплового баланса: $c_В m_В \big(0 - (-15)\big) = \lambda m_Л$. **(5 баллов)**

В результате получаем, что масса получающегося льда:

$m_Л = \frac{4200 \cdot 2 \cdot 15}{330000} = \frac{21}{55}$ кг. **(2 балла)**

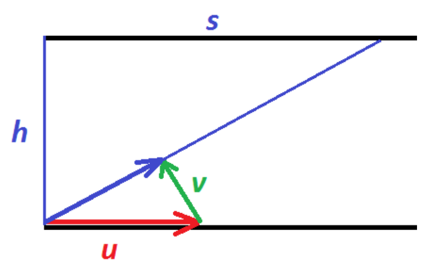
Его объём: $V = \frac{m_Л}{\rho} \approx 0{,}42$ л. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Ширина реки 40 метров. Скорость лодки относительно воды постоянна и равна *v*=2 м/с. С учётом того, что скорость течения *u*=4 м/с, определите величину минимального сноса вниз по течению лодки при переправе с одного берега на другой.

Ответ: ≈69,3 м.

Решение. Для минимального сноса необходимо, чтобы скорость лодки была направлена перпендикулярно направлению движения лодки относительно берега.

(4 балла)



В результате, угол между направлением движения лодки и берегом: $\sin\alpha = \frac{v}{u}$

(4 балла)

или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{s}$. **(4 балла)**

В результате получаем: $S = \frac{H\sqrt{u^2 - v^2}}{v} \approx 69{,}3$ м. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Под неоднородный тонкий стержень подвели опору и для поддержания равновесия стержня на расстоянии *x*=10 см от опоры подвесили груз массой *m*=3 кг и объёмом *V*=1000 см^3. После установления равновесия под груз подвели стакан с водой, так что груз оказался полностью погруженным в воду. На какое расстояние Δ*x* необходимо передвинуть точку крепления груза, чтобы стержень по-прежнему оказался в равновесии? Плотность воды *ρ*=1 г/см^3.

Ответ: 5 см.

Решение. Условие равновесия в первом случае: $mg \cdot x = m_{стержня} g \cdot l$. **(3 балла)**

Условие равновесия в первом случае:

$mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x) = m_{\text{стержня}} g \cdot l.$ **(3 балла)**

В результате получаем: $mg \cdot x = mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x),$ **(2 балла)**

откуда: $\Delta x = 5$ см. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Два одинаковых резистора сопротивлением R каждый соединены последовательно друг за другом и подключены к источнику постоянного напряжения U. Параллельно одному из резисторов подключили идеальный вольтметр. Его показания оказались равными U_V=10 В. После этого вольтметр заменили идеальным амперметром. Показания амперметра – I_A=10 А. Определите значение R.

Ответ: 2 Ом.

Решение. Напряжение источника: $U = U_V + U_V = 20$ В. **(4 балла)**

У идеального амперметра сопротивление: $r_A = 0$ Ом. **(3 балла)**

Следовательно, сопротивление резистора: $R = \frac{U}{I_A} = \frac{20}{10} = 2$ Ом. **(3 балла)**

Вариант 2

1. (*10 баллов*) На электронных часах высвечивается время 23:11:15. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

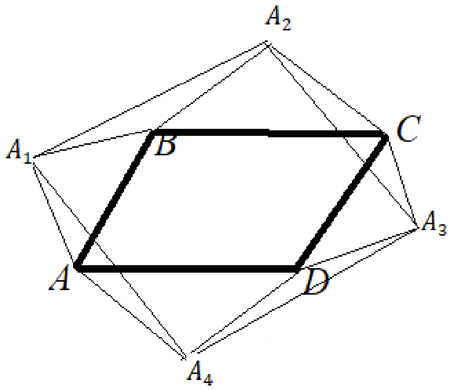
Ответ: через 170 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени ab:xy:zt. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 23:1y:zt. Тогда $y \geq 4$, $z \geq 0$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 23:14:05. То есть пройдёт 2 мин 50 с или 170 с.

Оценивание. За верное решение 10 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 4 балла.

2. (*12 баллов*) На сторонах параллелограмма вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники, у которых гипотенуза – соответствующая сторона параллелограмма. Докажите, что вершины прямых углов этих треугольников являются вершинами одного квадрата.

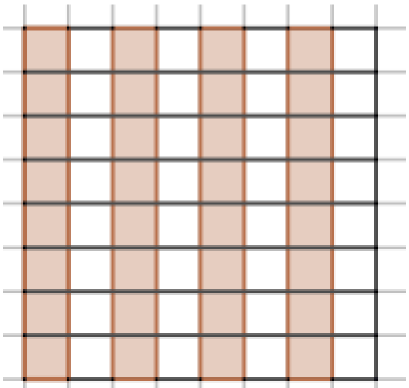
Решение. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм, а вершины прямых углов равнобедренных треугольников – A_1, A_2, A_3, A_4. Тогда треугольники BA_1A_2, CA_2A_3, DA_3A_4, AA_4A_1 равны по двум сторонам и углу, то есть $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1$.



Докажем, что углы в четырёхугольнике $A_1A_2A_3A_4$ прямые. Пусть острый угол параллелограмма равен α, а угол $\angle A_1A_4A = \beta$. Тогда $\angle A_1AA_4 = 90^o + \alpha$, $\angle AA_1A_4 = 90^o - \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle A_4A_1B = \alpha + \beta$, а угол $\angle A_2A_1A_4 = 90^o - \alpha - \beta + (\alpha + \beta) = 90^o$. Что и требовалось доказать.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если доказано, что четырёхугольник – ромб, но ничего не сказано про углы, то 6 баллов.

3. (*14 баллов*) Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от традиционной (шахматной) раскраски доски к вертикальной полосатой раскраске?



Вертикальная полосатая раскраска

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

a	b
d	c

Если применить операции к уголкам

a	b
	c

	b
d	c

a	
d	c

то окажется, что цвет поменяет только клетка c, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки c может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) Найдите все целые решения уравнения

$$(x+1)^4 + (x+2)^4 = (x+3)^4.$$

Ответ: –2.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x+2)^4 = (x+3)^4 - (x+1)^4$, по формуле разности квадратов получаем

$$(x+2)^4 = ((x+3)^2 - (x+1)^2)((x+3)^2 + (x+1)^2),$$

$$(x+2)^4 = 8(x+2)((x+2)^2 + 1).$$

Число $(x+2)^2 + 1$ взаимно просто с $(x+2)$, следовательно, $(x+2)^2 + 1 = 1$, то есть $x = -2$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если корень угадан, то 2 балла. За недостаточную обоснованность единственности решения снимаем 4 балла.

5. (*10 баллов*) Три литра переохлаждённой до t=–20^{O}C воды резко встряхнули. Определите объём получаемого льда. Плотность льда 900 кг/м^3, воды – 1000 кг/м^3. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·^{O}C), удельная теплота плавления льда 3,3·10^5 Дж/кг.

Ответ: 0,85 литра.

Решение. Масса исходной воды: $m = \rho V = 1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 3$ кг. **(1 балл)**

Уравнение теплового баланса: $c_В m_В\big(0-(-20)\big) = \lambda m_Л$, **(5 баллов)**

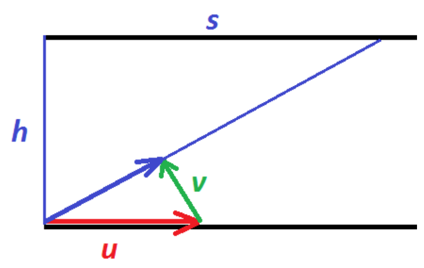
В результате получаем, что масса получающегося льда: $m_Л = \frac{4200 \cdot 3 \cdot 20}{330000} = \frac{42}{55}$ кг.
(2 балла)

Его объём: $V = \frac{m_Л}{\rho} \approx 0{,}85$ л. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Ширина реки 50 метров. Скорость лодки относительно воды постоянна и равна v=1 м/с. С учётом того, что скорость течения u=3 м/с, определите величину минимального сноса вниз по течению лодки при переправе с одного берега на другой.

Ответ: ≈141,4 м.

Решение. Для минимального сноса необходимо, чтобы скорость лодки была направлена перпендикулярно направлению движения лодки относительно берега.
(4 балла)



В результате, угол между направлением движения лодки и берегом: $\sin\alpha = \frac{v}{u}$
(4 балла)

или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{s}$. **(4 балла)**

В результате получаем: $S = \frac{H\sqrt{u^2-v^2}}{v} \approx 141{,}4$ м. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Под неоднородный тонкий стержень подвели опору и для поддержания равновесия стержня на расстоянии x=6 см от опоры подвесили груз массой m=4 кг и объёмом V=1000 см^3. После установления равновесия под груз подвели стакан с водой, так что груз оказался полностью погруженным в воду. На какое расстояние Δx необходимо передвинуть точку крепления груза, чтобы стержень по-прежнему оказался в равновесии? Плотность воды ρ=1 г/см^3.

Ответ: 2 см.

Решение. Условие равновесия в первом случае: $mg \cdot x = m_{стержня} g \cdot l$.
(3 балла)

Условие равновесия в первом случае:

$mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x) = m_{\text{стержня}} g \cdot l.$ **(3 балла)**

В результате получаем: $mg \cdot x = mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x)$, **(2 балла)**

откуда: $\Delta x = 2$ см. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Два одинаковых резистора сопротивлением R каждый соединены последовательно друг за другом и подключены к источнику постоянного напряжения U. Параллельно одному из резисторов подключили идеальный вольтметр. Его показания оказались равными U_V=5 В. После этого вольтметр заменили идеальным амперметром. Показания амперметра – I_A=4 А. Определите значение R.

Ответ: 2,5 Ом.

Решение. Напряжение источника: $U = U_V + U_V = 10$ В. **(4 балла)**

У идеального амперметра сопротивление: $r_A = 0$ Ом. **(3 балла)**

Следовательно, сопротивление резистора: $R = \frac{U}{I_A} = \frac{10}{4} = 2{,}5$ Ом. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

7 класс **Заключительный тур** **2020-2021**

Вариант 1

1. (*12 баллов*) На городской ратуше имеются два колокола, которые бьют каждый час в течение одной минуты. Колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами для этих колоколов соответственно составляют $\frac{4}{3}$ секунды и $\frac{5}{3}$ секунды. Совпавшие по времени удары воспринимаются как один. Сколько ударов туристы услышат за одну минуту, включая первый и последний?

Ответ: 73.

Решение. Первый колокол за минуту сделает $60 : \frac{4}{3} + 1 = 46$ ударов. Второй колокол за минуту сделает $60 : \frac{5}{3} + 1 = 37$ ударов. Удары колоколов совпадают через $\frac{20}{3}$ секунды, а всего они совпадут $60 : \frac{20}{3} + 1 = 10$ раз. Значит, туристы услышат 46+37– 10=73 удара.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

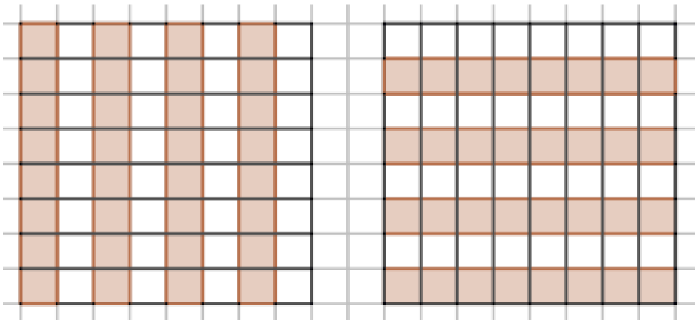
2. (*12 баллов*) В понедельник в школьную библиотеку пришло 9 человек, во вторник – 8, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 10. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Ответ: 19.

Решение. Во вторник и среду было 19 человек. Никто не ходил в библиотеку два дня подряд. Следовательно, учеников, посетивших библиотеку не меньше 19. Приведем пример посещения библиотеки 19 учениками. Занумеруем учеников от 1 до 19. Пусть в понедельник пришли ученики с 1 по 9; во вторник – с 10 по 17; в среду – с 1 по 9, 18,19; в четверг – с 10 по 16; в пятницу – с 1 по 9 и 18. Конечно, подобный пример – не единственный.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если приведена только оценка – 8 баллов. За верный ответ без попытки обоснования 3 балла.

3. (*13 баллов*) Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от горизонтальной полосатой раскраски к вертикальной полосатой раскраске?



Вертикальная полосатая раскраска Горизонтальная полосатая раскраска

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

a	b
d	c

Если применить операции к уголкам

a	b
	c

	b
d	c

a	
d	c

то окажется, что цвет поменяет только клетка c, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки c может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*13 баллов*) Некоторое пятизначное число, записанное различными цифрами, умножили на 4. В результате получилось число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число, если известно, что его последняя цифра 8.

Ответ: 21978.

Решение: Число начинается на 1 и 2, иначе при умножении на 4 получится 6-значное число. Но при умножении на 4 оно не может заканчиваться на 1. Значит, число $\overline{2abc8}\cdot 4=\overline{8cba2}$. Теперь a. Оно меньше 3 и не равно 2 (уже есть), и не равно 0 (иначе число справа не делится на 4). Значит, a=1 и $\overline{21bc8}\cdot 4=\overline{8cb12}$. Далее найдём c. Число 4с+3 должно оканчиваться на 1. Значит c равно или 2, или 7. Но 2 уже есть, тогда c=7 и $\overline{21b78}\cdot 4=\overline{87b12}$. Осталось определить b. Имеем $4b+3=\overline{3b}$, откуда b=9. Число $21978*4=87912$ (проверка).

Оценивание. За верное решение 13 баллов, за верный ответ без решения 2 балла.

5. (*15 баллов*) Грузоподъёмность нефтяного танкера 14310 тонн. Нефть загружают на танкер со скоростью 1500 баррелей в минуту. Плотность нефти 0,9 г/см^3. Сколько времени займёт полная загрузка танкера? Один баррель равен 159 литрам.

Ответ: 4000 секунд.

Решение. Объём нефти загружаемой ежесекундно: $\frac{1500\text{ баррелей}\cdot 159\cdot 10^{-3}\text{ м}^3}{60\text{ секунд}}$.

(5 баллов)

Масса: $m=\rho V=\frac{900\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot 1500\text{ баррелей}\cdot 159\cdot 10^{-3}\text{ м}^3}{60\text{ секунд}}=3577{,}5\,\frac{\text{кг}}{\text{с}}$. **(5 баллов)**

Время погрузки: $t=\frac{14310\cdot 10^3\text{ кг}}{3577{,}5\,\frac{\text{кг}}{\text{с}}}=4000\text{ секунд}$. **(5 баллов)**

6. (*10 баллов*) Если Вася отправился в гости к другу на велосипеде, а обратно вернулся пешком, то он потратил на всю дорогу 1 час. В другой раз проехав и туда, и обратно на велосипеде, он затратил на весь путь 20 минут. Сколько времени он затратит на дорогу, если и туда, и обратно он пройдёт пешком?

Ответ: 100 минут.

Решение. В первом случае всё затраченное время: $60=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}$. **(3 балла)**

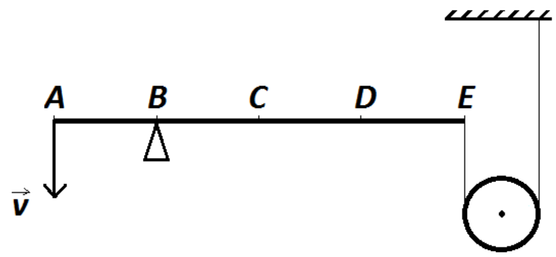
Во втором случае всё затраченное время: $20 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_1}$. **(3 балла)**

В результате получаем: $\frac{s}{v_1} = 10$. **(1 балла)**

В третьем случае всё затраченное время:

$t = \frac{2s}{v_2} = 2\left(60 - \frac{s}{v_1}\right) = 2(60 - 10) = 100$ минут. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Лёгкий стержень *AE* опирается на неподвижную опору в точке *B*. К правому концу стержня привязана лёгкая нерастяжимая нить, которая через однородный подвижный блок прикреплена к потолку. Известно, что *AB*=*BC*=*CD*=*DE*. Определите скорость центра блока в тот момент, когда левый конец стержня двигается вертикально вниз со скоростью *v*=4 м/с.



Ответ: 6 м/с.

Решение. Стержень поворачивается относительно точки *B*. **(2 балла)**

Следовательно, скорость точки *E*: $v_E = 3v = 12$ м/с. **(4 балла)**

Скорость центра блока: $v_ц = \frac{1}{2} v_E = 6$ м/с. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) Куб состоит из восьми одинаковых кубиков меньшего размера. Два маленьких кубика заменили на такие же по размеру, но с большей в два раза плотностью. Определите отношение начальной и конечной плотностей большого куба.

Ответ: 0,8.

Решение. Связь массы и объёма: $m = \rho V$, **(3 балла)**

то есть новые кубики, при том же объёме, в два раза тяжелей.

Начальная плотность: $\rho_{нач} = \frac{8m_0}{8V_0}$. **(4 балла)**

Конечная плотность: $\rho_{кон} = \frac{6m_0 + 2m_1}{8V_0} = \frac{6m_0 + 2\cdot 2m_0}{8V_0} = \frac{10m_0}{8V_0}$. **(5 балла)**

Окончательный результат: $\frac{\rho_{нач}}{\rho_{кон}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$. **(3 балла)**

7 класс **Заключительный тур** **2020-2021**

Вариант 2

1. (*12 баллов*) На городской ратуше имеются два колокола, которые бьют каждый час в течение одной минуты. Колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами для этих колоколов соответственно составляют $\frac{5}{3}$ секунды и 2 секунды. Совпавшие по времени удары воспринимаются как один. Сколько ударов туристы услышат за одну минуту, включая первый и последний?

Ответ: 61.

Решение. Первый колокол за минуту сделает $60\colon \frac{5}{3} + 1 = 37$ ударов. Второй колокол за минуту сделает $60\colon 2 + 1 = 31$ удар. Удары колоколов совпадают через 10 секунд, а всего они совпадут $60\colon 10 + 1 = 7$ раз. Значит, туристы услышат 37+31– 7=61 удар.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

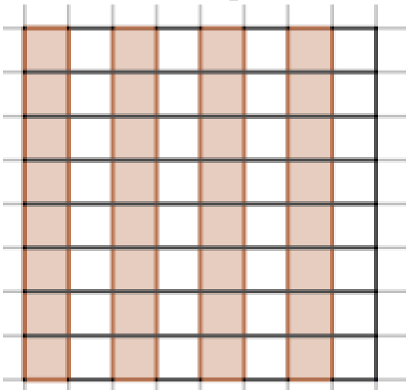
2. (*12 баллов*) В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 человек, во вторник – 9, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 11. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Ответ: 20.

Решение. Во вторник и среду было 20 человек. Никто не ходил в библиотеку два дня подряд. Следовательно, учеников, посетивших библиотеку не меньше 20. Приведем пример посещения библиотеки 20 учениками. Занумеруем учеников от 1 до 20. Пусть в понедельник пришли ученики с 1 по 8; во вторник – с 9 по 17; в среду – с 1 по 8, 18,19, 20; в четверг – с 9 по 15; в пятницу – с 1 по 8, 16, 17, 18. Конечно, подобный пример – не единственный.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если приведена только оценка – 8 баллов. За верный ответ без попытки обоснования 3 балла.

3. (*13 баллов*) Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от традиционной (шахматной) раскраски доски к вертикальной полосатой раскраске?



Вертикальная полосатая раскраска

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

a	b
d	c

Если применить операции к уголкам

a	b
	c

	b
d	c

a	
d	c

то окажется, что цвет поменяет только клетка c, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки c может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Некоторое пятизначное число, записанное различными цифрами, умножили на 4. В результате получилось число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число, если известно, что его первая цифра 2.

Ответ: 21978.

Решение: По условию задачи имеем: число $\overline{2abcd}\cdot 4=\overline{dcba2}$. Тогда d – или 8 или 9. Но 9·4 оканчивается на 6. Тогда d=8 и $\overline{2abc8}\cdot 4=\overline{8cba2}$. Теперь a. Оно меньше 3 и не равно 2 (уже есть), и не равно 0 (иначе число справа не делится на 4). Значит, a=1 и $\overline{21bc8}\cdot 4=\overline{8cb12}$. Далее найдём c. Число 4c+3 должно оканчиваться на 1. Значит c равно или 2, или 7. Но 2 уже есть, тогда c=7 и $\overline{21b78}\cdot 4=\overline{87b12}$. Осталось определить b. Имеем $4b+3=\overline{3b}$, откуда b=9. Число $21978*4=87912$ (проверка).

Оценивание. За верное решение 14 баллов, за верный ответ без решения 2 балла.

5. (*15 баллов*) Грузоподъёмность нефтяного танкера 28620 тонн. Нефть загружают на танкер со скоростью 750 баррелей в минуту. Плотность нефти 0,9 г/см^3. Сколько времени займёт полная загрузка танкера? Один баррель равен 159 литрам?

Ответ: 16000 секунд.

Решение. Объём нефти загружаемой ежесекундно: $\frac{750\text{ баррелей}\cdot 159\cdot 10^{-3}\text{ м}^3}{60\text{ секунд}}$.

(5 баллов)

Масса: $m=\rho V=\frac{900\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot 750\text{ баррелей}\cdot 159\cdot 10^{-3}\text{ м}^3}{60\text{ секунд}}=1788{,}75\ \frac{\text{кг}}{\text{с}}$. **(5 баллов)**

Время погрузки: $t=\frac{28620\cdot 10^3\text{ кг}}{1788{,}75\frac{\text{кг}}{\text{с}}}=16000$ секунд. **(5 баллов)**

6. (*10 баллов*) Если Вася отправился в гости к другу на велосипеде, а обратно вернулся пешком, то он потратил на всю дорогу полтора часа. В другой раз проехав и туда, и обратно на велосипеде, он затратил на весь путь 30 минут. Сколько времени он затратит на дорогу, если и туда, и обратно он пройдёт пешком?

Ответ: 150 минут.

Решение. В первом случае всё затраченное время: $90=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}$. **(3 балла)**

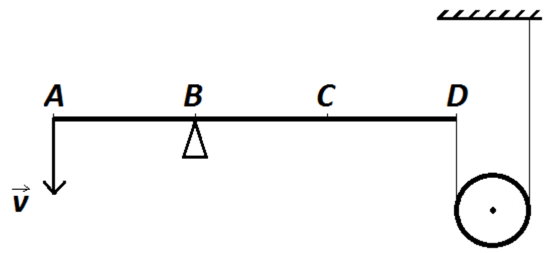
Во втором случае всё затраченное время: $30 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_1}$. **(3 балла)**

В результате получаем: $\frac{s}{v_1} = 15$. **(1 балла)**

В третьем случае всё затраченное время:

$t = \frac{2s}{v_2} = 2\left(90 - \frac{s}{v_1}\right) = 2(90 - 15) = 150$ минут. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Лёгкий стержень *AD* опирается на неподвижную опору в точке *B*. К правому концу стержня привязана лёгкая нерастяжимая нить, которая через однородный подвижный блок прикреплена к потолку. Известно, что *AB*=*BC*=*CD*. Определите скорость центра блока в тот момент, когда левый конец стержня двигается вертикально вниз со скоростью *v*=5 м/с.



Ответ: 5 м/с.

Решение. Стержень поворачивается относительно точки *B*. **(2 балла)**

Следовательно, скорость точки *D*: $v_D = 2v = 10$ м/с. **(4 балла)**

Скорость центра блока: $v_{ц} = \frac{1}{2}v_D = 5$ м/с. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) Куб состоит из восьми одинаковых кубиков меньшего размера. Два маленьких кубика заменили на такие же по размеру, но с большей в три раза плотностью. Определите отношение конечной и начальной плотностей большого куба.

Ответ: 1,5.

Решение. Связь массы и объёма: $m = \rho V$, **(3 балла)**

то есть новые кубики, при том же объёме, в три раза тяжелей.

Начальная плотность: $\rho_{нач} = \frac{8m_0}{8V_0}$. **(4 балла)**

Конечная плотность: $\rho_{кон} = \frac{6m_0+2m_1}{8V_0} = \frac{6m_0+2\cdot 3m_0}{8V_0} = \frac{12m_0}{8V_0}$. **(5 балла)**

Окончательный результат: $\frac{\rho_{кон}}{\rho_{нач}} = \frac{12}{8} = 1{,}5$. **(3 балла)**

Вариант 1

1. (*12 баллов*) На электронных часах высвечивается время 13:00:07. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

Ответ: через 158 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени ab:xy:zt. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 13:0y:zt. Тогда $y \geq 2$, $z \geq 4$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 13:02:45. То есть пройдёт 2 мин 38 с или 158 с.

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 5 баллов.

2. (*12 баллов*) В понедельник в школьную библиотеку пришло 9 человек, во вторник – 8, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 10. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Ответ: 19.

Решение. Во вторник и среду было 19 человек. Никто не ходил в библиотеку два дня подряд. Следовательно, учеников, посетивших библиотеку не меньше 19. Приведем пример посещения библиотеки 19 учениками. Занумеруем учеников от 1 до 19. Пусть в понедельник пришли ученики с 1 по 9; во вторник – с 10 по 17; в среду – с 1 по 9, 18,19; в четверг – с 10 по 16; в пятницу – с 1 по 9 и 18. Конечно, подобный пример – не единственный.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если приведена только оценка – 8 баллов. За верный ответ без попытки обоснования 3 балла.

3. (*13 баллов*) Клетки таблицы 3×3 были заполнены нулями. Можно взять любой квадрат 2×2 и к числам, записанным в его клетках прибавить по единице. Петя выполнил несколько таких операций и получил новую таблицу. Вася стёр некоторые числа, получилась таблица:

7	**12**	
16		
9	**10**	

Восстановите числа, которые стёр Вася. Не забудьте объяснить, как получен ответ.

Ответ:

7	**12**	**5**
16	**22**	**6**
9	**10**	**1**

Решение. Видно, что к левому верхнему квадрату операция применялась 7 раз. Если к правому верхнему квадрату операция применялась x раз, то во второй клетке верхней строки должно быть число $7+x$. Отсюда $x=5$. Аналогично находим число в правой нижней клетке, а затем и в двух оставшихся. (Дети должны писать более подробно!)

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без пояснений 6 баллов.

4. (*13 баллов*) Сколько месяцев в не високосном году может иметь ровно 4 четверга? В год, когда таких месяцев наименьшее число, какой день недели в старый Новый год – 14 января? (Не високосный год имеет 365 дней)

Ответ: 7 или 8 месяцев; среда.

Решение. В году 12 месяцев, 52 полных и одна неполная неделя (из одного дня). Если этот день четверг (31-е декабря и, следовательно, первое января этого года), то всего 53 четверга в году (в каждую из 52-х полных недель один четверг плюс этот четверг). Если бы в каждом месяце было бы ровно по 4 четверга, то четвергов было бы $4\times 12=48$. Следовательно, 53– 48=5 месяцев имеют по «лишнему», пятому четвергу, а семь месяцев – четыре четверга. Так как 1-е января – четверг, то 14 января – среда.

Если же неполная неделя – не четверг, то всего 52 четверга в году (столько, сколько полных недель), 52– 48=4 месяца имеют по «лишнему», пятому четвергу, а восемь месяцев – четыре четверга.

Оценивание. Правильный 1-й или 2-й ответ (без решения) – по одному баллу (всего 2 балла). Правильное решение для количества месяцев – 7 баллов. Всё правильно решено – 13 баллов.

5. (*15 баллов*) За десять минут расстояние между двумя пешеходами сократилось с 1000 до 200 метров. Какое расстояние будет между ними ещё через десять минут. Оба пешехода идут с постоянной скоростью, вдоль одной прямой, не меняя направления своего движения.

Ответ: 600 или 1400 метров.

Решение. Свяжем систему отсчёта с одним из пешеходов. Возможны два варианта. **(1 балл)**

Первый вариант: второй пешеход в данной системе отсчёта не успел дойти до первого. То есть прошел за 10 минут 800 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 10 минут он пройдёт ещё 800 метров. И расстояние между ними будет равно 600 метрам. **(4 балла)**

Второй вариант: второй пешеход в данной системе отсчета успел пройти мимо первого. То есть он прошёл за 10 минут 1200 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 10 минут он пройдет еще 1200 метров. И расстояние между ними будет равно 1400 метрам. **(4 балла)**

6. (*15 баллов*) Скорость автомобиля по пути из города в деревню оказалась в два раза больше его скорости при движении в обратном направлении. При этом средняя скорость за всё время движения оказалась равной 42 км/ч. Найдите скорость автомобиля при движении из города в деревню.

Ответ: 63 км/ч.

Решение. Средняя скорость: $v_{\text{ср}} = \frac{s+s}{t_1+t_2}$, **(5 баллов)**

где $t_1 = \frac{s}{v}$ – время поездки из города в деревню, $t_2 = \frac{2s}{v}$ – время поездки из деревни в город. **(5 баллов)**

Получаем: $v = \frac{3v_{\text{ср}}}{2} = 63\ \text{км/ч}$. **(5 баллов)**

7. (*10 баллов*) Велосипедист 20 минут ехал со скоростью 18 км/ч, затем 600 секунд стоял на месте и отдыхал. После этого в течение часа шёл пешком со скоростью 3,6 км/ч. Определите его среднюю скорость.

Ответ: 1,8 м/с или 6,4 км/ч.

Решение. На первом участке пройдено: $s_1 = v_1 t_1 = 5 \cdot 20 \cdot 60 = 6000$ м или $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ км. **(3 балла)**

На последнем участке: $s_3 = v_3 t_3 = 1 \cdot 3600 = 3600$ м или $3{,}6 \cdot 1 = 3{,}6$ км. **(3 балла)**

Средняя скорость:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3} = \frac{6000+0+3600}{1200+600+3600} \approx 1{,}8\ \text{м/с или}\ \frac{6+0+3{,}6}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1} = 6{,}4\ \text{км/ч}.$$ **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) Аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда имеет следующие размеры: длина – 3 м, ширина – 200 мм, высота – 80 см. Его заполняют водой со скоростью 2 литра в минуту. Через сколько минут после начала заполнения аквариума он окажется заполненным полностью?

Ответ: 240 минут.

Решение. Объём аквариума: $V = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}48\ \text{м}^3$. **(3 балла)**

Скорость заполнения: $v = \frac{0{,}002\ \text{м}^3}{1\ \text{мин}}$. **(3 балла)**

Аквариум полностью заполнится через: $t = \frac{V}{v} = \frac{0{,}48}{0{,}002} = 240$ мин. **(4 балла)**

6 класс **Заключительный тур** **2020-2021**

Вариант 2

1. (*12 баллов*) На электронных часах высвечивается время 23:11:15. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

Ответ: через 170 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени ab:xy:zt. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 23:1y:zt. Тогда $y \geq 4$, $z \geq 0$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 23:14:05. То есть пройдёт 2 мин 50 с или 170 с.

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 5 баллов.

2. (*12 баллов*) В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 человек, во вторник – 9, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 11. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Ответ: 20.

Решение. Во вторник и среду было 20 человек. Никто не ходил в библиотеку два дня подряд. Следовательно, учеников, посетивших библиотеку не меньше 20. Приведем пример посещения библиотеки 20 учениками. Занумеруем учеников от 1 до 20. Пусть в понедельник пришли ученики с 1 по 8; во вторник – с 9 по 17; в среду – с 1 по 8, 18,19, 20; в четверг – с 9 по 15; в пятницу – с 1 по 8, 16, 17, 18. Конечно, подобный пример – не единственный.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если приведена только оценка – 8 баллов. За верный ответ без попытки обоснования 3 балла.

3. (*13 баллов*) Клетки таблицы 3×3 были заполнены нулями. Можно взять любой квадрат 2×2 и к числам, записанным в его клетках прибавить по единице. Петя выполнил несколько таких операций и получил новую таблицу. Вася стёр некоторые числа, получилась таблица:

5	**14**	
16		
11	**13**	

Восстановите числа, которые стёр Вася. Не забудьте объяснить, как получен ответ.

Ответ:

5	**14**	**9**
16	**27**	**11**
11	**13**	**2**

Решение. Видно, что к левому верхнему квадрату операция применялась 5 раз. Если к правому верхнему квадрату операция применялась x раз, то во второй клетке верхней строки должно быть число $5+x$. Отсюда $x=9$. Аналогично находим число в правой нижней клетке, а затем и в двух оставшихся. (Дети должны писать более подробно!)

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без пояснений 6 баллов.

4. (*13 баллов*) Сколько месяцев в не високосном году может иметь ровно 5 пятниц? В год, когда таких месяцев наибольшее число, какой день недели в Рождество – 7 января? (Не високосный год имеет 365 дней)

Ответ: 4 или 5 месяцев; четверг.

Решение. В году 12 месяцев, 52 полных и одна неполная неделя (из одного дня). Если этот день пятница (31-е декабря и, следовательно, первое января этого года), то всего 53 пятницы в году (в каждую из 52-х полных недель одна пятница плюс эта пятница). Если бы в каждом месяце было бы ровно по 4 пятницы, то пятниц было бы $4\times12=48$. Следовательно, 53–48=5 месяцев имеют по «лишней», пятой пятнице, а семь месяцев – четыре пятницы. Так как 1-е января – пятница, то 7 января – четверг.

Если же неполная неделя – не пятница, то всего 52 пятницы в году (столько, сколько полных недель). 52–48=4 месяца имеют по «лишней», пятой пятнице.

Оценивание. Правильный 1-й или 2-й ответ (без решения) – по одному баллу (всего 2 балла). Правильное решение для количества месяцев – 7 баллов. Всё правильно решено – 13 баллов.

5. (*15 баллов*) За пять минут расстояние между двумя пешеходами сократилось с 400 до 100 метров. Какое расстояние будет между ними ещё через пять минут. Оба пешехода идут с постоянной скоростью, вдоль одной прямой, не меняя направления своего движения.

Ответ: 200 или 600 метров.

Решение. Свяжем систему отсчёта с одним из пешеходов. Возможны два варианта. **(1 балл)**

Первый вариант: второй пешеход в данной системе отсчёта не успел дойти до первого. То есть прошёл за 5 минут 300 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 5 минут он пройдёт еще 300 метров. И расстояние между ними будет равно 200 метрам. **(4 балла)**

Второй вариант: второй пешеход в данной системе отсчёта успел пройти мимо первого. То есть он прошёл за 5 минут 500 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 5 минут он пройдёт ещё 500 метров. И расстояние между ними будет равно 600 метрам. **(4 балла)**

6. (*15 баллов*) Скорость автомобиля по пути из города в деревню оказалась в три раза больше его скорости при движении в обратном направлении. При этом средняя скорость за всё время движения оказалась равной 36 км/ч. Найдите скорость автомобиля при движении из города в деревню.

Ответ: 72 км/ч.

Решение. Средняя скорость: $v_{\text{ср}} = \frac{s+s}{t_1+t_2}$, **(5 баллов)**

где $t_1 = \frac{s}{v}$ – время поездки из города в деревню, $t_2 = \frac{3s}{v}$ – время поездки из деревни в город. **(5 баллов)**

Получаем: $v = 2v_{\text{ср}} = 72$ км/ч . **(5 баллов)**

7. (*10 баллов*) Велосипедист 1200 секунд ехал со скоростью 9 км/ч, затем 10 минут стоял на месте и отдыхал. После этого в течение полутора часов шёл пешком со скоростью 3,6 км/ч. Определите его среднюю скорость.

Ответ: 1,2 м/с или 4,2 км/ч.

Решение. На первом участке пройдено: $s_1 = v_1 t_1 = 2{,}5 \cdot 1200 = 3000$ м или $9 \cdot \frac{1}{3} = 3$ км. **(3 балла)**

На последнем участке: $s_3 = v_3 t_3 = 1 \cdot 5400 = 5400$ м или $3{,}6 \cdot 1{,}5 = 5{,}4$ км. **(3 балла)**

Средняя скорость:

$v_{\text{ср}} = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3} = \frac{3000+0+5400}{1200+600+5400} \approx 1{,}2$ м/с или $\frac{3+0+5{,}4}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1{,}5} = 4{,}2$ км/ч. **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) Аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда имеет следующие размеры: длина – 1,5 м, ширина – 400 мм, высота – 60 см. Его заполняют водой со скоростью 3 литра в минуту. Через сколько минут после начала заполнения аквариума он окажется заполненным полностью?

Ответ: 120 минут.

Решение. Объём аквариума: $V = 1{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$ м^3 . **(3 балла)**

Скорость заполнения: $v = \frac{0{,}003 \text{ м}^3}{1 \text{ мин}}$. **(3 балла)**

Аквариум полностью заполнится через: $t = \frac{V}{v} = \frac{0{,}36}{0{,}003} = 120$ мин. **(4 балла)**