МЕТОД МАСС В ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

А.Ю. Эвнин,
Южно-Уральский государственный университет,
e-mail: graph98@yandex.ru

Рассматривается применение метода масс к решению некоторых геометрических задач (как вычислительных, так и задач на доказательство).
Идея расщепления масс позволяет эффективно решать задачи, связанные с точкой пересечения отрезков с концами на сторонах треугольника. С помощью той же идеи доказывается теорема Менелая.

Ключевые слова: геометрия, треугольник, метод масс, расщепление масс, ЕГЭ, задача С4, теоремы Чевы и Менелая.

Задачи на вычисление отношения, в каком точка делит отрезок, встречаются как на олимпиадах, так и в ЕГЭ. Так, в книге [1] подобным задачам отведён целый параграф (§ 6). Основной приём, который использован в [1], состоит в дополнительных построениях, приводящих к парам подобных треугольников. Известно, что проведение дополнительных построений – непростая задача для рядового школьника. Между тем, имеется алгебраический способ решения аналогичных задач, основанный на методе масс [2].

Предварительные сведения

Если точке A сопоставлено число (масса) m, будем говорить, что задана материальная точка (м. т.) mA (при этом число m не обязательно положительно).

Центром масс системы материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, ..., m_nA_n$ называется такая точка O, для которой выполнено векторное равенство

$$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + ...m_n\overrightarrow{OA_n} = 0. \qquad (1)$$

Например, в случае двух точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2 их центр масс делит отрезок A_1A_2 в отношении $|m_2| : |m_1|$ *внутренним* образом, если массы *одинаковы* по знаку, и *внешним* – если *противоположны* (**правило рычага**). Для любой системы материальных точек с ненулевой суммарной массой центр масс существует и определяется этими точками однозначно [2].

Теорема о группировке масс. *Если часть материальных точек заменить точкой, расположенной в их центре масс и имеющей ненулевую массу, равную сумме масс этих точек, то центр масс всех точек не изменится.*

В дальнейшем вместо (1) мы будем использовать записи

$$O = c(m_1A_1, m_2A_2, ..., m_nA_n)$$

и

$$m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots + m_nA_n = (m_1 + m_2 + ... + m_n)O.$$

Типовые задачи на вычисление

Задача 1. В треугольнике ABC на сторонах BC и CA выбраны соответственно точки A_1 и B_1, делящие их в отношениях $AB_1 : B_1C = a_1 : a_2$ и $BA_1 : A_1C = b_1 : b_2$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и $BB1$.

Р е ш е н и е. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс располагался в точке O. Вот как этого достичь. Если окажется, что

$$B_1 = c(m_1A,\ m_3C), \qquad (2)$$

то, заменив материальные точки m_1A и m_3C их центром масс, мы получим вместо исходных трёх две м. т. m_2B и $(m_1 + m_3)B_1$ с тем же центром масс, который должен лежать на прямой BB_1. Точно так же, если

$$c(m_2B,\ m_3C) = A_1, \qquad (3)$$

то $c(m_1A,\ m_2B,\ m_3C) \in AA_1$. Поскольку $O = AA_1 \cap BB_1$, получим, что $O = c(m_1A,\ m_2B,\ m_3C)$. Условия (2) и (3), по правилу рычага, можно записать в виде

$$m_1a_1 = m_3a_2;\ m_2b_1 = m_3b_2. \qquad (4)$$

Ясно, что при умножении всех масс на одно и то же ненулевое число положение центра масс не меняется. Поэтому можно в качестве m_3 выбрать любое ненулевое число, после чего из равенств (4) две другие массы определятся однозначно. Удобно положить $m_3 = a_1b_1$. Тогда $m_1 = a_2b_1$ и $m_2 = a_1b_2$.

После того, как искомое распределение масс найдено, легко ответить на вопросы задачи. Поскольку

$$O = c(a_1b_2B,\ (a_2b_1 + a_1b_1)B_1),$$

по правилу рычага имеем $BO : OB_1 = b_1(a_1 + a_2) : a_1b_2$. Аналогично находим, что $AO : OA_1 = a_1(b_1 + b_2) : a_2b_1$.

Нет нужды запоминать выведенные формулы: понять идею решения, а потом её применить– значительно проще! При решении учебных задач нужно просто повторить с конкретными числами изложенный ход рассуждений.

Пример 1. [1, с. 43] На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = 3 : 5$, $BN : NC = 1 : 4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найдите отношения $AO : ON$ и $CO : OM$.

Р е ш е н и е. Поместим в точку B произвольную массу $m_2 \neq 0$. Массы mi и ш$_3$ определим из условий $N = c(m_2B,\ m_3C)$ и $M = c(m_1A,\ m_2B)$. Правило рычага диктует равенства $m_2 = 4ma_3$ и $3m_1 = 5m_2$.

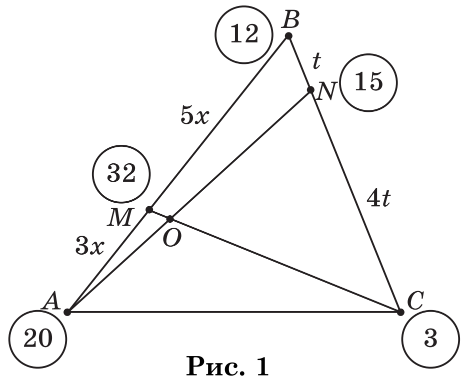

Рис. 1

Удобно положить $m_2 = 12$. Тогда $m_3 = 3$, $m_1 = 20$. Теперь $O = c(20A,\ 15N)$, откуда $AO : O_1N = 15 : 20 = 3 : 4$. Одновременно имеем $O = c(3C,\ 32M)$. Значит, $CO : OM = 32 : 3$. На рисунке 1 массы – числа в кружочках.

Задача 2. В треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB выбраны соответственно точки A_1, B_1 и C_1, делящие их в отношениях $CA_1 : A_1B = a_1 : a_2$, $AB_1 : B_1C = b_1 : b_2$ и $BC_1 : C_1A = c_1 : c_2$. Отрезки AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке O. Найдите, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и B_1C_1.

Р е ш е н и е. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс оказался в точке O. Как и в решении задачи 1, массы в вершинах B и C выбираются из условия

$$A_1 = c(m_2B,\ m_3C). \qquad (5)$$

Этим условием обеспечивается попадание центра масс на прямую AA_1. А вот для того, чтобы центр масс одновременно принадлежал и прямой B_1C_1, расщепим массу в вершине A, то есть будем считать, что в данной вершине расположены такие две материальные точки m'_1A и m_1^nA, для которых в результате группировки

$$B_1 = c(m_1^nA, m3C);$$
$$C_1 = c(m'_1A,\ m_2B). \qquad (6)$$

Из (5) и (6) с помощью правила рычага получаем равенства

$$m_2a_2 = m_3a_1;\ m'_1c_2 = m_2c_1;\ m_1^nb_1 = m_3b_2.$$

Удобно взять $m_2 = a_1b_1c_2$. Тогда $m_3 = a_2b_1c_2$, $m'_1 = a_1b_1c_1$, $m_1^nb_1 = a_2b_2c_2$.

Поскольку

$$O = c((m_1' + m_1^n)A_1,\ m_2B + m_3C) =$$
$$= c((a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)A,\ (a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2)A_1),$$

получаем

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{(a_1 + a_2)b_1c_2}{a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2}.$$

Точно так же из группировки масс

$$O = c(m_1'A + m_2B, m_1^nA + m_3C) =$$
$$= c((a_1b_1c_1 + a_1b_1c_2)_1,\ (a_2b_2c_2A + a_2b_1c_2)B_1$$

находим отношение

$$\frac{B_1O}{OC_1} = \frac{a_1b_1(c_1 + c_2)}{a_2c_2(b_1 + b_2)}.$$

Пример 2. [1, с. 44] На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что $AM : MB = 2 : 3$, $AK : KC = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?

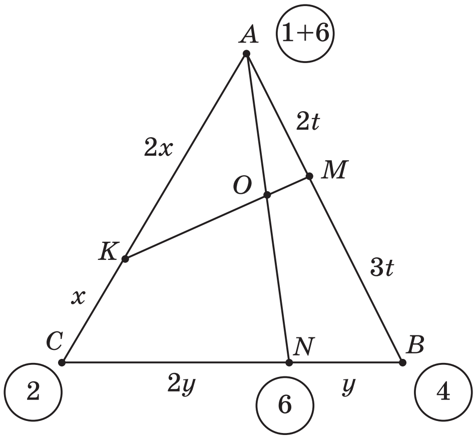

Рис. 2

Р е ш е н и е. Используя введённые выше обозначения, имеем

$$2m'_1 = 3m_2;\ 2m_1^n = m_3;\ m_2 = 2m_3.$$

Положим $m_3 = 2$. Тогда $m_2 = 4$, $m'_1 = 6$, $m_1^n = 1$. Полученное распределение масс показано на рисунке 2. Оно гарантирует попадание центра масс в O – точку пересечения AN и KM.

Имеем $O = c(7A, 6N)$. Значит, $AO : ON = 6 : 7$.

Задача 3. В треугольнике ABC на его сторонах выбраны точки M, N, P и Q, такие что $CN : NB = a_1 : a_2$, $BM : MA = d_1 : d_2$, $BP : PA = c_1 : c_2$, $AQ : QC = b_1 : b_2$ (рис. 3). Прямые MN и PQ пересекаются в точке $O \notin AB$. Найдите массы m_1 m_2, m_3, для которых $O = c(m_1A,\ m_2B,\ m_3C)$.

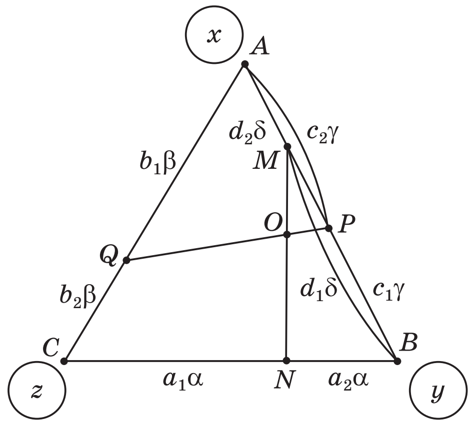

Рис. 3

Р е ш е н и е. Пусть искомое распределение масс (xA, yB, zC). Расщепим массу $x = x_1 + x_2$ так, чтобы $P = c(x_1A,\ yB)$ и $Q = c(x_2A,\ zC)$. Для этого должны выполняться равенства $x_1c_2 = yc_1$ и $x_2b_1 = zb_2$. При этом общий центр масс попадёт на прямую PQ. А для попадания его на прямую MN будем расщеплять массу в вершине B:

$$y = y_1 + y_2;\ c(y_1B,\ xA) = M;$$
$$c(y_2B,\ zC) = N;\ y_1d_1 = xd_2;\ y_2a_2 = za_1.$$

С учётом предыдущих соотношений получаем:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{c_1}{c_2}y + \frac{b_2}{b_1}z;$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{d_2}{d_1}x + \frac{a_1}{a_2}z.$$

Ничто не мешает нам взять $z = a_2b_1$ (ведь все массы, напомним, определяются с точностью до постоянного множителя). Тогда возникнет система двух линейных уравнений в двумя неизвестными:

$$x = \frac{c_1}{c_2}y + a_2b_2; \quad y = \frac{d_2}{d_1}x + a_1b_1. \qquad (7)$$

Из условия задачи следует, что точки M и P не совпадают. Поэтому они делят сторону BA в разных отношениях: $\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$. Легко проверить, что при этом система (7) имеет единственное решение

$$x = \frac{a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2};$$

$$y = \frac{a_1b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2}.$$

Искомое распределение масс найдено. С его помощью легко вычислить отношения, в которых точка O делит отрезки MN и PQ.

Но здесь возникает интересный вопрос[1]: что будет, если прямые MN и PQ параллельны? Вроде бы из системы (7) мы найдём распределение масс в вершинах треугольника ABC (им не возбраняется быть и отрицательными), при котором центр масс одновременно принадлежит указанным прямым. Но ведь они не пересекаются!

Дело здесь в том, что мы рассматриваем системы материальных точек только с ненулевыми суммарными массами. Выясним, когда же возникает эта «нулевая». Вычислим

$$x + y + z = \frac{a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2} +$$

$$+ \frac{a_1b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_2}{c_2d_1 - c_1d_2} + a_2b_1 =$$

$$= \frac{a_1b_1d_1(c_1 + c_2) + a_2b_2c_2(d_1 + d_2) + a_2b_1(c_2d_1 - c_1)}{c_2d_1 - c_1d_2}.$$

Отсюда

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1d_1(c_1 + c_2) + a_2b_2d_2(d_1 + d_2) +$$

$$+ a_2b_1(c_2d_1 - c_1d_2) = 0. \qquad (8)$$

Найдём теперь условие параллельности прямых MN и PQ в виде соотношения связывающего числа a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1 и d_2. Пусть $T = l \cap AB$, где $l \parallel MN \parallel PQ$ и $C \in l$ (рис. 4).

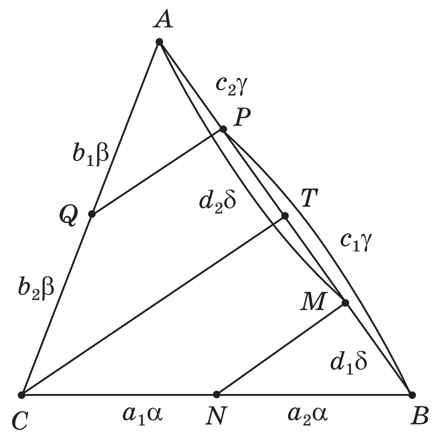

Рис. 4

Рассматривая соответствующие пары подобных треугольников, получим

$$AT = \frac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot AP; \quad BT = \frac{a_1 + a_2}{a_2} \cdot BM.$$

С другой стороны, из условия задачи следует:

$$AP = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot AB; \quad BM = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot AB.$$

С учётом найденных соотношений равенство $AT + BT = AB$ принимает вид

$$\frac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot \frac{c_2}{c_1 + c_2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_2} \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_2} = 1. \qquad (9)$$

---

[1] Его задал автору статьи Антон Тимофеев, учитель из Санкт-Петербурга, во время доклада на Конференции лауреатов Всероссийского конкурса учителей Фонда «Династия» 2 июля 2014 г.

Несложные преобразования показывают, что равенства (8) и (9) равносильны.

Пример 3.[2] В треугольнике ABC точка N – середина CB, точка Q делит сторону AC в отношении $AQ : QC = 3 : 5$, точки M и P делят сторону AB на три равные части (рис. 5). Отрезки NM и PQ пересекаются в точке O. Найдите отношение $MO : ON$.

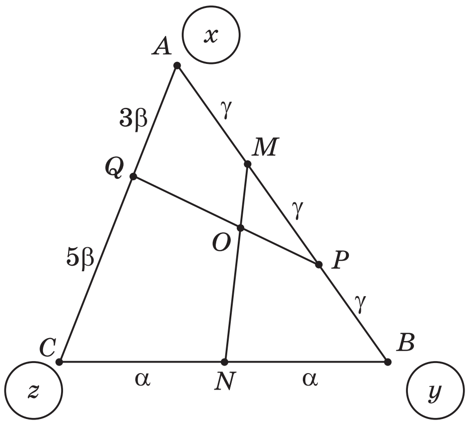

Рис. 5

Р е ш е н и е. Найдём сначала распределение масс (xA, yB, zC) центр которого будет в точке O.

Расщепим массу в вершине $A(x = x_1 + x_2)$ так, чтобы $Q = (x_1A, zC)$ и $P = c(x_2A, yB)$. По данному в условию отношению интересующих нас отрезков находим, что $x_1 = \frac{5}{3}z$ и $x_2 = \frac{1}{2}y$.

Теперь расщепим массу в вершине $B(y = y_1 + y_2)$ так, чтобы $M = c(y_1B, xA)$ и $N = c(y_2B, zC)$. Отсюда $y_1 = \frac{1}{2}x$ и $y_2 = z$.

Имеем систему уравнений

$$x = \frac{5}{3}z + \frac{1}{2}y; \quad y = \frac{1}{2}x + z.$$

Пусть $z = 3$. Тогда $x = \frac{26}{3}$, $y = \frac{22}{3}$. Для нахождения отношения, в каком точка O делит MN, нам интересны массы, возникающие в результате группировок $y_1B + xA$ и $y_2B + zC$. Поскольку $y_1 = \frac{x}{2} = \frac{13}{3}$, а $y_2 = z = 3$, получаем

$$\frac{13}{3}B + \frac{26}{3}A = 13M; \quad 3B + 3C = 6N.$$

Таким образом, $O = c(13M, 6N)$. Значит, $MO : ON = 6 : 13$.

Задачи на доказательство

Следующая задача имеет номер 5326 в отделе задач журнала «Математика в школе» (опубликована в номере 7 за 2013 г., автор В.П. Карамзин)[3].

Задача 4. Дан треугольник ABC. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания вписанной окружности со

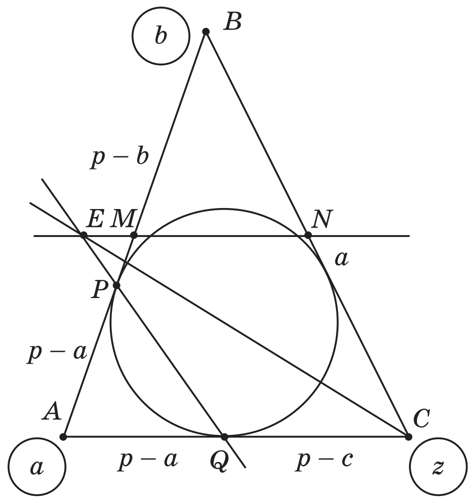

Рис. 6

[2] На упомянутой в предыдущей сноске конференции преподаватель СУНЦ НГУ А.М. Каргаполов рассматривал решение этой задачи с помощью дополнительного построения и двукратного применения теоремы Менелая.

[3] Эта же задача (в чуть усечённом виде) предлагалась на Московской математической олимпиаде в 1999 г. для девятиклассников. Она же имеется в задачнике И.Ф. Шарыгина [3] под номером 428. С.А. Беляев обратил внимание автора статьи, что та же геометрическая конфигурация рассматривается в знаменитой (в узких кругах геометров) задаче 255 из указанного сборника.

сторонами AB и AC, прямая, проходящая через середины сторон AB и BC, и биссектриса угла ACB пересекаются в одной точке.

Доказательство. План доказательства очень простой: найдём такое распределение масс в вершинах треугольника, чтобы их центр принадлежал двум из указанных прямых, после чего убедимся, что он лежит и на третьей прямой.

Пусть, как обычно, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Мы знаем, что биссектриса l угла C делит сторону AB в отношении $b : a$, считая от вершины A. Поэтому если поместить в вершину A массу a, а в вершину B массу b, то при любом z центр масс $c(aA, bB, zC)$ лежит на l. Чтобы этот центр лежал на прямой MN, где M и N – середины AB и AC, масса b должна допускать расщепление $b = a + z$, откуда $z = b - a$. Значит, если $E = l \cap MN$, то $E = c(aA, bB, (b - a)C)$.

Пусть P и Q – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC (рис. 6). Как известно, $AP = AQ = p - a$, $BP = p - b$, $CP = p - c$, где p – полупериметр треугольника ABC. Чтобы центр масс E лежал на прямой PQ, масса a должна быть представима в виде такой суммы $a = a_1 + a_2$, что $c(a_1A, bB) = P$ и $c(a_2A, (b - a)C) = Q$. По правилу рычага имеем

$$a_2(p - a) = b(p - b);$$
$$a_1(p - a) = (b - a)(p - c).$$

Значит, должно выполняться равенство

$$a = \frac{p-b}{p-a}\cdot b + \frac{p-c}{p-a}\cdot(b-a). \qquad (10)$$

И оно действительно выполняется, как показывают простейшие выкладки.

Итак, намеченный план осуществлён. Утверждение доказано.

Задача 5. Докажите теорему Чевы. На сторонах треугольника ABC выбраны точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in BA$. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C} = 1. \qquad (11)$$

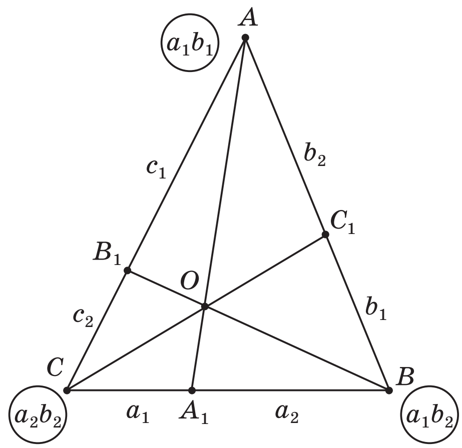

Рис. 7

Доказательство.

Пусть $O = CC_1 \cap AA_1$. Разместим в вершинах треугольника ABC массы, что их центр масс окажется в точке O. Обозначим $a_1 = AB_1$, $a_2 = B_1C$, $b_1 = BC_1$, $b_2 = C_1A$, $c_1 = AB_1$, $c_2 = B_1C$. Легко проверить, что подходящими будет распределение масс $(a_1b_1A, a_1b_2B, a_2b_2C)$ (рис. 7).

Если выполнено (11), то $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ и $c(a_1b_1A, a_2b_2C) = B_1$. Но тогда центр масс O должен лежать на прямой BB_1, другими словами, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Обратно, если прямая BB_1 проходит через точку O, то $B_1 = c(a_1b_2A, a_2b_2C)$, что вновь даёт равенство $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$, равносильное (11).

Задача 6. Докажите теорему Менелая. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 делят его стороны CB, AC и BA в отношениях α, β и γ соответственно (то есть имеют место векторные равенства $\overrightarrow{CA_1} = \alpha\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BC_1} = \gamma\overrightarrow{A_1B}$ Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\alpha\beta\gamma = -1$.

Доказательство. Если массу z можно расщепить на массы z_1 и z_2 так, что $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$, то $c(xA, yB, zC) \in A_1B_1$.

Верно и обратное. Пусть $D = c(xA, yB, zC) \in A_1B_1$. Тогда найдутся такие массы m' и m^n, что $D = c(m'A_1, m^nB_1)$ и m' и $m^n = x + y + z$. Теперь по x и y определим массы z_1 и z_2, такие что $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$. При этом $z_1 + x = m^n$, $z_2 + y = m'$, откуда с учётом предыдущего выводим, что $z = z_1 + z_2$.

Итак, центр системы материальных точек (xA, yB, zC) принадлежит прямой A_1B_1 тогда и только тогда, когда существует расщепление масс $z = z_1 + z_2$, для которого $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$, или

$$z_1\overrightarrow{B_1C} = x\overrightarrow{B_1A} = 0;\quad z_2\overrightarrow{A_1C} + y\overrightarrow{A_1B} = 0. \qquad (12)$$

Если вспомнить соотношения $\overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{CA_1} = \alpha\overrightarrow{A_1B}$, получим, что условия (12) можно записать в виде $z_1 = \alpha x$ и $z_2 = \dfrac{y}{\beta}$.

Итог проведённых выкладок:

$$c(xA, yB, zC) \in A_1B_1 \Leftrightarrow z = \alpha x + \frac{y}{\beta}. \qquad (13)$$

Аналогично получается утверждение:

$$c(xA, yB, zC) \in B_1C_1 \Leftrightarrow x = \gamma y + \frac{z}{\alpha}. \qquad (14)$$

Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда совпадают прямые A_1B_1 и B_1C_1, то есть, согласно (13)–(14), когда одновременно выполняются равенства

$$z = \alpha x + \frac{y}{\beta};\quad x = \gamma y + \frac{z}{\alpha}.$$

Отсюда $z = \alpha\left(\gamma y + \dfrac{z}{\alpha}\right) + \dfrac{y}{\beta} = \alpha\gamma y + z + \dfrac{y}{\beta}$,

что означает $\alpha\gamma + \dfrac{1}{\beta} = 0$, или $\alpha\beta\gamma = -1$, что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

Предлагаем заинтересованному читателю применить метод масс для решения подборки задач (не только про треугольники и не только по планиметрии!), взятых, в основном, из книг [4], [5] и [6].

1. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка E так, что

$$AE : EB = CF : FE = k,$$

где F – точка пересечения отрезка CE и медианы AD. Найдите k.

2. На сторонах BC и CA треугольника ABC взяты точки K и L; O – точка пересечения отрезков AK и BL. Найдите площадь исходного треугольника, если площади треугольников OLA, OAB, OBK равны соответственно 5, 6 и 7.

3. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB соответственно в точках A', B', C'. Докажите, что отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

4. Сфера касается всех рёбер тетраэдра. Для каждой пары скрещивающихся рёбер проведём прямую, проходящую через точки касания. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, делятся точкой пересечения пополам; причём эта точка является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей четырёхугольника.

6. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

7. Докажите, что высоты правильного тетраэдра пересекаются в одной точке и каждая высота делится этой точкой в отношении 3 : 1, считая от вершины.

8. [Теорема Жергона] Пусть $ABCD$ –

произвольная треугольная пирамида, а O – точка внутри этой пирамиды. Лучи AO, BO, CO, DO пересекают противоположные грани в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}+\frac{DO}{DD_1}=3.$$

9. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, причём $AK:KB=DM:MC=\alpha$; $BL:LC=AN:ND=\beta$. Пусть O – точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NO:OL=\alpha$, $KO:OM=\beta$.

10. Докажите, что шары, построенные на рёбрах тетраэдра как на диаметрах, покрывают полностью этот тетраэдр.

Указание. Если точка O тетраэдра $ABCD$ не попадает ни в один из четырёх шаров, то все рёбра тетраэдра видны из точки O под острым углом. Доказав, что для некоторых положительных чисел m_1, m_2, m_3 и m_4 выполнено равенство $m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}+m_3\overrightarrow{OC}+m_4\overrightarrow{OD}=0$, получите отсюда противоречие.

11. Около окружности описан четырёхугольник $ABCD$, касающийся окружности в точках $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке Z. Найдите, в каком отношении точка Z делит отрезок KM, если $AK = a$, $BL = b$, $CM = c$, $DN = d$.

12. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на три равные части. Соответствующие точки деления противоположных сторон соединены отрезками, в результате чего четырёхугольник разделён на девять клеток. Докажите, что площадь средней клетки составляет девятую часть площади исходного четырёхугольника.

13. В углы произвольного треугольника вписали три окружности так, что они касаются друг друга попарно внешним образом. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с противолежащими точками касания, пересекаются в одной точке.

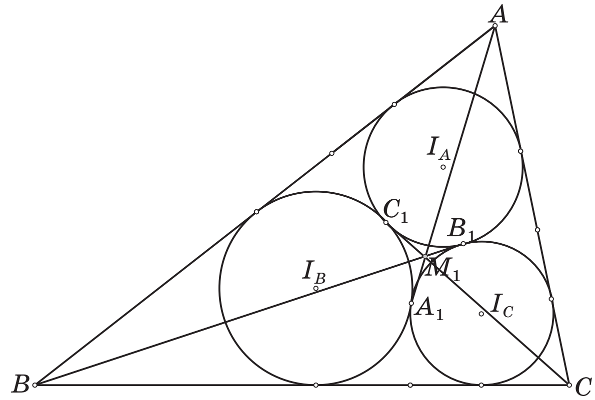

Рис. 8

Указание.

Рассмотрите систему материальных точек $-\frac{1}{r}I$; $\frac{1}{r_A}I_A$; $\frac{1}{r_B}I_B$; $\frac{1}{r_C}I_C$ (то есть, попробуйте «нагрузить» центр вписанной окружности ее «обратным» радиусом[1], взятым со знаком «минус», а центры окружностей их «обратными» радиусами) и докажите, что центр масс этой системы, точка M_1 – совпадает с точкой пересечения соответствующих прямых. Для этого, например, покажите, что подсистема $-\frac{1}{r}I$; $\frac{1}{r_A}I_A$ имеет своим центром масс вершину A, а подсистема $\frac{1}{r_B}I_B$; $\frac{1}{r_C}I_C$ точку касания A_1.

О т в е т ы. 1. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **2.** 858.

11. $KZ : ZM = ab(c+d) : cd(a+b)$.

Литература

1. *Гордин Р.К.* ЕГЭ 2013. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия / Под ред. А.П. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2013. – 176 с.

[1] Величина, *обратная радиусу* окружности называется ее *кривизной*.

2. *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

3. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия: 9–11 кл. – М.: Дрофа, 1996. – 400 с.

4. *Эвнин А.Ю.* Практикум по математике. – Челябинск: Взгляд, 2009. – 256 с.

5. *Эвнин А.Ю.* Математический конкурс в ЮУрГУ. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 86 с.

6. *Эвнин А.Ю.* 150 красивых задач для будущих математиков. М.: КРАС АНД, 2014. – 224 с.