ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год девятнадцатый

№ 1 (73)

январь - март 2015 г.

Москва

Метод масс в задачах

А. Ю. Эвнин

Ещё Архимед использовал свойства центра масс системы материальных точек для доказательства геометрических фактов. Всесторонне этот метод (его называют также *барицентрическим*) изучен в замечательной книге [1]. Дополнительную информацию о барицентрическом методе можно найти в книгах [8] и [11].

В статье [2] показано, как метод масс используется при решении некоторых типовых задач на вычисление отношения, в каком точка делит отрезок. Особый акцент в этой статье сделан на *расщеплении масс* (ситуации, когда удобно в одну точку поместить одновременно несколько масс).

Коллекция задач, предлагаемая читателю в настоящей статье, содержит наряду с широко известными классическими задачами, в которых потрясающе эффективно работает метод масс, совсем новые задачи, предлагавшиеся на олимпиадах последних лет. Задачи взяты, в основном, из книг [1-10], а также материалов различных олимпиад.

Эта подборка задач может служить основой нескольких занятий математического кружка (как школьного, так и студенческого). Приводятся решения всех задач, но при этом в некоторых случаях изложение максимально лаконично.

Если точке A сопоставлено число (*масса*) m, будем говорить, что задана материальная точка (м. т.) mA (при этом число m не обязательно положительно).

Центром масс системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, $\ldots$, m_nA_n называется такая точка M, для которой выполнено векторное равенство

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Например, в случае двух точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2 их центр масс делит отрезок A_1A_2 в отношении $m_2 : m_1$ (**правило рычага**).

Задачи

1. *Для любой системы материальных точек с ненулевой суммарной массой центр масс существует и определяется этими точками однозначно.* Докажите.

В дальнейшем вместо (1) мы будем использовать записи

$$M = c(m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n)$$

и

$$m_1A_1 + m_2A_2 + \cdots + m_nA_n = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)M.$$

2. Пусть $M = c(m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n)$. Докажите, что для любой точки O

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\overrightarrow{OM} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}. \qquad (2)$$

3. Теорема о группировке масс. *Если часть материальных точек заменить точкой, расположенной в их центре масс и имеющей ненулевую массу, равную сумме масс этих точек, то центр масс всех точек не изменится.* Докажите.

4. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, делятся точкой пересечения пополам; причём эта точка является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей четырёхугольника.

5. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

6. Докажите, что высоты правильного тетраэдра пересекаются в одной точке и каждая высота делится этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

7. [Формула Ван-Обеля.] Внутри треугольника ABC выбрана точка M. Лучи AM, BM, CM пересекают стороны BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Известно, что $AC_1 : C_1B = p$, $AB_1 : B_1C = q$. Докажите, что $AM : MA_1 = p + q$.

8. Даны три точки: A, B, C. Можно взять любой отрезок, соединяющий две из них, и повернуть на любой угол вокруг его середины. При этом возникнет новая конфигурация трёх точек. После нескольких таких операций точка A перешла в исходное положение точки B, а точка B не попала в исходное положение точки C. Может ли при этом точка C оказаться в исходном положении точки A?

9. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB соответственно в точках A', B', C'. Докажите, что отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

10. Сфера касается всех рёбер тетраэдра. Для каждой пары скрещивающихся рёбер проведём прямую, проходящую через точки касания. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

11. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = 3 : 5$, $BN : NC = 1 : 4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найдите отношения $AO : ON$ и $CO : OM$.

12. В треугольнике ABC на сторонах BC и CA выбраны соответственно точки A_1 и B_1, делящие их в отношениях $AB_1 : B_1C = a_1 : a_2$ и $BA_1 : A_1C = b_1 : b_2$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и BB_1.

13. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка E так, что

$$AE : EB = CF : FE = k,$$

где F — точка пересечения отрезка CE и медианы AD. Найдите k.

14. Дан треугольник ABC. На стороне AC отмечена точка D, для которой $AD : DC = 2$, а на стороне BC выбраны точки E и F так, что $BE = EF = FC$. Отрезок BD пересекает отрезки AE и AF соответственно в точках K и N. Найдите площадь четырёхугольника $KEFN$, если $S_{ABC} = 42$.

15. На сторонах BC и CA треугольника ABC взяты точки K и L; O — точка пересечения отрезков AK и BL. Найдите площадь исходного треугольника, если площади треугольников OLA, OAB, OBK равны соответственно 5, 6 и 7.

16. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что $AM : MB = 2 : 3$, $AK : KC = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN?

17. В треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB выбраны соответственно точки A_1, B_1 и C_1, делящие их в отношениях $CA_1 : A_1B = a_1 : a_2$, $AB_1 : B_1C = b_1 : b_2$ и $BC_1 : C_1A = c_1 : c_2$. Отрезки AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке O. Найдите, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и B_1C_1.

18. В треугольнике ABC точка N — середина CB, точка Q делит сторону AC в отношении $AQ : QC = 3 : 5$, точки M и P делят сторону AB на три равные части. Отрезки NM и PQ пересекаются в точке O. Найдите отношение $MO : ON$.

19. В треугольнике ABC на его сторонах выбраны точки M, N, P и Q, такие что $CN : NB = a_1 : a_2$, $BM : MA = d_1 : d_2$, $BP : PA = c_1 : c_2$, $AQ : QC = b_1 : b_2$. Прямые MN и PQ пересекаются в точке $O \notin AB$. Найдите массы m_1, m_2, m_3, для которых $O = c(m_1A, m_2B, m_3C)$.

20. Дан треугольник ABC. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC, прямая, проходящая через середины сторон AB и BC, и биссектриса угла ACB пересекаются в одной точке.

21. Докажите теорему Чевы. *На сторонах треугольника ABC выбраны точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in BA$. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда*

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1.$$

22. Докажите теорему Менелая. *Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 делят его стороны CB, AC и BA в отношениях α, β и γ соответственно (т. е. имеют место векторные равенства $\overrightarrow{CA_1} = \alpha\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BC_1} = \gamma\overrightarrow{C_1A}$). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\alpha\beta\gamma = -1$.*

23. Докажите обобщённую теорему Шлёмильха. *Прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих чевиан данной точки, имеют общую точку.* (У самого Шлёмильха в качестве чевиан были высоты. В 1860 г. Шлёмильх доказал, что в этом случае соответствующие прямые пересекаются в точке Лемуана — точке пересечения симедиан[1]).

24. Дан треугольник ABC; на продолжении его медианы BM за точку M выбрана точка N, через которую проведена прямая, пересекающая отрезки AM и AB в точках P и Q соответственно. Прямые QM и NC пересекаются в точке R, а прямые RB и AC — в точке S. Докажите равенство $PM = MS$.

25. [Теорема Жергона.] Пусть $ABCD$ — произвольная треугольная пирамида, а O — точка внутри этой пирамиды. Лучи AO, BO, CO, DO пересекают противоположные грани в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} + \frac{DO}{DD_1} = 3.$$

26. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, причём $AK : KB = DM : MC = \alpha$; $BL : LC = AN : ND = \beta$. Пусть O — точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NO : OL = \alpha$, $KO : OM = \beta$.

27. На рёбрах тетраэдра $ABCD$ взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, причём $AK : KB = DM : MC = \alpha$ и $BL : LC = AN : ND = \beta$. Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются в одной точке O, причём $NO : OL = \alpha$, $KO : OM = \beta$.

28. Докажите, что шары, построенные на рёбрах тетраэдра как на диаметрах, покрывают полностью этот тетраэдр.

29. Около окружности описан четырёхугольник $ABCD$, касающийся окружности в точках $K \in AB, L \in BC, M \in CD, N \in DA$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке Z. Найдите, в каком отношении точка Z делит отрезок KM, если $AK = a, BL = b$, $CM = c, DN = d$.

30. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, отсекающая $1/n$-ю часть от стороны AB, считая от вершины A. Какую часть от диагонали AC отсекает та же прямая?

31. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник; Q — середина стороны CD; M — точка пересечения диагоналей $ABCD$; прямая QM пересекает сторону AB в точке K. Найдите отношение $AK : KB$, если $AD = a$, $BC = b$.

32. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на три равные части. Соответствующие точки деления противоположных сторон соединены отрезками, в результате чего

[1]Симедиана — чевиана треугольника, луч которой симметричен лучу медианы относительно биссектрисы, выходящей из той же вершины — *Прим. ред.*

четырёхугольник разделён на девять клеток. Докажите, что площадь средней клетки составляет девятую часть площади исходного четырёхугольника.

33. $ABCD$ — трапеция, точки M и N — середины оснований BC и AD, O — точка пересечения диагоналей, E — точка пересечения продолжений боковых сторон. Докажите, что точки M, N, O и E лежат на одной прямой.

34. Дан треугольник ABC. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке T, а продолжений сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Отрезки QB и PC пересекаются в точке M. Докажите, что точки A, T и M лежат на одной прямой.

35. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает боковые рёбра SA, SB, SC и SD соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Известно, что $SA_1 : SA = 1 : a$, $SB_1 : SB = 1 : b$, $SC_1 : SC = 1 : c$. Найдите отношение $SD_1 : SD$.

36. В углы треугольника вписали три окружности так, что они касаются друг друга попарно внешним образом. Из каждой вершины провели прямую через точку касания окружностей, вписанных в два других угла. Докажите, что это прямые пересекаются в одной точки.

Указание. Придумайте, какие массы разместить в центрах окружностей, вписанных в углы, а также в центре вписанной окружности.

Пусть дан треугольник ABC. Пусть $M = c(x_1A, x_2B, x_3C)$, причём $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Тогда говорят, что точка M имеет барицентрические координаты (БСК) x_1, x_2, x_3 (относительно треугольника ABC). Аналогично определяются барицентрические координаты точки в пространстве относительно тетраэдра. Несложно убедиться в том, что точка лежит внутри треугольника (тетраэдра) тогда и только тогда, когда все её барицентрические координаты положительные.

37. Найдите барицентрические координаты центра окружности, вписанной в треугольник.

38. Найдите барицентрические координаты центра вневписанной окружности треугольника.

39. Пусть точка O лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что для её барицентрических координат справедливо: $x_1 : x_2 : x_3 = S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB}$.

40. Докажите, что в барицентрической системе координат относительно треугольника ABC уравнение прямой — линейное однородное:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

где неверно, что $a = b = c$.

41. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, в котором $BC \neq AB$; D — точка касания этой окружности со стороной AC; B_1 — середина AC. Докажите, что прямая B_1I делит отрезок BD пополам.

42. Докажите, что уравнение окружности, описанной вокруг ABC, в БСК имеет вид $a^2x_2x_3 + b^2x_3x_1 + c^2x_1x_2 = 0$, где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

43. На сторонах треугольника ABC отмечены точки $A_1 \in BC$, $A_2 \in A_1C$, $B_1 \in CA$, $B_2 \in B_1A$, $C_1 \in AB$, $C_2 \in C_1B$, для которых

$$\frac{CA_1}{a} = \frac{CB_2}{b} = \frac{a+b}{a+b+c}; \quad \frac{AB_1}{b} = \frac{AC_2}{c} = \frac{b+c}{a+b+c}; \quad \frac{BC_1}{c} = \frac{BA_2}{a} = \frac{c+a}{a+b+c}.$$

Докажите, что точки пересечения прямых A_1C_2, C_1B_2 и B_1A_2 лежат на описанной окружности треугольника ABC.

44. Найдите уравнение сферы, описанной вокруг тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ в БСК относительно данного тетраэра.

Ориентированным объёмом V_{ABCD} тетраэдра $ABCD$ называют смешанное произведение[2] векторов $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. По абсолютной величине ориентированный объём совпадает с обыч-

[2]Смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — это $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, где точка обозначает скалярное произведение, а крестик — векторное произведение — *Прим. ред.*

ным объёмом, а знак определяется ориентацией тройки векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Тройки векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда точки M и D лежат по одну сторону от плоскости ABC. Заметим также, что при циклической перестановке вершин ориентированный объём не меняется, а если поменять местами две соседние вершины, то сменится его знак.

45. Докажите, что барицентрические координаты точки $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ относительно тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ вычисляются по формулам

$$x_1 = \frac{V_{MA_2A_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}, \quad x_2 = \frac{V_{A_1MA_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}, \quad x_3 = \frac{V_{A_1A_2MA_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}, \quad x_4 = \frac{V_{A_1A_2A_3M}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}.$$

46. Дан тетраэдр $ABCD$. Известны площади граней: $S_{BCD} = S_1$, $S_{ACD} = S_2$,$S_{ABD} = S_3$, $S_{ABC} = S_4$. Найдите барицентрические координаты центров вписанной и вневписанных сфер.

47. [Олимпиада 239-й школы СПб, 2011.] Докажите, что из четырёх центров вневписанных сфер тетраэдра либо хотя бы один лежит вне описанной сферы и хотя бы один внутри, либо все четыре лежат на описанной сфере.

48. Докажите, что для равногранного тетраэдра центр любой вневписанной сферы лежит на описанной сфере.

49. [Теорема о плоском еже.] Каждой стороне выпуклого многоугольника сопоставим вектор, по длине равный этой стороне и направленный вовне многоугольника перпендикулярно этой стороне. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

50. Докажите теорему Ньютона. *В описанном четырёхугольнике середины двух диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.*

51. [Теорема о пространственном еже.] Каждой грани выпуклого многогранника сопоставим вектор, по длине равный площади этой грани и направленный вовне многогранника перпендикулярно этой грани. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

52. Докажите, что на рёбрах любого описанного многогранника можно расставить такие числа, что площадь любой грани этого многогранника численно равна сумме чисел, расставленных на рёбрах, ограничивающих эту грань.

53. [ММО, 2014, второй день, 11-5.] Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где $i, j, k = 1, 2$. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

Ответы

8. Нет. **11.** $AO : ON = 3 : 4$; $CO : OM = 32 : 3$. **12.** $AO : OA_1 = a_1(b_1 + b_2) : a_2b_1$; $BO : OB_1 = b_1(a_1 + a_2) : a_1b_2$. **13.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **14.** 5. **15.** 858. **16.** 6 : 7. **17.** $AO : OA_1 = (a_1 + a_2)b_1c_2 : (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)$; $B_1O : OC_1 = a_1b_1(c_1 + c_2) : a_2c_2(b_1 + b_2)$. **18.** $MO : ON = 6 : 13$. **19.** $m_1 = \frac{a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2}$; $m_2 = \frac{a_1b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_2}{c_2d_1 - c_1d_2}$; $m_3 = a_2b_1$. **29.** $KZ : ZM = ab(c + d) : cd(a + b)$. **30.** $\frac{1}{n+1}$. **31.** $\frac{a^2}{b^2}$. **35.** $\frac{1}{a-b+c}$. **37.** a/P, b/P, c/P, где a, b, c — длины сторон, P — периметр. **38.** Для вневписанной окружности, касающейся стороны длиной a, барицентрические координаты пропорциональны $(-a)$, b, c. **44.** $\sum A_iA_j^2x_ix_j = 0$. **46.** Для центра вписанной сферы $x_i = S_i/S$, где S — площадь полной поверхности. Для центра вневписанной сферы соответствующая координата меняет знак и осуществляется перенормировка координат.

Решения

1. Будем рассматривать радиус-векторы интересующих нас точек относительно фиксированной точки O. Пусть $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ и $\boldsymbol{r_i} = \overrightarrow{OM_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\sum m_i \overrightarrow{MA_i} = \sum m_i(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{r} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r_i}}{\sum m_i}.$$

Таким образом, при ненулевой суммарной массе материальных точек радиус-вектор точки M существует и определяется однозначно системой м. т.

2. Утверждение непосредственно извлекается из решения предыдущей задачи.

3. В равенстве (2) группировка масс сводится к замене слагаемых, отвечающих группируемым массам, их суммой (как слева от знака равенства, так и справа).

4. Пусть $ABCD$ — заданный четырёхугольник, E, F, G, H, K, N — соответственно середины отрезков AB, BC, CD, DA, AC, BD. Разместим в точках A, B, C, D единичные массы и будем группировать их всеми возможными способами по две м. т. Если точка M — общий центр масс, то

$$M = c(1A, 1B, 1C, 1D) = c(2E, 2G) = c(2F, 2H) = c(2K, 2N).$$

Поскольку после группировки в точках E и G, F и H, K и N расположены равные массы, точка M будет серединой каждого из отрезков EG, FH и KN.

5. В решении предыдущей задачи никак не использовалось, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Поэтому оно применимо и к случаю, когда A, B, C, D — вершины тетраэдра.

6. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр, точка A_1 — центр грани BCD. Разместим в вершинах тетраэдра единичные массы. Тогда $1B + 1C + 1D = 3A_1$ и $M = c(1A, 1B, 1C, 1D) = c(1A, 3A_1)$. Значит центр масс делит высоту AA_1 в отношении $3 : 1$, считая от вершины A. Но то же верно и для других трёх высот!

7. Заметим, что $C_1 = c(1A, pB)$, а $B_1 = c(1A, qC)$. Тогда центр системы м. т. $(1A, pB, qC)$ одновременно принадлежит отрезкам AA_1 и BB_1. Это означает, что $M = c(1A, pB, qC)$. Отсюда $pB + qC = (p + q)A_1$ и $M = c(1A, (p + q)A_1)$.

8. При указанных преобразованиях не меняется положение центра масс. Если же две точки сохранились, а третья поменяла положение, то центр масс сдвинулся.

9. Введём обозначения для длин отрезков касательных: $x = AB' = AC'$, $y = BA' = BC'$, $z = CB' = CA'$. Пусть $M = c(yzA, zxB, xyC)$. Тогда $M = c(y(x + z)B', zxB) \in BB'$. Точно так же доказывается, что точка M принадлежит отрезкам AA' и CC'.

Замечание. Эта точка M называется точкой Жергона.

10. Пусть отрезки касательных к сфере, проведённые из вершин A, B, C и D равны соответственно a, b, c и d. Тогда для распределения масс $\left(\dfrac{1}{a}A, \dfrac{1}{b}B, \dfrac{1}{c}C, \dfrac{1}{d}D\right)$ получится, что центр масс концов каждого ребра тетраэдра расположен в точке касания этого ребра и сферы. Значит, центр масс принадлежит отрезку, соединяющему точки касания любой пары скрещивающихся рёбер.

11. Поместим в точку B произвольную массу $m_2 \neq 0$. Массы m_1 и m_3 определим из условий $N = c(m_2B, m_3C)$ и $M = c(m_1A, m_2B)$. Правило рычага диктует равенства $m_2 = 4m_3$ и $3m_1 = 5m_2$.

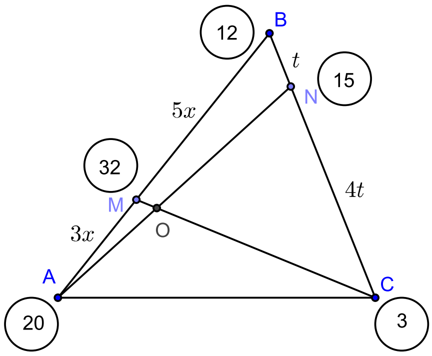

Рис. 1.

Удобно положить $m_2 = 12$. Тогда $m_3 = 3$, $m_1 = 20$. Теперь $O = c(20A, 15N)$, откуда $AO : ON = 15 : 20 = 3 : 4$. Одновременно имеем $O = c(3C, 32M)$. Значит, $CO : OM = 32 : 3$. На рис. 1 массы — числа в кружочках.

12. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс располагался в точке O. Вот как этого достичь. Если окажется, что

$$B_1 = c(m_1A, m_3C), \tag{3}$$

то, заменив материальные точки m_1A и m_3C их центром масс, мы получим вместо исходных трёх две м. т. m_2B и $(m_1 + m_3)B_1$ с тем же центром масс, который должен лежать на прямой BB_1. Точно так же, если

$$c(m_2B, m_3C) = A_1, \tag{4}$$

то $c(m_1A, m_2B, m_3C) \in AA_1$. Поскольку $O = AA_1 \cap BB_1$, получим, что $O = c(m_1A, m_2B, m_3C)$. Условия (3) и (4), по правилу рычага, можно записать в виде

$$m_1a_1 = m_3a_2; \quad m_2b_1 = m_3b_2. \tag{5}$$

Ясно, что при умножении всех масс на одно и то же ненулевое число положение центра масс не меняется. Поэтому можно в качестве m_3 выбрать любое ненулевое число, после чего из равенств (5) две другие массы определятся однозначно. Удобно положить $m_3 = a_1b_1$. Тогда $m_1 = a_2b_1$ и $m_2 = a_1b_2$.

После того, как искомое распределение масс найдено, легко ответить на вопросы задачи. Поскольку $O = c(a_1b_2B, (a_2b_1 + a_1b_1)B_1)$, по правилу рычага имеем $BO : OB_1 = b_1(a_1 + a_2) : a_1b_2$. Аналогично находим, что $AO : OA_1 = a_1(b_1 + b_2) : a_2b_1$.

13. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс был в точке F. Для этого необходимо и достаточно, чтобы центр масс, расположенных в точках A и B, был в точке E, а в точках C и B — в точке D. Поскольку $AE : EB = k$, масса в вершине B должна быть в k раз больше, чем в точке A. Так же получаем равенство масс в точках C и K. Итак, $F = c(1A, kB, kC) = c((1 + k)E, kC)$. Теперь из условия $CF : FE = k$, согласно правилу рычага, получаем $k^2 = k + 1$, откуда и находится k. Таким образом, ответом к задаче служит отношение золотого сечения.

14. Для того, чтобы вычислить искомую площадь, достаточно найти, в каком отношении точки K и N делят отрезки AE и AF, поскольку

$$S_{KEFN} = \left(1 - \frac{AK}{AE} \cdot \frac{AN}{AF}\right) S_{AEF}; \quad S_{AEF} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

Заметим, что $N = c(1A, 2C, 1B) = c(1A, 3F)$. Отсюда $AN = \frac{3}{4}AF$. С другой стороны, $K = c(1A, 2C, 4B) = c(1A, 6E)$ и $AK = \frac{6}{7}AE$.

15. Заметим сначала, что $BO : OL = S_{BOA} : S_{OLA} = 6 : 5$ и $AO : OK = S_{AOB} : S_{KOB} = 6 : 7$. Подберём такие массы x, y и z, чтобы $O = c(xA, yB, zC)$. Необходимо и достаточно, чтобы $L = c(xA, zC)$ и $K = c(yB, zC)$. Поскольку $O = c(yB, (x + z)L)$ и $BO : OL = 6 : 5$, имеем $6y = 5(x + z)$. А из соотношений $O = c(xA, (y + z)K)$ и $AO : OK = 6 : 7$ получаем $6x = 7(y + z)$. Из найденных уравнений находим, что $x = 77z$ и $y = 65z$. Отсюда $CL = 77LA$, $S_{BCL} = 77S_{ALB}$, $S_{ABC} = 78S_{ALB} = 78 \cdot 11 = 858$.

16. Найдём такие массы, что $O = c(m_1A, m_2B, m_3C)$. Заметим, что $O \in AN \iff N = c(m_2B, m_3C)$. Значит, $m_2 = 2m_3$. Чтобы добиться попадания центра масс на отрезок KM, расщепим массу m_1 на две части m_1' и m_1'' так, что $M = c(m_1'A, m_2B)$ и $K = c(m_1'', m_3C)$. Отсюда $2m_1' = 3m_2$ и $2m_1'' = m_3$. Положим $m_3 = 2$. Тогда $m_2 = 4$, $m_1' = 6$, $m_1'' = 1$. Полученное распределение масс показано на рис. 2. Оно гарантирует попадание центра масс в O — точку пересечения AN и KM.

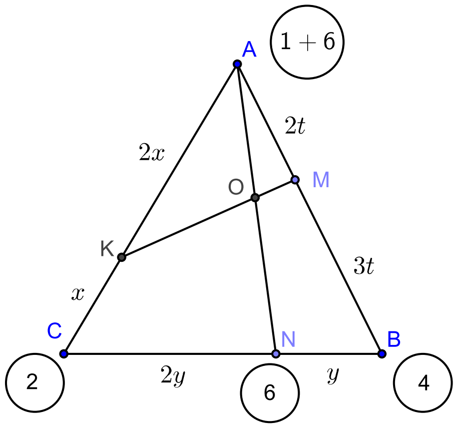

Рис. 2.

Имеем $O = c(7A, 6N)$. Значит, $AO : ON = 6 : 7$.

17. Повторим решение предыдущей задачи в общем виде.

Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс оказался в точке O. Массы в вершинах B и C выбираются из условия

$$A_1 = c(m_2B, m_3C). \tag{6}$$

Этим условием обеспечивается попадание центра масс на прямую AA_1. А вот для того, чтобы центр масс одновременно принадлежал и прямой B_1C_1, расщепим массу в вершине A, т. е. будем считать, что в данной вершине расположены такие две материальные точки $m_1'A$ и $m_1''A$, для которых в результате группировки

$$B_1 = c(m_1''A, m_3C); \quad C_1 = c(m_1'A, m_2B). \tag{7}$$

Из (6) и (7) с помощью правила рычага выводим равенства

$$m_2a_2 = m_3a_1; \quad m_1'c_2 = m_2c_1; \quad m_1''b_1 = m_3b_2.$$

Удобно взять $m_2 = a_1b_1c_2$. Тогда $m_3 = a_2b_1c_2$, $m_1' = a_1b_1c_1$, $m_1'' = a_2b_2c_2$. Поскольку

$$O = c((m_1' + m_1'')A_1, m_2B + m_3C) = c((a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)A, (a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2)A_1),$$

получаем

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{(a_1 + a_2)b_1c_2}{a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2}.$$

Точно так же из группировки масс

$$O = c(m_1'A + m_2B, m_1''A + m_3C) = c((a_1b_1c_1 + a_1b_1c_2)C_1, (a_2b_2c_2A + a_2b_1c_2)B_1)$$

находим отношение

$$\frac{B_1O}{OC_1} = \frac{a_1b_1(c_1 + c_2)}{a_2c_2(b_1 + b_2)}.$$

18. Найдём сначала распределение масс (xA, yB, zC), центр которого будет в точке O (рис. 3).

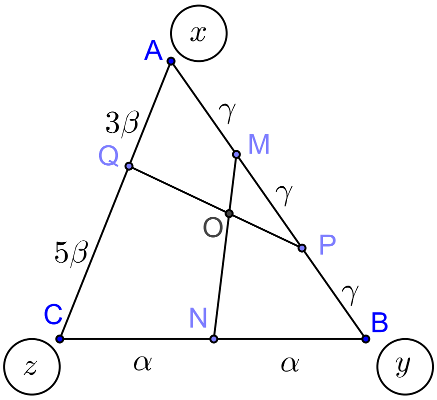

Рис. 3.

Расщепим массу в вершине A $(x = x_1 + x_2)$ так, чтобы $Q = c(x_1A, zC)$ и $P = c(x_2A, yB)$. По данному в условии отношению интересующих нас отрезков находим, что $x_1 = \frac{5}{3}z$ и $x_2 = \frac{1}{2}y$.

Теперь расщепим массу в вершине B $(y = y_1 + y_2)$ так, чтобы $M = c(y_1B, xA)$ и $N = c(y_2B, zC)$. Отсюда $y_1 = \frac{1}{2}x$ и $y_2 = z$. Имеем систему уравнений

$$x = \frac{5}{3}z + \frac{1}{2}y; \quad y = \frac{1}{2}x + z.$$

Пусть $z = 3$. Тогда $x = \frac{26}{3}$, $y = \frac{22}{3}$. Для нахождения отношения, в каком точка O делит MN, нам интересны массы, возникающие в результате группировок $y_1B + xA$ и $y_2B + zC$. Поскольку $y_1 = \frac{x}{2} = \frac{13}{3}$, а $y_2 = z = 3$, получаем

$$\frac{13}{3}B + \frac{26}{3}A = 13M; \quad 3B + 3C = 6N.$$

Таким образом, $O = c(13M, 6N)$. Значит, $MO : ON = 6 : 13$.

19. Пусть искомое распределение масс (xA, yB, zC).

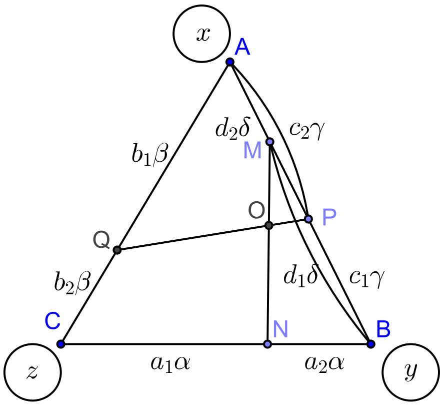

Рис. 4.

Расщепим массу $x = x_1 + x_2$ так, чтобы $P = c(x_1A, yB)$ и $Q = c(x_2A, zC)$. Для этого должны выполняться равенства $x_1c_2 = yc_1$ и $x_2b_1 = zb_2$. При этом общий центр масс попадёт на прямую PQ. А для попадания его на прямую MN будем расщеплять массу в вершине B:

$$y = y_1 + y_2; \quad c(y_1B, xA) = M; \quad c(y_2B, zC) = N; \quad y_1d_1 = xd_2; \quad y_2a_2 = za_1.$$

С учётом предыдущих соотношений получаем:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{c_1}{c_2}y + \frac{b_2}{b_1}z; \quad y = y_1 + y_2 = \frac{d_2}{d_1}x + \frac{a_1}{a_2}z.$$

Ничто не мешает нам взять $z = a_2b_1$ (ведь все массы, напомним, определяются с точностью до постоянного множителя). Тогда возникнет система двух линейных уравнений в двумя неизвестными:

$$x = \frac{c_1}{c_2}y + a_2b_2; \quad y = \frac{d_2}{d_1}x + a_1b_1. \tag{8}$$

Из условия задачи следует, что точки M и P не совпадают. Поэтому они делят сторону BA в разных отношениях: $\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$. Легко проверить, что при этом система (8) имеет единственное решение

$$x = \frac{a_1b_1c_1d_1 + a_2b_2c_2d_1}{c_2d_1 - c_1d_2}; \quad y = \frac{a_1b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_2}{c_2d_1 - c_1d_2}.$$

Замечание. Как показано в [2], для найденных масс справедливо следующее: $x + y + x = 0 \iff MN \parallel PQ$. Значит, условие задачи гарантирует, что суммарная масса будет ненулевой.

20. План доказательства очень простой: найдём такое распределение масс в вершинах треугольника, чтобы их центр принадлежал двум из указанных прямых, после чего убедимся, что он лежит и на третьей прямой.

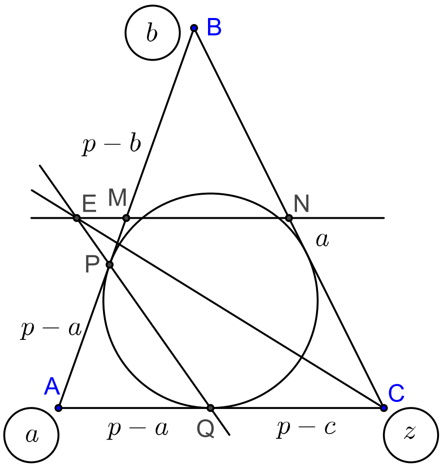

Рис. 5.

Пусть, как обычно, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Мы знаем, что биссектриса l угла C делит сторону AB в отношении $b : a$, считая от вершины A. Поэтому если поместить в вершину A массу a, а в вершину B массу b, то при любом z центр масс $c(aA, bB, zC)$ лежит на l. Чтобы этот центр лежал на прямой MN, где M и N — середины AB и AC, масса b должна допускать расщепление $b = a + z$, откуда $z = b - a$. Значит, если $E = l \cap MN$, то $E = c(aA, bB, (b - a)C)$.

Пусть P и Q — точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC (рис. 5). Как известно, $AP = AQ = p - a$, $BP = p - b$, $CP = p - c$, где p — полупериметр треугольника ABC. Чтобы центр масс E лежал на прямой PQ, масса a должна быть представима в виде такой суммы $a = a_1 + a_2$, что $c(a_1A, bB) = P$ и $c(a_2A, (b - a)C) = Q$. По правилу рычага имеем

$$a_2(p - a) = b(p - b); \quad a_1(p - a) = (b - a)(p - c).$$

Значит, должно выполняться равенство

$$a = \frac{p-b}{p-a} \cdot b + \frac{p-c}{p-a} \cdot (b-a).$$

И оно, как показывают простейшие выкладки, действительно выполняется.

Итак, намеченный план осуществлён. Утверждение доказано.

21. Пусть $O = CC_1 \cap AA_1$. Разместим в вершинах треугольника ABC такие массы, что их центр масс окажется в точке O. Обозначим $a_1 = AB_1$, $a_2 = B_1C$, $b_1 = BC_1$, $b_2 = C_1A$, $c_1 = AB_1$, $c_2 = B_1C$. Легко проверить, что подходящими будет распределение масс $(a_1b_1A, a_1b_2B, a_2b_2C)$ (рис. 6).

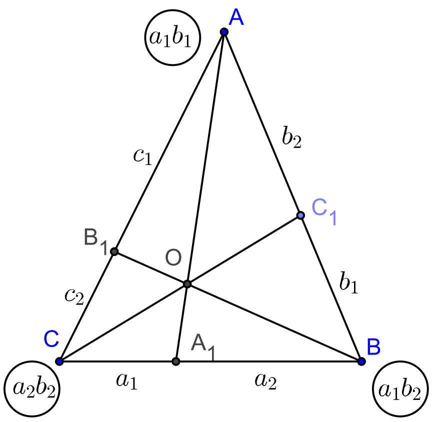

Рис. 6.

Если выполнено равенство

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1, \tag{9}$$

то $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ и $c(a_1b_1A, a_2b_2C) = B_1$. Но тогда центр масс O должен лежать на прямой BB_1, другими словами, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Обратно, если прямая BB_1 проходит через точку O, то $B_1 = c(a_1b_1A, a_2b_2C)$, что вновь даёт равенство $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$, равносильное (9).

22. Если массу z можно расщепить на массы z_1 и z_2 так, что $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$, то $c(xA, yB, zC) \in A_1B_1$.

Верно и обратное. Пусть $D = c(xA, yB, zC) \in A_1B_1$. Тогда найдутся такие массы m' и m'', что $D = c(m'A_1, m''B_1)$ и $m' + m'' = x + y + z$. Теперь по x и y определим массы z_1 и z_2, такие что $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$. При этом $z_1 + x = m''$, $z_2 + y = m'$, откуда с учётом предыдущего выводим, что $z = z_1 + z_2$.

Итак, центр системы материальных точек (xA, yB, zC) принадлежит прямой A_1B_1 тогда и только тогда, когда существует расщепление масс $z = z_1 + z_2$, для которого $c(z_1C, xA) = B_1$ и $c(z_2C, yB) = A_1$, или

$$z_1\overrightarrow{B_1C} + x\overrightarrow{B_1A} = \mathbf{0}; \quad z_2\overrightarrow{A_1C} + y\overrightarrow{A_1B} = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Если вспомнить соотношения $\overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{CA_1} = \alpha\overrightarrow{A_1B}$, получим, что условия (10) можно записать в виде $z_1 = \alpha x$ и $z_2 = \frac{y}{\beta}$. Итог проведённых выкладок:

$$c(xA, yB, zC) \in A_1B_1 \iff z = \alpha x + \frac{y}{\beta}. \tag{11}$$

Аналогично получается утверждение:

$$c(xA, yB, zC) \in B_1C_1 \iff x = \gamma y + \frac{z}{\alpha}. \tag{12}$$

Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда совпадают прямые A_1B_1 и B_1C_1, то есть, согласно (11)–(12), когда одновременно выполняются равенства

$$z = \alpha x + \frac{y}{\beta}; \quad x = \gamma y + \frac{z}{\alpha}.$$

Отсюда $z = \alpha(\gamma y + \frac{z}{\alpha}) + \frac{y}{\beta} = \alpha\gamma y + z + \frac{y}{\beta}$, что означает $\alpha\gamma + \frac{1}{\beta} = 0$, или $\alpha\beta\gamma = -1$, что и требовалось доказать.

23. Пусть M — точка пересечения чевиан AA_1, BB_1 и CC_1 и числа m_1, m_2, m_3 выбраны так, что $M = c(m_1A, m_2B, m_3C)$. Пусть также A_2, B_2, C_2 — соответственно середины сторон BC, CA, AB, а A_3, B_3, C_3 — середины соответствующих чевиан. Положим $O = c(m_1(m_2 + m_3)A, m_2(m_1 + m_3)B, m_3(m_1 + m_2)C)$. Заметим, что

$$m_1(m_2+m_3)A + m_2(m_1+m_3)B + m_3(m_1+m_2)C =$$

$$= m_1(m_2+m_3)A + m_1(m_2B + m_3C) + m_2m_3(1B + 1C) =$$

$$= m_1(m_2+m_3)A + m_1(m_2+m_3)A_1 + 2m_2m_3A_2 =$$

$$= 2m_1(m_2+m_3)A_3 + 2m_2m_3A_2.$$

Значит, точка O лежит на прямой A_2A_3. Аналогично доказывается, что O лежит и на прямых B_2B_3 и C_2C_3.

24. Поместим в точки A и C единичные массы, а в точки B и N такие массы x и y, что $Q = c(1A, xB)$ и $M = c(xB, yN)$ (рис. 7).

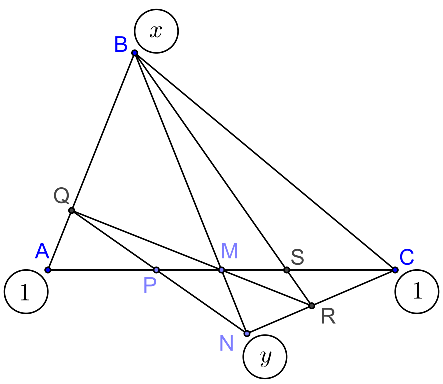

Рис. 7.

Поскольку также $M = c(1A, 1C)$, имеем теперь

$$M = c(1A, xB, 1C, yN) = c((1+x)Q, 1C, yN).$$

Отсюда $R = c(1C, yN)$. По-разному группируя массы в точках A, B и N, получаем

$$c(1A, xB, yN) = c((1+x)Q, yN) \in QN, \quad c(1A, xB, yN) = c(1A, (x+y)M) \in AM,$$

откуда $c(1A, xB, yN) = QN \cap AM = P$. А разные способы группировки масс $(1C, xB, yN)$ приводят к соотношениям

$$c(1C, xB, yN) = c((1+y)R, xB) \in BR, \quad c(1C, xB, yN) = c(1C, (x+y)M) \in CM,$$

откуда $c(1C, xB, yN) = BR \cap CM = S$. Наконец, по-разному будем группировать массы $(1A, 1C, 2xB, 2yN)$. С одной стороны, $M = c(1A, 1C)$ и $M = c(2xB, 2yN)$, откуда $M = c(1A, 1C, 2xB, 2yN)$. С другой стороны, $1A + xB + yN = (1+x+y)P$ и $1C + xB + yN = (1+x+y)S$. Значит, $M = c\big((1+x+y)P,$

$(1+x+y)S)$. Получилось, что центр двух одинаковых масс в точках P и S расположен в точке M. Поэтому M — середина отрезка PS.

25. Пусть $O = c(m_1A, m_2B, m_3C, m_4D)$, причём $m_1+m_2+m_3+m_4 = 1$. Очевидно, что при этом точки A_1, B_1, C_1, D_1 должны быть центрами масс граней тетраэдра, в которых они лежат. Например,

$$m_2B + m_3C + m_4D = (m_2+m_3+m_4)A_1 = (1-m_1)A_1.$$

Поскольку $O = c(m_1A, (1-m_1)A_1)$, по правилу рычага имеем

$$m_1 \cdot AO = (1-m_1)\cdot OA_1,$$

или $m_1\cdot AO = (1-m_1)\cdot(AA_1 - AO)$, откуда $\frac{AO}{AA_1} = 1 - m_1$. Сложив это и три аналогичных ему равенства, имеем

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} + \frac{DO}{DD_1} = 1 - m_1 + 1 - m_2 + 1 - m_3 + 1 - m_4 = 4 - 1 = 3.$$

26. Из соотношений $c(1A, \alpha B) = K, \quad c(\beta D, \alpha\beta C) = M$ следует, что

$$c(1A, \alpha B, \alpha\beta C, \beta D) \in KM.$$

Аналогично, $c(1A, \alpha B, \alpha\beta C, \beta D) \in LN$. Значит,

$$O = c(1A, \alpha B, \alpha\beta C, \beta D) = c((1+\alpha)K, \beta(1+\alpha)M) = c((1+\beta)N, \alpha(1+\beta)L).$$

Отсюда $KO : OM = \beta$, $NO : OL = \alpha$.

27. В решении предыдущей задачи никак не использовалось, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Поэтому оно применимо и к случаю, когда A, B, C, D — вершины тетраэдра.

28. Доказательство от противного. Пусть O — точка тетраэдра, не покрытая шарами. Тогда все рёбра тетраэдра видны из этой точки под острыми углами. Обозначим через $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_3}$, $\boldsymbol{r_4}$ векторы, идущие от точки O к вершинам тетраэдра. Попарные углы между этими векторами острые; стало быть, попарные скалярные произведения векторов положительны. Разместим в вершинах тетраэдра такие (положительные) массы m_1, m_2, m_3, m_4, чтобы точка O стала центром масс. Тогда $m_1\boldsymbol{r_1} + m_2\boldsymbol{r_2} + m_3\boldsymbol{r_3} + m_4\boldsymbol{r_4} = \boldsymbol{0}$. Умножение обеих частей полученного векторного равенства скалярно на вектор $\boldsymbol{r_1}$ приводит к противоречию (левая часть положительна, а правая равна нулю).

29. Поместим в каждую вершину массу, обратную по величине соответствующему отрезку касательной к окружности. Тогда

$$Z = c\left(\frac{1}{a}A, \frac{1}{b}B, \frac{1}{c}C, \frac{1}{d}D\right) = \left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)K, \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)M\right).$$

Отсюда

$$\frac{KZ}{ZM} = \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{ab(c+d)}{cd(a+b)}.$$

30. Пусть прямая из условия задачи пересекает сторону AB в точке K, а диагональ AC — в точке N. Пусть также O — центр параллелограмма. Заметим, что $N = c((n-1)A, 1B, 1D) = c((n-1)A, 2O)$. Отсюда $AN : AO = 2 : (n+1)$ и $AN : AC = 1 : (n+1)$.

31. Обозначим $MD = x$, $MA = z$, $MB = y$, $MC = t$. Из подобия треугольников ADM и BCM имеем $x : t = z : y = a : b$. Разумно найти такое распределение масс в вершинах четырёхугольника, чтобы его центр масс был в точке M и при этом массы в точках C и D были равны друг другу. Имеем $M = c(yzC, ytA) = c(yzD, xzB)$. Отсюда $K = c(ytA, xzB)$ и

$$\frac{AK}{KB} = \frac{xz}{yt} = \frac{x}{t} \cdot \frac{z}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

32. Пусть точки деления сторон $A_1, A_2, \ldots, D_3, D_4$ (рис. 8).

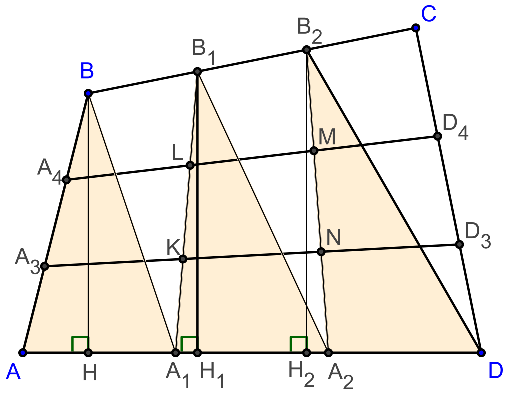

Рис. 8.

Сначала докажем, что $S_{A_1B_1B_2A_2} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$.

Пусть H, H_1, H_2 — основания перпендикуляров, опущенных из точек B, B_1 и B_2 на прямую AD. Тогда H_2HBB_2 — прямоугольная трапеция, а H_1B_1 — её средняя линия. Отсюда $B_1H_1 = \frac{1}{2}(BH + B_2H_2)$ и $S_{A_1B_1A_2} = \frac{1}{2}(S_{ABA_1} + S_{A_2B_2D})$. Так же и $S_{A_2B_1B_2} = \frac{1}{2}(S_{A_1BB_1} + S_{DB_2C})$. Сложив эти равенства, получим $S_{A_1B_1B_2A_2} = \frac{1}{2}(S_{ABB_1A_1} + S_{B_2CDA_2})$, что равносильно требуемому.

Из задачи 26 следует, что точки пересечения соответствующих отрезков K и L, N и M делят отрезки A_1B_1 и A_2B_2 на равные части. Поэтому

$$S_{KLMN} = \frac{1}{3}S_{A_1B_1B_2A_2} = \frac{1}{9}S_{ABCD}.$$

33. Пусть длины оснований трапеции $a = AD$, $b = BC$. Из подобия треугольников BOC и DOA имеем $O = c(aC, bA) = c(aB, bD)$. Отсюда

$$O = c(bA, aB, aC, bD) = c(2aM, 2bN) \in MN.$$

С другой стороны, $E = c(-aB, bA) = c(-aC, bD)$ и

$$E = c(bA, -aB, -aC, bD) = c(-2aM, 2bN) \in MN.$$

34. Обозначим $a = AP = AQ$, $b = BP = BT$, $c = CQ = CT$. Тогда $AB = a - b$, $AC = a - c$. Нетрудно найти распределение масс в точках A, P, Q, центр которого будет в точке M. Имеем $c(bcA, c(a-b)P) = B$, $c(bcA, b(a-c)Q) = C$. Поэтому $c(bcA, c(a-b)P, b(a-c)Q) = QB \cap PC = M$. При этом $bcA + c(a-b)P + b(a-c)Q = (ab + ac - bc)M$. С другой стороны, $bcA + c(a-b)P = acB$, $bcA + b(a-c)Q = abC$, $acB + abC = a(b+c)T$. Поэтому, по-разному группируя массы, имеем

$$2bcA + c(a-b)P + b(a-c)Q = bcA + (ab + ac - bc)M = a(b+c)T.$$

Получилось, что центр некоторых (положительных) масс в точках A и M расположен в точке T. Это и означает, что точка T лежит на отрезке AM.

35. По условию,

$$1A + (a-1)S = aA_1; \quad 1B + (b-1)S = bB_1; \quad 1C + (c-1)S = cC_1.$$

Кроме того, поскольку $ABCD$ — параллелограмм, $1A + (-1)B + 1C = 1D$. Пусть $M = c(aA_1, -bB_1, cC_1)$. Тогда $M \in \alpha$. С другой стороны,

$$(a - b + c)M = 1A + (a-1)S - (1B + (b-1)S) + 1C + (c-1)S =$$

$$= (1A - 1B + 1C) + (a - b + c - 1)S = 1D + (a - b + c - 1)S.$$

Значит, точка M лежит на прямой DS. Получается, что $M = \alpha \cap DS = D_1$. Поскольку $D_1 = c(1D, (a - b + c - 1)S)$, справедливо равенство $\dfrac{SD_1}{D_1D} = \dfrac{1}{a-b+c-1}$, откуда $\dfrac{SD_1}{SD} = \dfrac{1}{a-b+c}$.

36. Пусть $A_1A_2A_3$ — данный треугольник. Рассмотрим точку

$$M = c\left(-\frac{1}{r}I, \frac{1}{r_1}I_1, \frac{1}{r_2}I_2, \frac{1}{r_3}I_3\right),$$

где I и r — центр и радиус вписанной окружности, I_i и r_i — центр и радиус окружности, вписанной в i-й угол треугольника ($i = 1, 2, 3$). Обозначим через B_i точку касания окружностей, вписанных в углы, отличные от i-го угла. Тогда, например, $B_1 = c\left(\frac{1}{r_2}I_2, \frac{1}{r_3}I_3\right)$. Несложно вывести, что $A_1 = c\left(-\frac{1}{r_1}I_1, \frac{1}{r}I\right)$. Значит, M — центр двух масс, сосредоточенных в точках A_1 и B_1. Следовательно, $M \in A_1B_1$. Точно так же доказывается, что точка M принадлежит прямым A_2B_2 и A_3B_3.

37. Пусть ABC — данный треугольник с длинами сторон $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Центр вписанной окружности I лежит на биссектрисе AA_1. Поэтому если $I = c(xA, yB, zC)$, то $A_1 = c(yB, zC)$. По теореме о биссектрисе получаем $y : z = b : c$. Аналогичное рассуждение для другой биссектрисы приводит к пропорции $x : y = a : b$. Таким образом, барицентрические координаты центра вписанной окружности пропорциональны длинам сторон треугольника.

38. Пусть I и I_1 — соответственно центры вписанной окружности и вневписанной, касающейся стороны BC; а r и r_1 — радиусы этих окружностей. Хорошо известно, что $\frac{r}{r_1} = \dfrac{b+c-a}{a+b+c}$, где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Как мы уже знаем, $I = c(aA, bB, cC)$, откуда

$$(a+b+c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Поскольку точка I_1 лежит на биссектрисе угла A, существует такое число x, что $I_1 = c(xA, bB, cC)$. При этом

$$(x+b+c)\overrightarrow{AI_1} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Значит,

$$(a+b+c)\overrightarrow{AI} = (x+b+c)\overrightarrow{AI_1}. \tag{13}$$

Если опустить из точек I и I_1 перпендикуляры на прямую AB, получим подобные прямоугольные треугольники, откуда $AI : AI_1 = r : r_1$, т.е. $r_1\overrightarrow{AI} = r\overrightarrow{AI_1}$, или (учитывая выражение для отношения радиусов $\frac{r_1}{r}$)

$$(a+b+c)\overrightarrow{AI} = (b+c-a)\overrightarrow{AI_1}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что $x = -a$.

39. Пусть O — точка пересечения чевиан AA', BB', CC'. Заметим, что

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OBC}} = \frac{S_{B'AB}}{S_{B'BC}} = \frac{d_A}{d_C} = \frac{AB'}{B'C},$$

где d_A и d_C — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и C на прямую BB'. Если $O = c(xA, yB, zC)$, то $B' = c(xA, zC)$. Отсюда $x : z = B'C : AB' = S_{OBC} : S_{OAB}$. Аналогичное рассуждение для другой чевианы приводит к пропорции

$$x : y = S_{OBC} : S_{OCA}.$$

40. Рассмотрим сначала точки вида $M(x_1, x_2, x_3)$, барицентрические координаты которых удовлетворяют уравнению $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Хотя бы два коэффициента при неизвестных не равны друг другу. Пусть $b \neq c$. Тогда, учитывая, что $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, получим уравнение

$$(a-c)x_1 + (b-c)x_2 + c = 0,$$

из которого выводим линейную зависимость x_2 от x_1:

$$x_2 = l_1 x_1 + m_1.$$

Имеем также $x_3 = 1 - x_1 - x_2 = l_2 x_1 + m_2$. Условие $M = c(x_1 A, x_2 B, x_3 C)$ равносильно векторному равенству

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} + x_3\overrightarrow{OC}.$$

С учётом найденных соотношений,

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{OA} + (l_1x_1 + m_1)\overrightarrow{OB} + (l_2x_1 + m_2)\overrightarrow{OC} = x_1\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{s},$$

где $\boldsymbol{r_0}$ и $\boldsymbol{s}$ — некоторые фиксированные векторы. Получили запись уравнения прямой в векторном виде.

Обратно. Найдётся вершина, через которую не проходит заданная прямая l. Пусть это точка A, а l пересекает прямые AB и AC в двух разных точках K и N. Если $M \in l$, то для некоторых масс z_1 и z_2 справедливо $M = c(z_1K, z_2N)$. По z_1 и z_2 однозначно определяются массы x_1', x_2, x_1'', x_3, для которых $z_1K = x_2B + x_1'A$ и $z_2N = x_3C + x_1''A$, причём $x_1' = k_1x_2$, $x_1'' = k_2x_3$, где коэффиценты k_1 и k_2 определяются отношениями, в которых точки K и N делят соответственно отрезки AB и AC. Полезно заметить, что $k_1 \neq -1$ и $k_2 \neq -1$, Значит, $M = c((x_1'+x_2'')A, x_2B, x_3C)$ и $x_1 = x_1' + x_1'' = k_1x_2 + k_2x_3$, т. е. барицентрические координаты точки связаны линейным однородным уравнением

$$x_1 - k_1x_2 - k_2x_3 = 0,$$

в котором коэффицент при x_1 отличен, например, от коэффициента при x_2.

41. Будем рассматривать барицентрические координаты точек относительно базисного треугольника ABC. Запись $M(x_1, x_2, x_3)$ будет означать, что $M = c(x_1A, x_2B, x_3C)$ и $x_1+x_2+x_3 = 1$. Имеем следующие координаты точек из условия задачи:

$$A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,1),\ B_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\ I\left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right),\ D\left(\frac{p-c}{b}, 0, \frac{p-a}{b}\right),$$

где, как обычно, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Уравнение прямой BD:

$$(p-a)x_1 = (p-c)x_3. \tag{15}$$

Пусть $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$ — уравнение прямой B_1I. Определим коэффициенты при неизвестных. Подставив в указанное уравнение координаты точек B_1 и I, получим

$$\alpha + \gamma = 0; \quad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0.$$

Отсюда $\alpha(a-c) + \beta b = 0$ и можно положить $\alpha = b$, $\beta = c - a$ и $\gamma = -b$. Итак, уравнение прямой B_1I:

$$bx_1 + (c-a)x_2 - bx_3 = 0. \tag{16}$$

Кроме того,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{17}$$

Решив систему трёх линейных уравнений (15)–(17) с тремя неизвестными, найдём барицентрические координаты точки пересечения прямых BD и B_1I: $x_1 = \dfrac{p-c}{2b}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{p-a}{2b}$. Равенство $x_2 = \dfrac{1}{2}$ и говорит о том, что эта точка делит пополам отрезок BD.

42. Введём векторы $\boldsymbol{r_1} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{r_2} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{r_3} = \overrightarrow{OC}$, где O — центр описанной окружности. Заметим, что длины этих векторов равны R — радиусу окружности. Выразим через барицентрические координаты x_1, x_2, x_3 точки M и стороны треугольника расстояние от M до центра окружности. Для этого части векторного равенства $\overrightarrow{OM} = x_1\boldsymbol{r_1}+x_2\boldsymbol{r_2}+x_3\boldsymbol{r_3}$ возведём в квадрат:

$$\overrightarrow{OM}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)R^2 + 2x_1x_2\boldsymbol{r_1} \cdot \boldsymbol{r_2} + 2x_2x_3\boldsymbol{r_2} \cdot \boldsymbol{r_3} + 2x_3x_1\boldsymbol{r_3} \cdot \boldsymbol{r_1}.$$

Заметим, что

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

Поэтому

$$\overrightarrow{OM}^2 = R^2 - (2R^2 - 2\boldsymbol{r_1} \cdot \boldsymbol{r_2})x_1x_2 - (2R^2 - 2\boldsymbol{r_2} \cdot \boldsymbol{r_3})x_2x_3 - (2R^2 - 2\boldsymbol{r_3} \cdot \boldsymbol{r_1})x_2x_3. \qquad (18)$$

Между тем, $c = |\overrightarrow{AB}| = |\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|$, откуда $c^2 = (\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1})^2 = 2R^2 - 2\boldsymbol{r_2} \cdot \boldsymbol{r_1}$. Аналогично получаются равенства $a^2 = 2R^2 - 2\boldsymbol{r_3} \cdot \boldsymbol{r_2}$ и $b^2 = 2R^2 - 2\boldsymbol{r_1} \cdot \boldsymbol{r_3}$. Теперь (18) можно переписать в виде

$$OM^2 = R^2 - (c^2x_1x_2 + a^2x_2x_3 + b^2x_3x_1).$$

Значит, точка $M(x_1, x_2, x_3)$ принадлежит описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда

$$c^2x_1x_2 + a^2x_2x_3 + b^2x_3x_1 = 0.$$

43. Уравнение окружности, описанной вокруг треугольника, в барицентрических координатах имеет вид

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0. \qquad (19)$$

Пусть $O = B_2C_1 \cap A_1C_2$ (рис. 9).

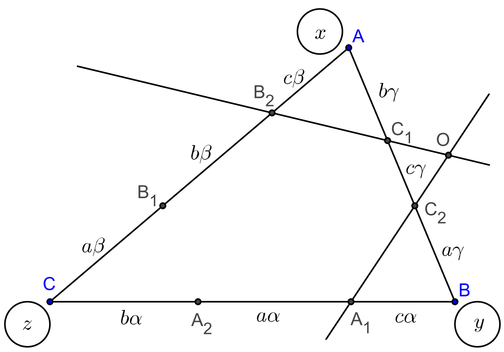

Рис. 9.

Расщепим массу $x = x_1 + x_2$ так, что $c(x_1A, yB) = C_1$ и $c(x_2A, zC) = B_2$, а массу $y = y_1 + y_2$ так, что $c(y_1B, xA) = C_2$ и $c(y_2B, zC) = A_1$. Этим будет гарантировано, что точка O одновременно принадлежит прямым B_2C_1 и A_1C_2. Используя правило рычага, имеем:

$$x = \frac{a+b}{c}z + \frac{a+c}{b}y; \quad y = \frac{a+b}{c}z + \frac{b+c}{a}x. \qquad (20)$$

Если взять $z = c^2$, то, решив систему (20), получим $x = -a(a+b)$, $y = -b(a+b)$. Непосредственная подстановка найденных значений x, y и z в (19) показывает, что (19) действительно выполняется.

Ситуация для двух других пар прямых аналогична, поскольку прямые переходят друг в друга в результате циклической перестановки вершин.

44. Повторяя выкладки из решения задачи 42, получим выражение для квадрата расстояния от точки $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до центра описанной сферы:

$$OM^2 = R^2 - \sum_{i<j} A_iA_j^2 x_i x_j,$$

где O — центр сферы, R — её радиус. Значит, уравнение описанной сферы таково:

$$\sum_{i<j} A_iA_j^2 x_i x_j = 0.$$

45. Для любой точки O выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OM} = \sum\limits_{i=1}^{4} x_i \overrightarrow{OA_i}$. Если взять в качестве O точку A_4, получим, что

$$\overrightarrow{A_4M} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overrightarrow{A_4A_i}.$$

Умножим скалярно обе части равенства на вектор $\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}$:

$$(\overrightarrow{A_4M}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}) = x_1(\overrightarrow{A_4A_1}, \overrightarrow{A_4A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}).$$

Отсюда $x_1 = \frac{V_{MA_2A_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3A_4}}$. Аналогично выводятся формулы для x_2, x_3, x_4.

46. Рассмотрим тетраэдры $OBCD$, $AOCD$, $ABOD$ и $ABCO$, где O — центр вписанной сферы. Во-первых, ориентированный объём любого из них имеет тот же знак, что и ориентированный объём тетраэдра $ABCD$ (здесь важно лишь то, что точка O внутри тетраэдра). Во-вторых, высоты этих тетраэдров, проведённые из точки O, равны радиусу вписанной сферы. Поэтому отношение объёмов, значит, и барицентрических координат равно отношению площадей соответствующих граней.

Пусть теперь O_1 — центр вневписанной сферы, касающейся грани BCD. Тогда ориентированный объём тетраэдра O_1BCD отличается по знаку от чисел V_{AO_1CD}, V_{ABO_1D} и V_{ABCO_1}. Учитывая также равенство высот, проведённых в указанных тетраэдрах из точки O_1, получим $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -S_1 : S_2 : S_3 : S_4$. Аналогичные результаты — для трёх других центров вневписанных сфер.

47. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — данный тетраэдр, а Q — описанная вокруг него сфера. Для каждого ребра A_iA_j обозначим его длину через a_{ij}. Для каждой вершины A_i пусть S_i — площадь противоположной грани, а O_i — центр вневписанной сферы, касающейся этой грани. Если точка $O_k(x_1, x_2, x_2, x_4)$ лежит внутри Q, то, как показывает решение задачи 44, $\sum\limits_{i<j} x_i x_j a_{ij}^2 > 0$. Для O_1 имеем $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -S_1 : S_2 : S_3 : S_4$, поэтому предыдущее неравенство можно переписать в виде

$$-S_1S_2a_{12}^2 - S_1S_3a_{13}^2 - S_1S_4a_{14}^2 + S_2S_3a_{23}^2 + S_2S_4a_{24}^2 + S_3S_4a_{34}^2 > 0. \tag{21}$$

Если O_2, O_3 и O_4 также лежат внутри Q, то имеют место ещё три неравенства, аналогичные (21). Сложим все четыре неравенства. Несложно видеть, что для любых i и j слагаемое $S_iS_ja_{ij}^2$ встретится два раза с плюсом и два раза с минусом. Значит, получим $0 > 0$ — противоречие. К противоречию придём и в случае, когда нет точек O_i вне описанной сферы и хотя бы одна из них лежит внутри этой сферы. Аналогичные рассуждения проводятся относительно возможности расположения центров вневписанных сфер вне Q (во всех неравенствах знак $>$ меняется на знак $<$). Таким образом, если не все точки O_i лежат на Q, то хотя бы одна из них лежит внутри Q и хотя бы одна снаружи.

48. В обозначениях решения предыдущей задачи имеем для равногранного тетраэдра $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$, $a_{12} = a_{34}$, $a_{13} = a_{24}$, $a_{14} = a_{23}$. Отсюда левая часть неравенства (21) равна нулю, что говорит о принадлежности точки O_1 сфере Q. Аналогично обстоит дело и с остальными точками O_i.

Замечание. Имеет место и обратное утверждение: если центры вневписанных сфер лежат на описанной сфере, то тетраэдр равногранный. Доказательство можно найти в [10].

49. Пусть $\boldsymbol{s}$ — сумма данных векторов. Если повернуть все векторы на 90° против часовой стрелки, то их можно расположить на сторонах многоугольника, из чего видно, что вектор $\boldsymbol{s}$, повёрнутый на 90°, равен нулевому вектору. Значит, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$.

50. Обозначим вершины четырёхугольника, точки касания, середины диагоналей и центр вписанной окружности так, как показано на рис. 10.

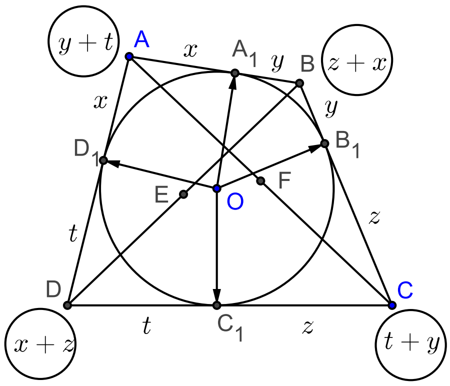

Рис. 10.

На этом рисунке также указаны длины отрезков касательных и массы, которые удобно разместить в вершинах. Покажем, что при этом центр масс окажется в точке O. Действительно,

$$(y+t)A + (z+x)B + (t+y)C + (x+z)D = (yA + xB) + (zB + yC) + (tC + zD) + (xD + tA) =$$

$$= (x+y)A_1 + (y+z)B_1 + (z+t)C_1 + (t+x)D_1,$$

но по теореме о плоском еже

$$(x+y)\overrightarrow{OA_1} + (y+z)\overrightarrow{OB_1} + (z+t)\overrightarrow{OC_1} + (t+x)\overrightarrow{OD_1} = \mathbf{0}.$$

Значит, центр заданной системы материальных точек располагается в центре вписанной окружности. Заметим также, что $E = c((x+z)B, (x+z)D)$; $F = c((y+t)A, (y+t)C)$, откуда

$$O = c(2(x+z)E, 2(y+t)F) \in EF.$$

Замечание. Совсем другое решение приводится в [1], с. 39.

51. С физической точки зрения, утверждение теоремы довольно очевидно: сумма векторов пропорциональна силе, с которой газ, находящийся внутри полого многогранника, действует на его поверхность. Приведём, тем не менее, два способа доказать эту теорему не прибегая к физической аргументации.

1-й способ. Докажем сначала теорему для тетраэдра. Для тетраэдра $ABCD$ рассмотрим векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC}$. Тогда векторные произведения $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ перпендикулярны граням тетраэдра, одинаково ориентированы относительно него (например, направлены вовне тетраэдра), а по величине равны удвоенным площадям соответствующих граней. Используя свойства векторного произведения, легко убедиться в том, что

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим теперь произвольный выпуклый многогранник. Если взять точку внутри него и соединить её с вершинами, получим разбиение многогранника на пирамиды. А пирамиду легко разбить на тетраэдры. Таким образом, многогранник разбивается на тетраэдры. Применим уже доказанное утверждение к каждому из тетраэдров разбиения и сложим полученные векторные равенства. Ясно, что векторы, соответствующие перегородкам (граням тетраэдров, лежащим внутри исходного многогранника), при сложении взаимно уничтожаются. Векторы, соответствующие внешним граням, при сложении дадут векторы, перпендикулярные граням и численно равные их площадям, а сумма этих векторов равна нулю.

2-й способ. Пусть Q — данный выпуклый многогранник, V — его объём. Пусть также для каждого i в i-й грани зафиксирована точка M_i, $\boldsymbol{n_i}$ — единичный вектор, перпендикулярный i-й грани и направленный вовне многогранника, S_i — площадь i-й грани. Обозначим $\boldsymbol{s} = \sum S_i\boldsymbol{n_i}$.

Растояние от произвольной точки X внутри Q до его i-й грани можно найти как скалярное произведение векторов $\overrightarrow{XM_i} \cdot \boldsymbol{n_i}$. Соединив точку X с вершинами многогранника, разобьём его на пирамиды. Объём пирамиды, основанием которого служит i-я грань, равен $\frac{1}{3}S_i\overrightarrow{XM_i} \cdot \boldsymbol{n_i}$. Поэтому

$$3V = \sum S_i\overrightarrow{XM_i} \cdot \boldsymbol{n_i} = \sum S_i(\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YM_i}) \cdot \boldsymbol{n_i} =$$

$$= \overrightarrow{XY} \cdot \sum S_i\boldsymbol{n_i} + \sum S_i\overrightarrow{YM_i} \cdot \boldsymbol{n_i} = \overrightarrow{XY} \cdot \boldsymbol{s} + 3V,$$

где X и Y — произвольные точки внутри Q. Отсюда $\overrightarrow{XY} \cdot \boldsymbol{s} = 0$. Если $\boldsymbol{s} \neq \mathbf{0}$, выбором отличных друг от друга точек X и Y можно добиться коллинеарности векторов $\overrightarrow{XY}$ и $\boldsymbol{s}$, что противоречит равенству $\overrightarrow{XY} \cdot \boldsymbol{s} = 0$.

Замечание. Другие доказательства можно найти в [10] и [12].

52. Пусть точка O — центр вписанной сферы. Рассмотрим две смежные грани. Пусть их общее ребро — AB, а K и M — точки касания этих граней и сферы. Тогда $AK = AM$, $BK = BM$ (отрезки касательных, проведённых от точки к сфере до точек касания, равны между собой). Значит, треугольники ABK и ABM — равные (по трём сторонам).

Для каждой грани соединим отрезками точку касания этой грани и вписанной сферы с вершинами грани. Грани будут разбиты на треугольники. При этом, как показано выше, треугольники, у которых ребро многогранника является общей стороной, равны. Значит, в качестве числа, приписанного ребру, можно взять площадь примыкающего к нему треугольника.

53. Для каждой грани соединим точку касания с вершинами грани, при этом грань разобьётся на три треугольника, будем называть их *маленькими*. Поместим в каждую вершину четыре массы, равные соответственно площадям четырёх маленьких треугольников, противолежащих данной вершине, в гранях, выходящих из данной вершины. Если группировать массы, отвечающие граням, то, согласно задаче 37, их центры масс расположатся в точках касания, причём новые массы будут равны площадям соответствующих граней. Это означает, по теореме о пространственном еже, что общий центр масс — в центре вписанной сферы.

С другой стороны, из решения предыдущей задачи мы знаем, что площади двух маленьких треугольников, примыкающих к одному ребру многогранника в смежных гранях, равны. Значит, в противоположных вершинах многогранника сосредоточены одинаковые массы. Поэтому исходные 24 массы можно заменить тремя массами, расположенными в серединах отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. Отсюда и следует, что точка O, где находится общий центр масс, принадлежит плоскости, проходящей через эти три точки.

Замечание. Обсудим, как можно было догадаться до приведённого выше решения. Естественно искать такое распределение масс в вершинах многогранника, для которого центр масс находится в центре вписанной сферы. Так будет, если (после группировки) в точках касания расположены массы, равные площадям граней. Каждую такую массу можно заменить тремя массами, равными площадям маленьких треугольников и расположенными в вершинах грани. Отсюда и получаются 24 массы, с которых начиналось изложенное решение. Разумеется, чтобы прийти к такому решению, нужно заранее знать фундаментальные факты, сформулированные в задачах 37 и 51 (и важный штрих решения — равенство маленьких треугольников, примыкающих к одному ребру).

Литература

[1] *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

[2] *Эвнин А.Ю.* Метод масс в геометрии треугольника // Математика в школе. – 2014. – № 8. – С. 59–67.

[3] *Шарыгин И.Ф.* Геометрия: 9–11 кл. — М.: Дрофа, 1996. – 400 с.

[4] *Эвнин А.Ю.* Практикум по математике. — Челябинск: Взгляд, 2009. – 256 с.

[5] *Эвнин А.Ю.* Математический конкурс в ЮУрГУ. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – 86 с.

[6] *Эвнин А.Ю.* 150 красивых задач для будущих математиков. М.: КРАСАНД, 2014. – 224 с.

[7] *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 3 т. – Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006. – 256 с.

[8] *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 3 т. – Т. 3: Треугольники и тетраэдры. — М.: МЦНМО, 2009. – 192 с.

[9] *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: Ч. 2. — М.: Наука, 1990. – 240 с.

[10] *Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф.* Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989. – 288 с.

[11] *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002. – 32 с.

[12] *Долбилин Н.* Теорема Минковского о многогранниках // Квант. – 2006. – № 4. – С. 2–8.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru