6 класс **Заключительный тур** **2021-2022**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Петя пошёл в лес за грибами. Половина всех собранных грибов – белые, а всего он набрал не более 75 грибов. Три гриба показались Пете червивыми, и он их выбросил. Оказалось, что теперь белые составляют 48% от оставшихся грибов. Сколько всего грибов собрал Петя?

Ответ: 28.

Решение. Пусть Петя собрал $2n$ грибов. После того, как 3 гриба были выброшены, белых грибов стало $(2n-3)\cdot 0{,}48 = m$, при этом m – натуральное число. Уравнение преобразуется к виду $(2n-3)\cdot 12 = 25m$. Числа 12 и 25 взаимно простые, следовательно, $(2n-3) \vdots 25$. Учитывая, что $2n-3$ – число нечётное, получаем возможные варианты: $2n-3 = 25, 2n = 28$ или $2n-3 = 75$, но этот случай не подходит по условию, так как $2n \leq 75$.

Оценивание. Составлено верное уравнение – 6 баллов. За полное решение – 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В бассейне было 250 м^3 воды. Через первую трубу вода выливается из бассейна, причём только порциями по 150 м^3, а через вторую трубу наливается, причём только порциями по 99 м^3. Манипулируя этими трубами, какое наименьшее количество воды можно оставить в бассейне?

Ответ: 1 м^3.

Решение. Можно вылить только количество м^3, кратное трём, максимум 249 м^3. Покажем, что это возможно. Выливаем 150, наливаем 99, выливаем 150, наливаем 2 раза по 99. Всего выльем 3 м^3. Можем повторять эту процедуру, пока останется в бассейне 202. Выливаем 150, наливаем 99, выливаем 150, получим в бассейне 1 м^3.

Оценивание. Угадано, что максимум равен 249 м^3 – 2 балла. Приведён алгоритм – 10 баллов. За полное решение – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Четырёхзначное число **1365** делится и на **13**, и на **65**. Сколько всего существует четырёхзначных чисел больших **2022**, делящихся на двузначные числа, образованные как его первыми двумя цифрами, так и последними двумя цифрами?

Ответ: 114.

Решение. Если число $\overline{abcd} \vdots \overline{ab}$, то $\overline{cd} \vdots \overline{ab}$. Это так, поскольку $\overline{abcd} = \overline{ab}\cdot 100 + \overline{cd}$. Если число $\overline{abcd} \vdots \overline{cd}$, то это равносильно тому, что $\overline{ab}\cdot 100 \vdots \overline{cd}$. Тогда $\overline{cd} = k\cdot\overline{ab}$, где k – делитель 100. Можно заметить, что так как $\overline{ab} \geq 10$, то k может принимать значения 1, 2, 4, 5.

По условию задачи $\overline{ab} \geq 20$, получаем:

1) Если $\overline{ab} = 20$, то возможны 2 варианта k= 2, 4;
2) Если $20 < \overline{ab} \leq 24$, то возможны 3 варианта k=1, 2, 4;
3) Если $25 \leq \overline{ab} \leq 49$, то возможны 2 варианта k=1, 2;
4) Если $50 \leq \overline{ab} \leq 99$, то возможен 1 вариант k=1.

Всего получаем количество возможных вариантов чисел: 2+4·3+25·2+50·1=114.

Оценивание. Доказано, что $\overline{cd} \vdots \overline{ab}$ – ставится 3 балла; сделан вывод –

$\overline{cd} = k \cdot \overline{ab}$, где k – делитель 100, ставится ещё 2 балла; замечено, что k может принимать значения 1, 2, 4, 5 еще 2 балла. Потерян один из 4-х вариантов минус 3 балла. Полное решение – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Суслик и Хома нашли кучку из 380 зёрен и разделили их между собой. В первые два дня Суслик перенёс себе в норку $\frac{1}{11}$ и $\frac{1}{5}$ части своих зёрен, а Хома – $\frac{1}{16}$ и $\frac{1}{10}$ соответственно. Как разделили между собой зёрна Суслик и Хома?

Ответ: У Суслика было 220 зёрен, у Хомы – 160.

Решение. Количество зёрен, которые перетащили Суслик и Хома в течение одного дня, являются натуральными числами. Значит, количество зёрен Суслика должно быть кратно числам 11 и 5, то есть должно делиться на их наименьшее общее кратное: НОК(11,5)=55. Аналогично, количество зёрен Хомы должно быть кратно наименьшему общему кратному чисел 16 и 10. НОК(16,10)=80. Найдём такие натуральные n и m, что $55n + 80m$=380. Так как 80 делится на 4, 380 делится на 4, 55 на 4 не делится, значит на 4 должно делиться n. Значит n может принимать значения 4,8,…. Но $55 \cdot 8 > 380$. Отсюда единственное возможное значение n=4. В этом случае $m = \frac{160}{80} = 2$. Итак, у Суслика было 220 зерен, у Хомы – 160.

Оценивание. Составлено уравнение – 6 баллов. Полное решение – 13 баллов.

5. (*15 баллов*) Оператор, управляющий с Земли движением марсохода «*Кьюриосити*», пользуется радиосигналами, скорость которых равна 300000 километров в секунду. Минимальное расстояние между Землей и Марсом составляет 55,76 млн. километров. Какое расстояние пройдёт марсоход, прежде чем отреагирует на команду оператора, если его скорость равна 30 метров в час?

Ответ: 1,55 метра

Решение:

Время распространения сигнала:

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{v}} = \frac{55\,760\,000\text{ км}}{300\,000\text{ км/с}} \approx 185{,}9\text{ сек.} \qquad \text{(7 баллов)}$$

Марсоход за это время пройдет:

$$\mathrm{L} = \mathrm{v_M t} = \frac{30}{3600}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right) \cdot 185{,}9\text{ с} \approx 1{,}55\text{ м.} \qquad \text{(8 баллов)}$$

6. (*15 баллов*) Исследуя бортовой компьютер автомобиля, водитель обнаружил два любопытных значения. Первое – средняя скорость автомобиля за последние сутки была равна 18 км/ч. Второе – массовый расход топлива за единицу времени, который оказался равен 0,05 г/с. Определите по этим данным массовый расход топлива на единицу пути.

Ответ: 1·10-5 кг/м

Решение:

Средняя скорость автомобиля:

$$\mathrm{v} = 18\text{ км/ч} = 5\text{ м/с.} \qquad \text{(5 баллов)}$$

Массовый расход топлива за единицу времени:

$\frac{m}{t} = 0{,}05\ \frac{г}{с} = 5 \cdot 10^{-5}\ \frac{кг}{с}.$ (5 баллов)

Массовый расход топлива на единицу пути:

$\frac{m}{S} = \frac{m}{tv} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{5} = 1 \cdot 10^{-5}\ \frac{кг}{м} = 0{,}01\ \frac{г}{м}.$ (5 баллов)

7. (*10 баллов*) Множество маленьких кубиков объёмом V_0=8 мм^3 каждый, сложены вместе в одну большую кучу, объём которой V=0,4 м^3. Какой максимальной длины можно было бы получить ряд из этих кубиков, если их уложить плотно друг к другу своими гранями?

Ответ: 105 метров

Решение:

В куче содержится:

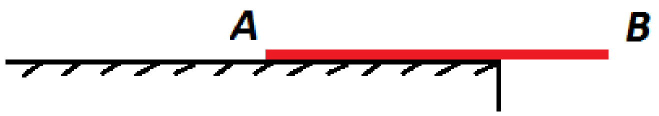
$N = \frac{V}{V_0} = \frac{0{,}4}{8 \cdot 10^{-9}} = 5 \cdot 10^7$ штук. (3 балла)

Длина ребра одного кубика: 2 мм. (3 балла)

Следовательно, максимальная длина ряда из этих кубиков:

$l_{max} = 2мм \cdot N = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^7 = 10^5$ метров $= 100$ км. (4 балла)

8. (*10 баллов*) На горизонтальном столе, который сделан из негорючего материала, лежит массивный однородный стержень длиной 90 см, который наоборот сделан из легкогорючего вещества. На одну треть правая сторона стержня свисает со стола (см. рисунок).



Если поджечь стержень в точке A, то пламя распространяется со скоростью v=3 мм/с. Через сколько секунд после этого стержень потеряет равновесие? Считайте, что при сгорании стержень исчезает бесследно, то есть не остаётся золы и т.п.

Ответ: 100 секунд

Решение:

Стержень потеряет равновесие, когда пламя дойдет до точки С, причем СО=ОВ: (3 балла)

Получаем, что:

АС=АВ-2ОВ=30 см (3 балла)

Это произойдет, что:

$t = \frac{AC}{v} = \frac{300\ мм}{3\ мм/с} = 100$ с. (4 балла)

6 класс **Заключительный тур** **2021-2022**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Петя пошёл в лес за грибами. Половина всех собранных грибов – белые, а всего он набрал не более 60 грибов. Пять грибов показались Пете червивыми, и он их выбросил. Оказалось, что теперь белые составляют 56% от оставшихся грибов. Сколько всего грибов собрал Петя?

Ответ: 30.

Решение. Пусть Петя собрал $2n$ грибов. После того, как 5 грибов были выброшены, белых грибов стало $(2n-5)\cdot 0{,}56 = m$, при этом m – натуральное число. Уравнение преобразуется к виду $(2n-5)\cdot 14 = 25m$. Числа 14 и 25 взаимно простые, следовательно, $(2n-5) \vdots 25$. Учитывая, что $2n-5$ – число нечётное, получаем возможные варианты: $2n-5=25, 2n=30$ или $2n-5=75$, но этот случай не подходит по условию, так как $2n \le 60$.

Оценивание. Составлено верное уравнение – 6 баллов. За полное решение – 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В бассейне было 190 м^3 воды. Через первую трубу вода выливается из бассейна, причём только порциями по 105 м^3, а через вторую трубу наливается, причём только порциями по 69 м^3. Манипулируя этими трубами, какое наименьшее количество воды можно оставить в бассейне?

Ответ: 1 м^3.

Решение. Можно вылить только количество м^3, кратное трём, максимум 189 м^3. Покажем, что это возможно. Выливаем 105, наливаем 69, выливаем 105, наливаем 2 раза по 69. Всего выльем 3 м^3. Можем повторять эту процедуру, пока останется в бассейне 142. Выливаем 105, получим 37, наливаем 69, выливаем 105, получим в бассейне 1 м^3.

Оценивание. Угадано, что максимум равен 189 м^3 – 2 балла. Приведён алгоритм – 10 баллов. За полное решение – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Четырёхзначное число **1365** делится и на **13**, и на **65**. Сколько всего существует четырёхзначных чисел меньших **5000**, делящихся на двузначные числа, образованные как его первыми двумя цифрами, так и последними двумя цифрами?

Ответ: 105.

Решение. Если число $\overline{abcd} \vdots \overline{ab}$, то $\overline{cd} \vdots \overline{ab}$. Это так, поскольку $\overline{abcd} = \overline{ab}\cdot 100 + \overline{cd}$. Если число $\overline{abcd} \vdots \overline{cd}$, то это равносильно тому, что $\overline{ab}\cdot 100 \vdots \overline{cd}$. Тогда $\overline{cd} = k\cdot \overline{ab}$, где k – делитель 100. Можно заметить, что так как $\overline{ab} \ge 10$, то k может принимать значения 1, 2, 4, 5.

По условию задачи $\overline{ab} < 50$, получаем:

1) Если $10 < \overline{ab} \le 19$, то возможны 4 варианта k=1, 2, 4,5;
2) Если $20 \le \overline{ab} \le 24$, то возможны 3 варианта k=1, 2, 4;
3) Если $25 \le \overline{ab} \le 49$, то возможны 2 варианта k=1, 2;

Всего получаем количество возможных вариантов чисел:

10· 4+5·3+25·2=105.

Оценивание. Доказано, что $\overline{cd} \vdots \overline{ab}$ – ставится 3 балла; сделан вывод – $\overline{cd} = k \cdot \overline{ab}$, где k – делитель 100, ставится ещё 2 балла; замечено, что k может принимать значения 1, 2, 4, 5 еще 2 балла. Потерян один из 3-х вариантов минус 3 балла. Полное решение – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Ёжик и Белка запасли вместе 463 гриба. В первые два дня Ёжик перенёс в норку $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{3}$ части своих грибов, а Белка спрятала в дупло $\frac{1}{25}$ и $\frac{1}{20}$ части своих грибов. Сколько грибов запас Ёжик, а сколько Белка?

Ответ: Ёжик запас 63 гриба, а Белка – 400 грибов.

Решение. Количество грибов, которые перетащили в свои норки Ёжик и Белка в течение одного дня, являются натуральными числами. Значит, количество грибов Ёжика должно быть кратно числам 7 и 3, то есть должно делиться на их наименьшее общее кратное: НОК(7,3) = 21. Аналогично, количество грибов Белки должно быть кратно наименьшему общему кратному чисел 25 и 20. НОК(25,20)=100. Найдём такие натуральные n и m, что $21n + 100m = 463$, откуда $n = \frac{463 - 100m}{21}$.

Пусть $m=1$; 363 не делится на 21 – не подходит; $m=2$; 263 не делится на 21 – не подходит; $m=3$; 163 не делится на 21 – не подходит; $m=4$; 63 делится на 21, тогда $n=2$. Значения большие 4 m принимать не может, так в этом случае $100m>463$. Итак, Ёжик запас 63 гриба, а Белка – 400 грибов.

Оценивание. Составлено верное уравнение – 6 баллов. Полное решение – 13 баллов.

5. (*15 баллов*) Оператор, управляющий с Земли движением марсохода «*Кьюриосити*», пользуется радиосигналами, скорость которых равна 300000 километров в секунду. Среднее расстояние между Землей и Марсом составляет 220 млн. километров. Какое расстояние пройдёт марсоход, прежде чем отреагирует на команду оператора, если его скорость равна 20 метров в час?

Ответ: 4,07 метра

Решение:

Время распространения сигнала:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{220\,000\,000 \text{ км}}{300\,000 \text{ км/с}} \approx 733{,}3 \text{ сек.} \qquad \text{(7 баллов)}$$

Марсоход за это время пройдет:

$$L = v_M t = \frac{20}{3600}\left(\frac{м}{с}\right) \cdot 733{,}3 \text{ с} \approx 4{,}07 \text{ м.} \qquad \text{(8 баллов)}$$

6. (*15 баллов*) Исследуя бортовой компьютер автомобиля, водитель обнаружил два любопытных значения. Первое – средняя скорость автомобиля за последние сутки была равна 9 км/ч. Второе – массовый расход топлива за единицу времени, который оказался равен 0,06 г/с. Определите по этим данным массовый расход топлива на единицу пути.

Ответ: 2,4·10-5 кг/м

Решение:

Средняя скорость автомобиля:

$$v = 9 \text{ км/ч} = 2{,}5 \text{ м/с.} \qquad \text{(5 баллов)}$$

Массовый расход топлива за единицу времени:

$\frac{m}{t} = 0{,}06\ \frac{г}{с} = 6 \cdot 10^{-5}\ \frac{кг}{с}.$ (5 баллов)

Массовый расход топлива на единицу пути:

$\frac{m}{S} = \frac{m}{tv} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{2{,}5} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \frac{кг}{м} = 0{,}024\ \frac{г}{м}.$ (5 баллов)

7. (*10 баллов*) Множество маленьких кубиков объёмом V_0=27 мм^3 каждый, сложены вместе в одну большую кучу, объём которой V=0,54 м^3. Какой максимальной длины можно было бы получить ряд из этих кубиков, если их уложить плотно друг к другу своими гранями?

Ответ: 6·104 метров

Решение:

В куче содержится:

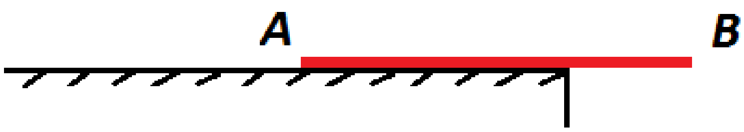
$N = \frac{V}{V_0} = \frac{0{,}54}{27 \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^7$ штук. (3 балла)

Длина ребра одного кубика: 3 мм. (3 балла)

Следовательно, максимальная длина ряда из этих кубиков:

$l_{max} = 3мм \cdot N = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^7 = 6 \cdot 10^4$ метров $= 60$ км. (4 балла)

8. (*10 баллов*) На горизонтальном столе, который сделан из негорючего материала, лежит массивный однородный стержень длиной 1,2 м, который наоборот сделан из легкогорючего вещества. На одну треть правая сторона стержня свисает со стола (см. рисунок).



Если поджечь стержень в точке A, то пламя распространяется со скоростью v=2 мм/с. Через сколько секунд после этого стержень потеряет равновесие? Считайте, что при сгорании стержень исчезает бесследно, то есть не остаётся золы и т.п.

Ответ: 200 секунд

Решение:

Стержень потеряет равновесие, когда пламя дойдет до точки C, причем CO=OB: (3 балла)

Получаем, что:

AC=AB-2OB=40 см (3 балла)

Это произойдет, через:

$t = \frac{AC}{v} = \frac{400\ мм}{2\ мм/с} = 200$ с. (4 балла)

7 класс **Заключительный тур** **2021-2022**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Петя пошёл в лес за грибами. Половина всех собранных грибов – белые, а всего он набрал не более 75 грибов. Три гриба показались Пете червивыми, и он их выбросил. Оказалось, что теперь белые составляют 48% от оставшихся грибов. Сколько всего грибов собрал Петя?

Ответ: 28.

Решение. Пусть Петя собрал $2n$ грибов. После того, как 3 гриба были выброшены, белых грибов стало $(2n-3)\cdot 0{,}48 = m$, при этом m – натуральное число. Уравнение преобразуется к виду $(2n-3)\cdot 12 = 25m$. Числа 12 и 25 взаимно простые, следовательно, $(2n-3) \vdots 25$. Учитывая, что $2n-3$ – число нечётное, получаем возможные варианты: $2n-3=25, 2n=28$ или $2n-3=75$, но этот случай не подходит по условию, так как $2n \leq 75$.

Оценивание. Составлено верное уравнение – 6 баллов. За полное решение – 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В бассейне было 250 м^3 воды. Через первую трубу вода выливается из бассейна, причём только порциями по 150 м^3, а через вторую трубу наливается, причём только порциями по 99 м^3. Манипулируя этими трубами, какое наименьшее количество воды можно оставить в бассейне?

Ответ: 1 м^3.

Решение. Можно вылить только количество м^3, кратное трём, максимум 249 м^3. Покажем, что это возможно. Выливаем 150, наливаем 99, выливаем 150, наливаем 2 раза по 99. Всего выльем 3 м^3. Можем повторять эту процедуру, пока останется в бассейне 202. Выливаем 150, наливаем 99, выливаем 150, получим в бассейне 1 м^3.

Оценивание. Угадано, что максимум равен 249 м^3 – 2 балла. Приведён алгоритм – 10 баллов. За полное решение – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Петя взял натуральное число ***a***, возвёл его в квадрат, прибавил **49**, отнял от суммы **14*a***. У него получилось удивительное число, в десятичной записи которого оказались в каком-то порядке только нули и **2022** единицы. Не ошибся ли Петя в расчётах? Свой ответ обоснуйте.

Ответ: Петя ошибся.

Решение. Петино число является квадратом, что противоречит тому, что сумма его цифр и, значит, оно само делится на 3 и не делится на 9.

Оценивание. Отмечено, что число является квадратом – 2 балла. Полное решение – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Можно ли записать **2022** целых числа в ряд так, что сумма любых пяти подряд в этом ряду окажется положительной, а сумма всех отрицательной? Ответ объясните.

Ответ: Можно.

Решение. Пример. Пусть x – натуральное число. Тогда сумма всех чисел ряда $-x,-x,-x$, $4x+1$, $-x,-x,-x,-x$, $4x+1$, $-x$, … , $-x,-x,-x$, $4x+1$, $-x,-x,-x$, в котором 404 раза повторяется последовательность $–x,–x,–x$, $4x+1,–x$, а потом дважды число «$–x$», равна числу $404–2x$, а сумма любых пяти подряд равна 1. Любое число $x > 202$ даёт пример.

Оценивание. Любой (правильный) пример – 13 баллов.

5. (*15 баллов*) Скорость пустой конвейерной ленты длиной L=10 м равна v_0=10 м/с. Лёгкие детали на ленте располагаются на расстоянии l=1 м друг от друга. Через s=50 см после начала конвейера манипулятор опускает на деталь и прикрепляет к ней груз массой m=200 г. Следующий манипулятор, проделывающий такую же операцию (добавляющий к детали еще один дополнительный груз), располагается на расстоянии s_1=1 м от первого, и т.д. Добавление 200 г груза снижает скорость перемещения конвейера на Δv=10 см/с. Определите минимальную скорость конвейера.

Ответ: 4,5 м/с

Решение:

Всего на конвейере помещается:

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 55$ грузиков по 200 грамм каждый.

(5 баллов)

В результате скорость снизится на:

$55 \cdot 0{,}1 = 5{,}5$ м/с. (5 баллов)

В результате минимальная скорость конвейера:

$\mathrm{v_{min}} = \mathrm{v_0} - 5{,}5 = 4{,}5$ м/с. (5 баллов)

6. (*10 баллов*) Если неподвижно стоять на эскалаторе, то спуск с одного этажа торгового центра на другой занимает в три раза больше времени, по сравнению с ситуацией, когда идёшь по эскалатору вниз со скоростью 2 м/с. Определите скорость эскалатора.

Ответ: 1 м/с

Решение:

В первом случае:

$\mathrm{s = vt_1}$. (2 балла)

Во втором случае:

$\mathrm{s = (v + 2)t_2}$. (2 балла)

Причем $\mathrm{t_2} = \frac{\mathrm{t_1}}{3}$. (2 балла)

Получаем:

$\mathrm{v} = \frac{1}{3}(\mathrm{v} + 2)$. (2 балла)

Окончательный результат:

$\mathrm{v} = 1$ м/с. (2 балла)

7. (*10 баллов*) Груз решили взвесить на неравноплечих весах. Когда груз положили на одну из чашек этих весов, то с другой стороны для равновесия пришлось расположить гирьку массой m_1=0,5 кг. В ситуации, когда взвешиваемый груз решили положить на другую чашку весов, то его уравновешивать пришлось уже гирькой массой m_2=2 кг. Определите массу груза, если известно, что соотношение плеч у весов 1:3.

Ответ: 0,875 кг

Решение:

Исходя из условия, можно сделать вывод, что весы обладают собственной массой, которую необходимо учитывать. (2 балла)

Правило рычага для первого взвешивания:

$m_г g \cdot l_л = m_1 g \cdot l_п + m_{весов} g \cdot \left(\frac{l_л + l_п}{2} - l_л\right).$ (3 балла)

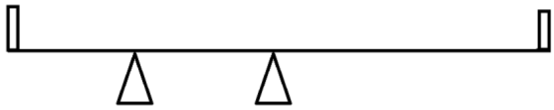
Правило рычага для второго взвешивания:

$m_2 g \cdot l_л = m_г g \cdot l_п + m_{весов} g \cdot \left(\frac{l_л + l_п}{2} - l_л\right).$ (3 балла)

В результате получаем:

$m_г = \frac{m_1 l_п + m_2 l_л}{l_л + l_п} = \frac{3m_1 + m_2}{1+3} = 0{,}875$ кг. (2 балла)

8. *(15 баллов)* Тонкий невесомый стержень опирается на две тонкие опоры. Правая опора расположена по центру стержня, а левая опора на расстоянии четверти длины стержня от его левого конца (см. рисунок). На правом конце стержня поставили груз массой $m_п$=1 кг. Груз какой массы должен располагаться на левом конце стержня, для того чтобы он находился в равновесии?



Ответ: от 1 кг до 3 кг

Решение:

Правило моментов относительно левой опоры:

$m_л g \frac{1}{4} l = m_п g \frac{3}{4} l$. Отсюда, получаем: $m_л = 3$ кг. (5 баллов)

Правило моментов относительно правой опоры:

$m_л g \frac{1}{2} l = m_п g \frac{1}{2} l$. Отсюда, получаем: $m_л = 1$ кг. (5 баллов)

Окончательный ответ:

$1 \text{ кг} \le m_л \le 3$ кг. (5 баллов)

7 класс **Заключительный тур** **2021-2022**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Петя пошёл в лес за грибами. Половина всех собранных грибов – белые, а всего он набрал не более 60 грибов. Пять грибов показались Пете червивыми, и он их выбросил. Оказалось, что теперь белые составляют 56% от оставшихся грибов. Сколько всего грибов собрал Петя?

Ответ: 30.

Решение. Пусть Петя собрал $2n$ грибов. После того, как 5 грибов были выброшены, белых грибов стало $(2n-5)\cdot 0{,}56 = m$, при этом m – натуральное число. Уравнение преобразуется к виду $(2n-5)\cdot 14 = 25m$. Числа 14 и 25 взаимно простые, следовательно, $(2n-5) \vdots 25$. Учитывая, что $2n-5$ – число нечётное, получаем возможные варианты: $2n-5=25, 2n=30$ или $2n-5=75$, но этот случай не подходит по условию, так как $2n \leq 60$.

Оценивание. Составлено верное уравнение – 6 баллов. За полное решение – 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В бассейне было 190 м^3 воды. Через первую трубу вода выливается из бассейна, причём только порциями по 105 м^3, а через вторую трубу наливается, причём только порциями по 69 м^3. Манипулируя этими трубами, какое наименьшее количество воды можно оставить в бассейне?

Ответ: 1 м^3.

Решение. Можно вылить только количество м^3, кратное трём, максимум 189 м^3. Покажем, что это возможно. Выливаем 105, наливаем 69, выливаем 105, наливаем 2 раза по 69. Всего выльем 3 м^3. Можем повторять эту процедуру, пока останется в бассейне 142. Выливаем 105, получим 37, наливаем 69, выливаем 105, получим в бассейне 1 м^3.

Оценивание. Угадано, что максимум равен 189 м^3 – 2 балла. Приведён алгоритм – 10 баллов. За полное решение – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Петя взял натуральное число ***a***, возвёл его в квадрат, прибавил **64**, затем прибавил ещё **16*a***. У него получилось удивительное число, в десятичной записи которого оказались в каком-то порядке только нули и **2022** единицы. Не ошибся ли Петя в расчётах? Свой ответ обоснуйте.

Ответ: Петя ошибся.

Решение. Петино число является квадратом, что противоречит тому, что сумма его цифр, и значит, оно само делится на 3 и не делится на 9.

Оценивание. Отмечено, что число является квадратом – 2 балла. Полное решение – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Можно ли записать **2023** целых числа в ряд так, что сумма любых пяти подряд в этом ряду окажется положительной, а сумма всех отрицательной? Ответ объясните.

Ответ: Можно.

Решение. Пример. Пусть x – натуральное число. Тогда сумма всех чисел ряда $-x,-x,-x,\ 4x+1,\ -x,-x,-x,-x,\ 4x+1,\ -x,\ \ldots\ ,\ -x,-x,-x,\ 4x+1,\ -x,-x,-x,\ -x,$ в котором 404 раза повторяется последовательность $-x,-x,-x,\ 4x+1,-x,$ а потом трижды число «$-x$», равна числу $404-3x$, а сумма любых пяти подряд равна 1. Любое число $x > 134$ даёт пример.

Оценивание. Любой (правильный) пример – 13 баллов.

5. (*15 баллов*) Скорость пустой конвейерной ленты длиной L=5 м равна v_0=4 м/с. Лёгкие детали на ленте располагаются на расстоянии l=1 м друг от друга. Через s=50 см после начала конвейера манипулятор опускает на деталь и прикрепляет к ней груз массой m=200 г. Следующий манипулятор, проделывающий такую же операцию (добавляющий к детали еще один дополнительный груз), располагается на расстоянии s_1=1 м от первого, и т.д. Добавление 200 г груза снижает скорость перемещения конвейера на Δv=10 см/с. Определите минимальную скорость конвейера.

Ответ: 2,5 м/с

Решение:

Всего на конвейере помещается:

$(1+2+3+4+5) = 15$ грузиков по 200 грамм каждый. (5 баллов)

В результате скорость снизится на:

$15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$ м/с. (5 баллов)

В результате минимальная скорость конвейера:

$\mathrm{v_{min}} = \mathrm{v_0} - 1{,}5 = 2{,}5$ м/с. (5 баллов)

6. (*10 баллов*) Если неподвижно стоять на эскалаторе, то спуск с одного этажа торгового центра на другой занимает в четыре раза больше времени, по сравнению с ситуацией, когда идёшь по эскалатору вниз со скоростью 1,5 м/с. Определите скорость эскалатора.

Ответ: 0,5 м/с

Решение:

В первом случае:

$\mathrm{s} = \mathrm{v t_1}.$ (2 балла)

Во втором случае:

$\mathrm{s} = (\mathrm{v} + 1{,}5)\mathrm{t_2}.$ (2 балла)

Причем $\mathrm{t_2} = \frac{\mathrm{t_1}}{4}$. (2 балла)

Получаем:

$\mathrm{v} = \frac{1}{4}(\mathrm{v} + 1{,}5).$ (2 балла)

Окончательный результат:

$\mathrm{v} = 0{,}5$ м/с. (2 балла)

7. (*10 баллов*) Груз решили взвесить на неравноплечих весах. Когда груз положили на одну из чашек этих весов, то с другой стороны для равновесия пришлось расположить гирьку массой m_1=0,8 кг. В ситуации, когда взвешиваемый груз решили положить на другую чашку весов, то его уравновешивать пришлось уже гирькой массой m_2=4 кг. Определите массу груза, если известно, что соотношение плеч у весов 1:2.

Ответ: 1,87 кг

Решение:

Исходя из условия, можно сделать вывод, что весы обладают собственной массой, которую необходимо учитывать. (2 балла)

Правило рычага для первого взвешивания:

$$m_г g \cdot l_л = m_1 g \cdot l_п + m_{весов} g \cdot \left(\frac{l_л + l_п}{2} - l_л\right). \quad \text{(3 балла)}$$

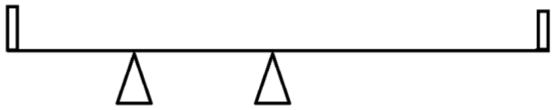
Правило рычага для второго взвешивания:

$$m_2 g \cdot l_л = m_г g \cdot l_п + m_{весов} g \cdot \left(\frac{l_л + l_п}{2} - l_л\right). \quad \text{(3 балла)}$$

В результате получаем:

$$m_г = \frac{m_1 l_п + m_2 l_л}{l_л + l_п} = \frac{2m_1 + m_2}{1+2} = 1{,}87 \text{ кг}. \quad \text{(2 балла)}$$

8. (*15 баллов*) Тонкий невесомый стержень опирается на две тонкие опоры. Правая опора расположена по центру стержня, а левая опора на расстоянии четверти длины стержня от его левого конца (см. рисунок). На левом конце стержня поставили груз массой $m_л$=2 кг. Груз какой массы должен располагаться на правом конце стержня, для того чтобы он находился в равновесии?



Ответ: от 2 кг до 6 кг

Решение:

Правило моментов относительно левой опоры:

$m_л g \frac{1}{4} l = m_п g \frac{3}{4} l$. Отсюда, получаем: $m_л = 6$ кг. (5 баллов)

Правило моментов относительно правой опоры:

$m_л g \frac{1}{2} l = m_п g \frac{1}{2} l$. Отсюда, получаем: $m_л = 2$ кг. (5 баллов)

Окончательный ответ:

$2 \text{ кг} \le m_л \le 6$ кг. (5 баллов)

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по два числа. Известно, что произведение чисел одной группы на **2022** больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

Ответ: 504, 505, 506, 507

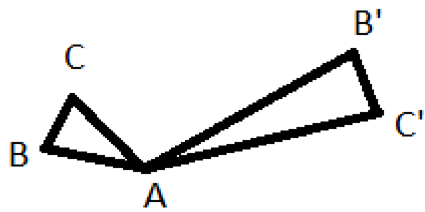
Решение. По условию задачи разность произведений – чётное число. Это означает, что в каждой группе произведение чётное, то есть каждая группа содержит чётное число. Пусть эти числа – n, n+1, n+2, n+3. Тогда возможны случаи:

1) Группы из чисел n, n+1 и n+2, n+3. Очевидно, что произведение больше во второй группе, имеем $(n+2)(n+3)-n(n+1)=2022, n=504$.

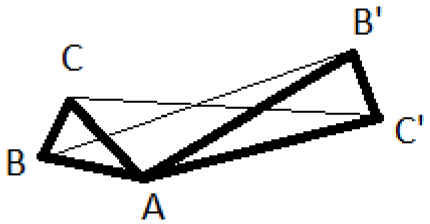
2) Группы из чисел n+1, n+2 и n, n+3. Уравнение $(n+1)(n+2)-n(n+3)=2022$ не имеет решений.

Оценивание. Если нет рассуждений про чётность разности, но приведены все возможные варианты произведений, то баллы не снижаются. Если перебор не полный, то снижаются по 2 балла за потерю каждого случая. Если ответ правильный без обоснованного решения, то ставится 3 балла.

2. (*12 баллов*) Треугольники ABC и $AB'C'$ – равнобедренные, AB= AC=37, BC=20, AB'=AC'=222, $B'C'$=120. Треугольники располагаются так, как показано на рисунке. Докажите, что $BB' = C'C$.



Решение. Треугольники ABB' и ACC' равны по двум сторонам (AB=AC, $AB' = AC'$ как боковые стороны равнобедренных треугольников) и углу между ними ($\angle BAB' = \angle BAC + \angle CAB' = \angle B'AC' + \angle CAB' = \angle CAC'$).



Углы $\angle BAC, \angle B'AC'$ равны как углы при вершине подобных треугольников ABC и $AB'C'$ (соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны). Значит $BB' = C'C$. Что и требовалось доказать.

Оценивание. Если участник доказал подобие данных треугольников, то

3. (*12 баллов*) Петя взял натуральное число $\boldsymbol{a}$, возвёл его в квадрат, прибавил **49**, отнял от суммы **14*a***. У него получилось удивительное число, в десятичной записи которого оказались в каком-то порядке только нули и **2022** единицы. Не ошибся ли Петя в расчётах? Свой ответ обоснуйте.

Ответ: Петя ошибся.

Решение. Петино число является квадратом, что противоречит тому, что сумма его цифр и, значит, оно само делится на 3 и не делится на 9.

Оценивание. Отмечено, что число является квадратом – 2 балла. Полное решение – 12 баллов.

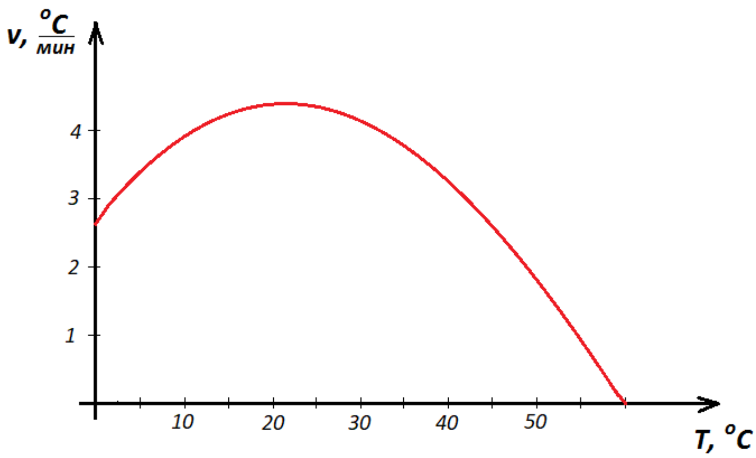
4. (*14 баллов*) Какое наименьшее количество уголков из трёх клеток можно поместить в клетчатый прямоугольник 6×8 (стороны уголка должны лежать на линиях сетки), чтобы нельзя было поместить еще один уголок? Докажите, что найденное Вами количество действительно наименьшее.

Ответ: 8.

Решение. Примеров много. Оценка. Пусть поместили 7 уголков, закрыв 21 клетку, что меньше половины всех клеток. Разделим данный прямоугольник на 12 квадратиков 2×2 прямыми, параллельными сторонам прямоугольника. Если бы в каждом квадратике было закрыто не менее 2-х клеток, то всего было бы закрыто не менее 24-х клеток, а по предположению, закрыта 21 клетка. Значит, есть квадратик 2×2, в котором закрыта не более, чем одна клетка. В этот квадратик можно поместить еще один уголок.

Оценивание. Пример – 4 балла, оценка – 10 баллов.

5. (*10 баллов*) В стакан с водой опустили нагреватель постоянной мощности, включили его и начали следить за процессом нагрева. Зависимость скорости нагрева воды *v* от температуры *T* представлена на графике. Определите температуру окружающей среды. На сколько процентов необходимо увеличить мощность нагревателя, чтобы довести воду до кипения?



Ответ: 105%

Решение:

В любой момент времени:

$P_{\text{нагревателя}} = P_{\text{нагрева воды}} + P_{\text{теплообмена с окружающей средой}}$. (1 балл)

Максимум графика соответствует ситуации, когда мощность теплообмена с окружающей средой равна нулю, т.е. температура воды равна температуре окружающего воздуха. Получаем, что:

$t_{\text{воздуха}} = 22 \pm 2$ °C. (2 балла)

Мощность потерь пропорциональна разности температур воды и окружающего воздуха:

$P_{потерь} = \alpha\Delta T.$ (1 балл)

Получаем, что для температуры 60 °С:

$P_{нагревателя\ 1} = \alpha(60 - 22).$ (2 балла)

Чтобы довести температуру воды до кипения:

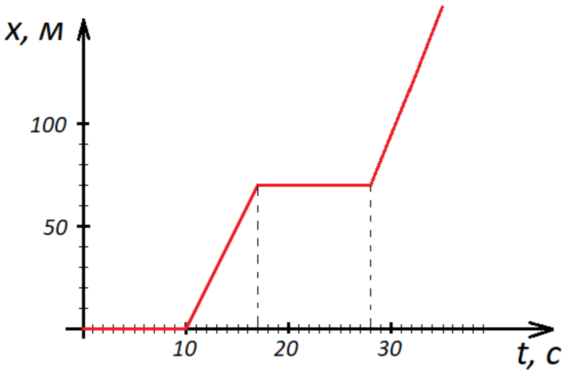
$P_{нагревателя\ 2} = \alpha(100 - 22).$ (2 балла)

Получаем, что мощность нагревателя нужно увеличить на:

$\frac{P_{нагревателя\ 2} - P_{нагревателя\ 1}}{P_{нагревателя\ 1}} \cdot 100\% = \frac{78\alpha - 38\alpha}{38\alpha} \cdot 100\% \approx 105\%.$

(2 балла)

6. *(15 баллов)* На графике представлена зависимость координаты прямолинейно двигающегося тела от времени. Определите среднюю скорость тела в момент времени t_0=28 с. В какие моменты времени средняя скорость была такой же?



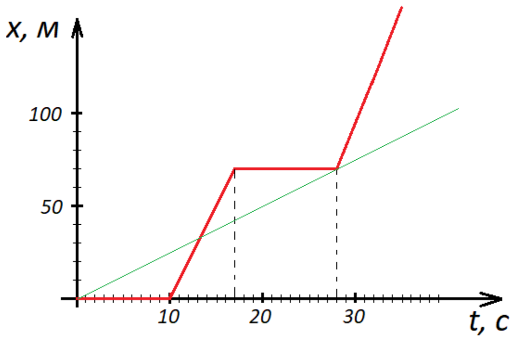
Ответ: 2,5 м/с и 13,5 с

Решение:

Средняя скорость:

$v_{ср} = \frac{x - x_0}{t} = \frac{70}{28} = 2,5$ м/с. (5 баллов)

У всех точек прямой, которая проведена через начало координат (x=0 м и t=0 с) и точку с координатами x=70 м и t=28 с, одинаковая средняя скорость. (5 баллов)



Следовательно, такая же средняя скорость у тела была в момент времени: t≈13,5 с.

(5 баллов)

7. (*15 баллов*) Имеются два одинаковых калориметра, которые находятся при одинаковых условиях, и два бака – один с маслом при температуре t_1=40 ^{O}С, а другой с водой при температуре t_2=60 ^{O}С градусов. Первый калориметр доверху заполнили маслом. После установления теплового равновесия изменение температуры калориметра и масла по модулю оказалось одинаковым. Второй калориметр заполнили на 9/10 водой, а остальное залили маслом. После установления теплового равновесия изменение температуры масла и воды, по модулю оказалось одинаковым. Какова была температура калориметров до их заполнения? Плотность воды $\rho_в$=1000 кг/м^3, − масла $\rho_м$=900 кг/м^3, теплоёмкость воды $c_в$=4200 Дж/(кг·K), масла − $c_м$=2100 Дж/(кг·K).

Ответ: 31 ОС.

Решение:

Масса жидкости:

$m = \rho V.$ (2 балла)

В первом случае уравнение теплового баланса:

$c_к m_к \Delta T = c_м m_м \Delta T.$

$c_к m_к = c_м \rho_м V.$ (4 балла)

Так как изменение температуры масла и воды во втором случае, по модулю оказалось одинаковым, то конечная температура: $T_к = 50$ ℃.

(2 балла)

Уравнение теплового баланса в этом случае:

$c_к m_к (50 - T_0) + c_м \rho_м \frac{1}{10} V \cdot 10 = c_в \rho_в \frac{9}{10} V \cdot 10.$ (4 балла)

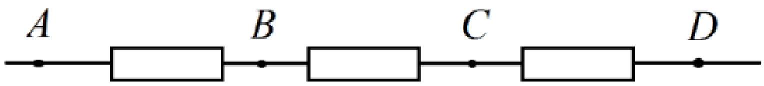
Получаем:

$c_м \rho_м V(50 - T_0) = c_в \rho_в \frac{9}{10} V \cdot 10 - c_м \rho_м \frac{1}{10} V \cdot 10.$

В результате:

$T_0 = 31$ ℃. (3 балла)

8. (*10 баллов*) Представленная на рисунке схема составлена из одинаковых резисторов. Если точку *A* соединить перемычкой с точкой *C*, а точку *B* – с точкой *D*, то сопротивление схемы, измеряемое между точками *A* и *D*, изменится на 10 Ом. Определите сопротивление одного резистора. Для соединения точек использовались перемычки с нулевым сопротивлением.



Ответ: 3,75 Ом

Решение:

Если сопротивление одного резистора R, то начальное общее сопротивление последовательного соединения равно 3R (1 балл)

После того как были задействованы перемычки, мы получаем параллельное соединение трех резисторов. (4 балла)

В этом случае их общее сопротивление равно $\frac{R}{3}$

(1 балл)

По условию: $3R - \frac{R}{3} = 10$ (2 балла)

Окончательный результат:

$R = 3{,}75$ Ом (2 балла)

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

8 класс **Заключительный тур** **2021-2022**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

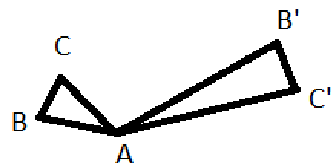
1. (*12 баллов*) Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по два числа. Известно, что произведение чисел одной группы на **2021** больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

Ответ: 1009, 1010, 1011, 1012.

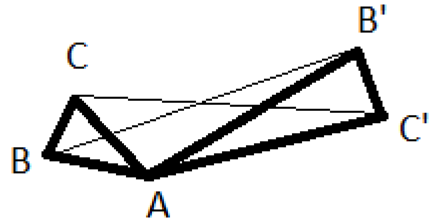
Решение. По условию задачи разность произведений – нечётное число. Это означает, что в одной группе произведение чётное, а в другой – нечётное число. Пусть эти числа – n, n+1, n+2, n+3. Тогда возможен случай: группы из чисел n, n+2 и n+1, n+3. Очевидно, что произведение больше во второй группе, имеем $(n+1)(n+3)-n(n+2)=2021, n=1009$.

Оценивание. Если нет рассуждений про нечётность разности, но приведены все возможные варианты произведений, то баллы не снижаются. Если перебор не полный, то снижаются по 2 балла за потерю каждого случая. Если ответ правильный без обоснованного решения, то ставится 3 балла.

2. (*12 баллов*) Треугольники ABC и $AB'C'$ – равнобедренные, AB= AC=41, BC=30, AB'= AC'=287, $B'C'$=210. Треугольники располагаются так, как показано на рисунке. Докажите, что $BB' = C'C$.



Решение. Треугольники ABB' и ACC' равны по двум сторонам (AB=AC, AB' = AC' как боковые стороны равнобедренных треугольников) и углу между ними ($LBAB' = LBAC + LCAB' = LB'AC' + LCAB' = LCAC'$).



Углы $LBAC, LB'AC'$ равны как углы при вершине подобных треугольников ABC и $AB'C'$ (соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны). Значит $BB' = C'C$. Что и требовалось доказать.

Оценивание. Если участник доказал подобие данных треугольников, то ставится 3 балла. За полное доказательство 12 баллов.

3. (*12 баллов*) Петя взял натуральное число ***a***, возвёл его в квадрат, прибавил **64**, затем прибавил ещё **16*a***. У него получилось удивительное число, в десятичной записи которого оказались в каком-то порядке только нули и **2022** единицы. Не ошибся ли Петя в расчётах? Свой ответ обоснуйте.

Ответ: Петя ошибся.

Решение. Петино число является квадратом, что противоречит тому, что сумма его цифр, и значит, оно само делится на 3 и не делится на 9.

Оценивание. Отмечено, что число является квадратом – 2 балла. Полное решение – 12 баллов.

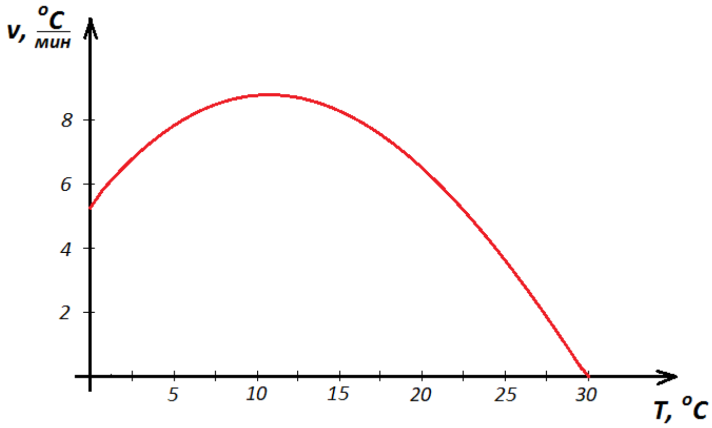
4. (*14 баллов*) Какое наименьшее количество уголков из трех клеток можно поместить в клетчатый прямоугольник 6×10 (стороны уголка должны лежать на линиях сетки), чтобы нельзя было поместить еще один уголок? Докажите, что найденное Вами количество действительно наименьшее.

Ответ: 10.

Решение. Примеров много. Оценка. Пусть поместили 9 уголков, закрыв 27 клеток, что меньше половины всех клеток. Разделим данный прямоугольник на 15 квадратиков 2×2 прямыми, параллельными сторонам прямоугольника. Если бы в каждом квадратике было закрыто не менее 2-х клеток, то всего было бы закрыто не менее 30-и клеток, а по предположению, закрыто 27 клеток. Значит, есть квадратик 2×2, в котором закрыта не более чем одна клетка. В этот квадратик можно поместить еще один уголок.

Оценивание. Пример – 4 балла, оценка – 10 баллов.

5. (*10 баллов*) В стакан с водой опустили нагреватель постоянной мощности, включили его и начали следить за процессом нагрева. Зависимость скорости нагрева воды v от температуры T представлена на графике. Определите температуру окружающей среды. На сколько процентов необходимо увеличить мощность нагревателя, чтобы довести воду до кипения?



Ответ: 368%

Решение:

В любой момент времени:

$P_{\text{нагревателя}} = P_{\text{нагрева воды}} + P_{\text{теплообмена с окружающей средой}}$. (1 балл)

Максимум графика соответствует ситуации, когда мощность теплообмена с окружающей средой равна нулю, т.е. температура воды равна температуре окружающего воздуха. Получаем, что:

$t_{\text{воздуха}} = 11 \pm 1$ °C. (2 балла)

Мощность потерь пропорциональна разности температур воды и окружающего воздуха:

$P_{\text{потерь}} = \alpha \Delta T$. (1 балл)

Получаем, что для температуры 30 °С:

$P_{\text{нагревателя 1}} = \alpha(30 - 11).$ (2 балла)

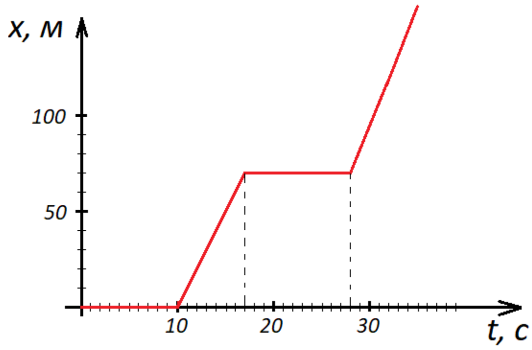
Чтобы довести температуру воды до кипения:

$P_{\text{нагревателя 2}} = \alpha(100 - 11).$ (2 балла)

Получаем, что мощность нагревателя нужно увеличить на:

$\frac{P_{\text{нагревателя 2}} - P_{\text{нагревателя 1}}}{P_{\text{нагревателя 1}}} \cdot 100\% = \frac{89\alpha - 19\alpha}{19\alpha} \cdot 100\% \approx 368\%.$ (2 балла)

6. (*15 баллов*) На графике представлена зависимость координаты прямолинейно двигающегося тела от времени. Определите среднюю скорость тела в момент времени t_0=17 с. В какие моменты времени средняя скорость была такой же?



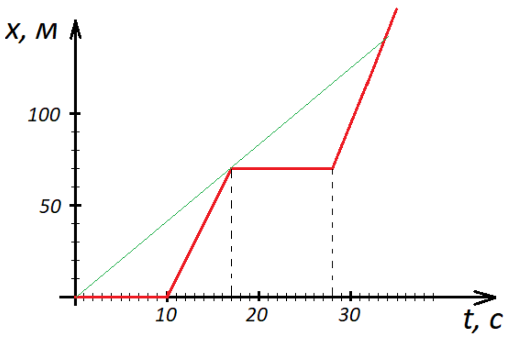
Ответ: 4,1 м/с и 34 с

Решение:

Средняя скорость:

$v_{ср} = \frac{x - x_0}{t} = \frac{70}{17} = 4{,}1\ \text{м/с}.$ (5 баллов)

У всех точек прямой, которая проведена через начало координат (x=0 м и t=0 с) и точку с координатами x=70 м и t=17 с, одинаковая средняя скорость. (5 баллов)



Следовательно, такая же средняя скорость у тела была в момент времени: t≈34 с. (5 баллов)

7. (*15 баллов*) Имеются два одинаковых калориметра, которые находятся при одинаковых условиях, и два бака – один с маслом при температуре t_1=40 ^{O}С, а другой с водой при температуре t_2=60 ^{O}С градусов. Первый калориметр доверху заполнили маслом. После установления теплового равновесия изменение температуры калориметра и масла по модулю оказалось одинаковым. Второй калориметр заполнили на 9/10 водой, а остальное залили маслом. После установления теплового равновесия изменение температуры масла и воды, по модулю оказалось одинаковым. Какова была температура калориметров до их заполнения? Плотность воды $\rho_в$=1000 кг/м^3, – масла $\rho_м$=900 кг/м^3, теплоёмкость воды $c_в$=4200 Дж/(кг·К), масла – $c_м$=2100 Дж/(кг·К).

Ответ: 31 ОС.

Решение:

Масса жидкости:

$m = \rho V.$ (2 балла)

В первом случае уравнение теплового баланса:

$c_к m_к \Delta T = c_м m_м \Delta T.$

$c_к m_к = c_м \rho_м V.$ (4 балла)

Так как изменение температуры масла и воды во втором случае, по модулю оказалось одинаковым, то конечная температура: $T_к = 50\ ℃.$ (2 балла)

Уравнение теплового баланса в этом случае:

$c_к m_к (50 - T_0) + c_м \rho_м \frac{1}{10} V \cdot 10 = c_в \rho_в \frac{9}{10} V \cdot 10.$ (4 балла)

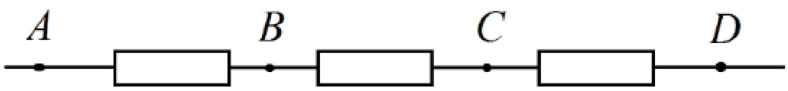
Получаем:

$c_м \rho_м V (50 - T_0) = c_в \rho_в \frac{9}{10} V \cdot 10 - c_м \rho_м \frac{1}{10} V \cdot 10.$

В результате:

$T_0 = 31\ ℃.$ (3 балла)

8. (*10 баллов*) Представленная на рисунке схема составлена из одинаковых резисторов. Если точку *A* соединить перемычкой с точкой *C*, а точку *B* – с точкой *D*, то сопротивление схемы, измеряемое между точками *A* и *D*, изменится на 40 Ом. Определите сопротивление одного резистора. Для соединения точек использовались перемычки с нулевым сопротивлением.



Ответ: 15 Ом

Решение:

Если сопротивление одного резистора R, то начальное общее сопротивление последовательного соединения равно 3R (1 балл)

После того как были задействованы перемычки, мы получаем параллельное соединение трех резисторов. (4 балла)

В этом случае их общее сопротивление равно $\frac{R}{3}$ (1 балл)

По условию: $3R - \frac{R}{3} = 40$ (2 балла)

Окончательный результат:

$R = 15\ Ом$ (2 балла)

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Какое наименьшее количество множителей нужно вычеркнуть из произведения натуральных чисел от 1 до 2022 так, чтобы последняя цифра произведения оставшихся множителей равнялась 1?

Ответ: 1213.

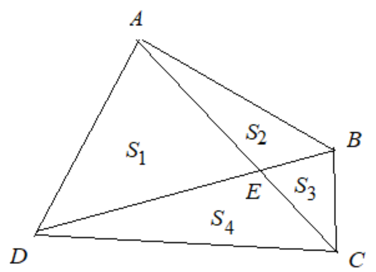
Решение. Необходимо вычеркнуть все чётные и кратные пяти сомножители, их 1011+404–202=1213. Последние цифры оставшихся сомножителей чередуются 1,3,7,9, произведение цифр этой четвёрки оканчивается на 9, таких четверок – 202, при перемножении всех чисел четвёрок на конце получается 1. Число 2021 не входит ни в одну четверку, этот множитель следует оставить, так как он не влияет на результат. Таким образом, отброшено 1213 множителей.

Оценивание. Сделан вывод, что вычёркиваются все чётные и кратные пяти сомножители ставится 2 балла, правильно вычислено их количество – плюс 4 балла, доказано, что произведение оставшихся множителей равно 1 плюс 5 баллов.

2. (*12 баллов*) Диагонали выпуклого четырёхугольника *ABCD* пересекаются в точке *E*. Найдите площадь этого четырёхугольника, если площади треугольников *ABD*, *ACD*, *AED* равны соответственно 10 см^2, 9 см^2 и 6 см^2.

Ответ: 15 см^2.

Решение. Используется тот факт, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Действительно, обозначим $\angle AED = \alpha$. Тогда $S_1 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE \cdot \sin\alpha$, $S_3 = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot CE \cdot \sin\alpha$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BE \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BE \cdot \sin\alpha$, аналогично, $S_4 = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot DE \cdot \sin\alpha$. Из этих равенств и получаем требуемое соотношение.



Из условия задачи следует, что $S_2 = 4$, $S_4 = 3$. Тогда $6S_3 = 4 \cdot 3$, то есть $S_3 = 2$. В итоге $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 6 + 4 + 2 + 3 = 15$.

Оценивание. За полное решение 12 баллов, если участник сразу использует формулу с площадями, баллы не снижаются. За вычислительную ошибку снимаются 2 балла.

3. (*13 баллов*) Существует ли квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ такой, что все трёхчлены вида $x^2 + (p+n)x + q + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 2022$, имеют только целые корни? Ответ обоснуйте.

Ответ: да.

Решение. Любой трёхчлен вида x^2+px+q с целыми коэффициентами, у которого $p-1=q$, подойдёт. Действительно, трёхчлен вида $x^2+(p+n)x+q+n,\ n=0,1,2,\dots,2022$ с таким свойством имеет корень $x=-1$. По теореме Виета второй корень тоже целый.

Оценивание. Если не доказана целочисленность второго корня – минус 2 балла. Полное решение 13 баллов.

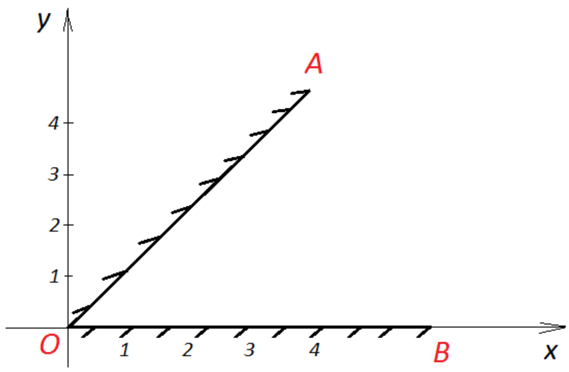
4. (*14 баллов*) Какое наименьшее количество уголков из трёх клеток можно поместить в клетчатый прямоугольник 6×8 (стороны уголка должны лежать на линиях сетки), чтобы нельзя было поместить еще один уголок? Докажите, что найденное Вами количество действительно наименьшее.

Ответ: 8.

Решение. Примеров много. Оценка. Пусть поместили 7 уголков, закрыв 21 клетку, что меньше половины всех клеток. Разделим данный прямоугольник на 12 квадратиков 2×2 прямыми, параллельными сторонам прямоугольника. Если бы в каждом квадратике было закрыто не менее 2-х клеток, то всего было бы закрыто не менее 24-х клеток, а по предположению, закрыта 21 клетка. Значит, есть квадратик 2×2, в котором закрыта не более, чем одна клетка. В этот квадратик можно поместить еще один уголок.

Оценивание. Пример – 4 балла, оценка – 10 баллов.

5. (*10 баллов*) Два плоских зеркала расположены под углом 45^0 друг к другу (см. рисунок). Предмет располагается в точке с координатами (5; 3). Определите количество изображений данного предмета в этой системе зеркал и найдите координаты первых изображений.



Ответ: (3; 5) (5; -3) 7 изображений

Решение:

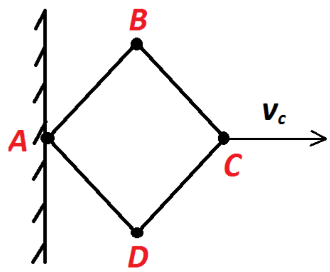
Первое изображение в зеркале ОА имеет координаты: x=3 y=5 (3 балла)

Первое изображение в зеркале ОВ имеет координаты: x=5 y=-3 (3 балла)

Всего наблюдается:

$\mathrm{N}=\frac{360°}{45°}-1=7$ изображений. (4 балла)

6. (*15 баллов*) Имеется конструкция, состоящая из четырёх одинаковых стержней. Стержни друг с другом соединены шарнирами. В точке *A* конструкция присоединена к стенке. Известно, что в момент времени, когда угол *ABC* был равен 90^0, скорость точки *C* была направлена вправо и была равна v_C=5 см/с. Определите скорость точки *B* в этот момент времени.



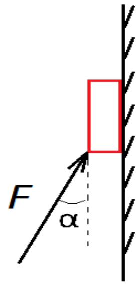
Ответ: 3,54 см/с

Решение:

Расстояние между точками В и С, а также между точками А и В должно быть неизменным. (5 баллов)

Получаем, что скорость точки В направлена в сторону точки С. (5 баллов)

В результате: $v_c \cdot \cos 45 = 5\frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}54$ см/с. (5 баллов)



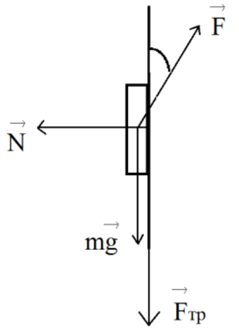
7. (*10 баллов*) Брусок массой m=1 кг прикладывают к вертикальной стенке. Коэффициент трения между бруском и стенкой μ=0,1. Определите силу, которую необходимо прикладывать к бруску под углом α=60^{O} к стенке для удержания бруска в равновесии.

Ответ: $17{,}05\text{ Н} \leq \text{F} \leq 24{,}18\text{ Н}$.

Решение:

Необходимо рассмотреть две ситуации:

Первая:



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$\text{F} \sin 60^{O} = \text{N}$ (1 балла)

$\text{F} \cos 60^{O} = \text{mg} + \text{F}_{тр}$ (2 балла)

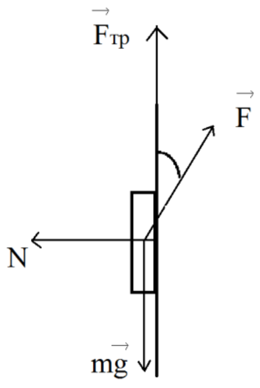
с учетом того, что $\text{F}_{тр} = \mu\text{N}$, получаем:

$\text{F} \cos 60^{O} = \text{mg} + \mu\text{F} \sin 60^{O}$.

В результате:

$\text{F} \approx 24{,}18$ Н. (1 балла)

Вторая:



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$\text{F} \sin 60^{O} = \text{N}$ (1 балла)

$\text{F} \cos 60^{O} + \text{F}_{тр} = \text{mg}$ (2 балла)

с учетом того, что $\text{F}_{тр} = \mu\text{N}$, получаем:

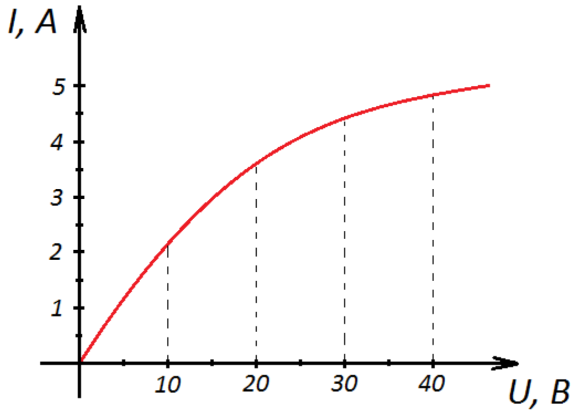
$\text{F} \cos 60^{O} + \mu\text{F} \sin 60^{O} = \text{mg}$.

$\text{F} \approx 17{,}05$ Н. (1 балла)

Окончательный ответ:

$17{,}05\text{ Н} \leq \text{F} \leq 24{,}18\text{ Н}$. (2 балла)

8. (*15 баллов*) Последовательно соединённые резистор R=10 Ом и лампа, вольтамперная характеристика которой приведена на рисунке, подключены к источнику постоянного напряжения U_0=30 В. Определите мощность, выделяющуюся на лампе при этом.



Ответ: 20 Вт

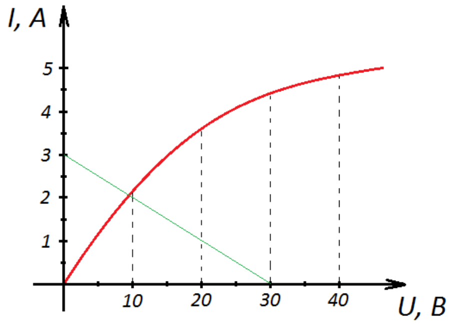
Решение:

Связь между напряжениями:

$U_0 = IR + U$, т.е.:

$30 = 10I + U$. (4 балла)

Построим эту зависимость на вольт-амперной характеристике. (4 балла)



Получаем, что сила тока на лампе I=2 А и напряжение U=10 В. (4 балла)

Мощность, выделяемая на лампе при данных условиях:

$P = IU = 2 \cdot 10 = 20$ Вт. (3 балла)

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Какое наименьшее количество множителей нужно вычеркнуть из произведения натуральных чисел от 1 до 2022 так, чтобы последняя цифра произведения оставшихся множителей равнялась 3?

Ответ: 1214.

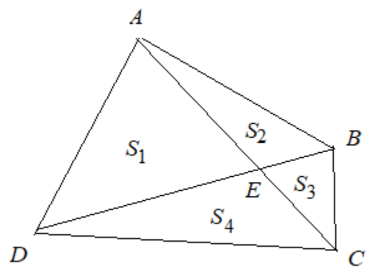
Решение. Необходимо вычеркнуть все чётные и кратные пяти сомножители, их 1011+404–202=1213. Последние цифры оставшихся сомножителей чередуются 1,3,7,9, произведение цифр этой четвёрки оканчивается на 9, таких четвёрок – 202, при перемножении всех чисел четвёрок на конце получается 1. Число 2021 не входит ни в одну четвёрку, этот множитель следует оставить, так как он не влияет на результат. Осталось отбросить 1 множитель, оканчивающийся на 7, например, 2017. Таким образом, отброшено 1214 множителей.

Оценивание. Сделан вывод, что вычёркиваются все чётные и кратные пяти сомножители ставится 2 балла, правильно вычислено их количество – плюс 4 балла. Вывод о том, что произведение всех оставшихся чисел равно 1 – плюс 3, отбрасывание числа, оканчивающегося на 7 – плюс 2.

2. (*12 баллов*) Диагонали выпуклого четырёхугольника *ABCD* пересекаются в точке *E*. Найдите площадь этого четырёхугольника, если площади треугольников *ABD*, *ACD*, *AED* равны соответственно 13 см^2, 15 см^2 и 5 см^2.

Ответ: 39 см^2.

Решение. Используется тот факт, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Действительно, обозначим $\angle AED = \alpha$. Тогда $S_1 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE \cdot \sin\alpha$, $S_3 = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot CE \cdot \sin\alpha$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BE \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BE \cdot \sin\alpha$, аналогично, $S_4 = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot DE \cdot \sin\alpha$. Из этих равенств и получаем требуемое соотношение.



Из условия задачи следует, что $S_2 = 8$, $S_4 = 10$. Тогда $5S_3 = 8 \cdot 10$, то есть $S_3 = 16$. В итоге $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 5 + 8 + 16 + 10 = 39$.

Оценивание. За полное решение 12 баллов, если участник сразу использует формулу с площадями, баллы не снижаются. За вычислительную ошибку снимаются 2 балла.

3. (*13 баллов*) Существует ли квадратный трёхчлен x^2+px+q такой, что все трёхчлены вида $x^2+(p+n)x+q-n,\ n=0,1,2,\dots,2022,$ имеют только целые корни? Ответ обоснуйте.

Ответ: да.

Решение. Любой трёхчлен вида x^2+px+q с целыми коэффициентами, у которого $1+p+q=0,$ подойдёт. Действительно, трёхчлен вида $x^2+(p+n)x+q-n,\ n=0,1,2,\dots,2022$ с таким свойством имеет корень $x=1$. По теореме Виета второй корень тоже целый.

Оценивание. Если не доказана целочисленность второго корня – минус 2 балла. Полное решение 13 баллов.

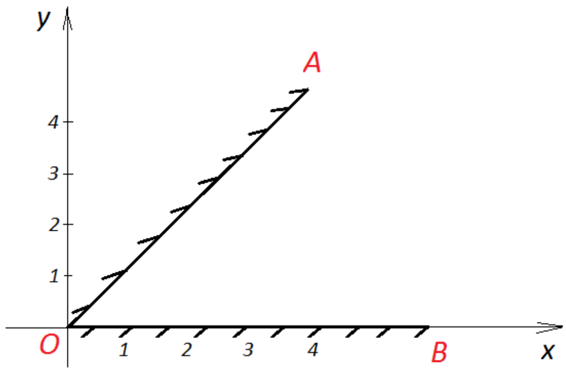
4. (*14 баллов*) Какое наименьшее количество уголков из трех клеток можно поместить в клетчатый прямоугольник 6×10 (стороны уголка должны лежать на линиях сетки), чтобы нельзя было поместить еще один уголок? Докажите, что найденное Вами количество действительно наименьшее.

Ответ: 10.

Решение. Примеров много. Оценка. Пусть поместили 9 уголков, закрыв 27 клеток, что меньше половины всех клеток. Разделим данный прямоугольник на 15 квадратиков 2×2 прямыми, параллельными сторонам прямоугольника. Если бы в каждом квадратике было закрыто не менее 2-х клеток, то всего было бы закрыто не менее 30-и клеток, а по предположению, закрыто 27 клеток. Значит, есть квадратик 2×2, в котором закрыта не более чем одна клетка. В этот квадратик можно поместить еще один уголок.

Оценивание. Пример – 4 балла, оценка – 10 баллов.

5. (*10 баллов*) Два плоских зеркала расположены под углом 45^0 друг к другу (см. рисунок). Предмет располагается в точке с координатами (3; 2). Определите количество изображений данного предмета в этой системе зеркал и найдите координаты первых изображений.



Ответ: (2; 3) (3; -2) 7 изображений

Решение:

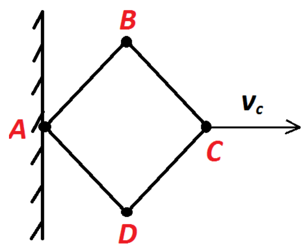
Первое изображение в зеркале OA имеет координаты: x=2 y=3 (3 балла)

Первое изображение в зеркале OB имеет координаты: x=3 y=-2 (3 балла)

Всего наблюдается:

$\mathrm{N}=\frac{360°}{45°}-1=7$ изображений. (4 балла)

6. (*15 баллов*) Имеется конструкция, состоящая из четырёх одинаковых стержней. Стержни друг с другом соединены шарнирами. В точке *A* конструкция присоединена к стенке. Известно, что в момент времени, когда угол *ABC* был равен 90^0, скорость точки *C* была направлена вправо и была равна v_C=20 см/с. Определите скорость точки *B* в этот момент времени.



Ответ: 14,1 см/с

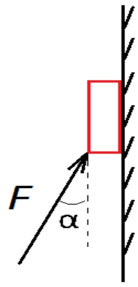
Решение:

Расстояние между точками B и C, а также между точками A и B должно быть неизменным. (5 баллов)

Получаем, что скорость точки B направлена в сторону точки C. (5 баллов)

В результате: $v_c \cdot \cos 45 = 20\frac{\sqrt{2}}{2} = 14{,}1$ см/с. (5 баллов)

7. (*10 баллов*) Брусок массой *m*=2 кг прикладывают к вертикальной стенке. Коэффициент трения между бруском и стенкой *μ*=0,2. Определите силу, которую необходимо прикладывать к бруску под углом *α*=30^O к стенке для удержания бруска в равновесии.

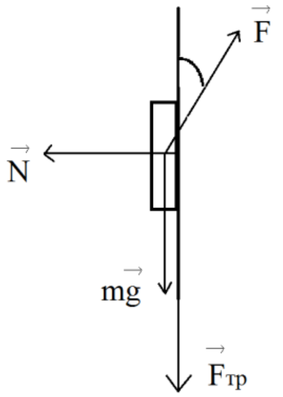


Ответ: $20{,}7$ Н $\leq F \leq 26{,}11$ Н.

Решение:

Необходимо рассмотреть две ситуации:

Первая:



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$F \sin 30^O = N$ (1 балла)

$F \cos 30^O = mg + F_{тр}$ (2 балла)

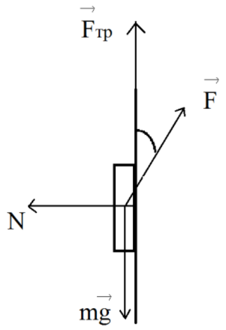
с учетом того, что $F_{тр} = \mu N$, получаем:

$F \cos 30^O = mg + \mu F \sin 30^O$.

В результате:

$F \approx 26{,}11$ Н. (1 балла)

Вторая:



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$F \sin 30^{O} = N$ (1 балла)

$F \cos 30^{O} + F_{тр} = mg$ (2 балла)

с учетом того, что $F_{тр} = \mu N$, получаем:

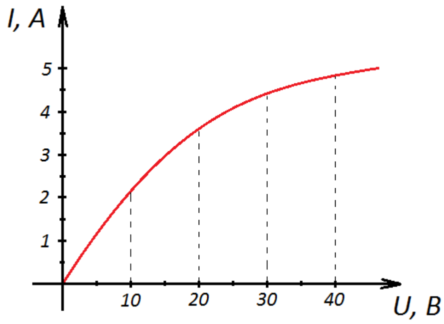
$F \cos 30^{O} + \mu F \sin 30^{O} = mg.$

$F \approx 20{,}7$ Н. (1 балла)

Окончательный ответ:

$20{,}7$ Н $\leq F \leq 26{,}11$ Н. (2 балла)

8. (*15 баллов*) Последовательно соединенные резистор *R*=5 Ом и лампа, вольтамперная характеристика которой приведена на рисунке, подключены к источнику постоянного напряжения U_0=20 В. Определите мощность, выделяющуюся на лампе при этом.



Ответ: 20 Вт

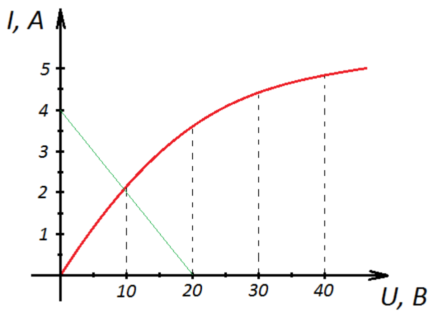
Решение:

Связь между напряжениями:

$U_0 = IR + U$, т.е.:

$20 = 5I + U.$ (4 балла)

Построим эту зависимость на вольт-амперной характеристике. (4 балла)



Получаем, что сила тока на лампе I=2 А и напряжение U=10 В. (4 балла)

Мощность, выделяемая на лампе при данных условиях:

$P = IU = 2 \cdot 10 = 20$ Вт. (3 балла)

10 класс **Заключительный тур** **2021-2022**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по два числа. Известно, что произведение чисел одной группы на **2022** больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

Ответ: 504, 505, 506, 507

Решение. По условию задачи разность произведений – чётное число. Это означает, что в каждой группе произведение чётное, то есть каждая группа содержит чётное число. Пусть эти числа – n, n+1, n+2, n+3.

Тогда возможны случаи:

1) Группы из чисел n, n+1 и n+2, n+3. Очевидно, что произведение больше во второй группе, имеем $(n+2)(n+3)-n(n+1)=2022, n=504$.

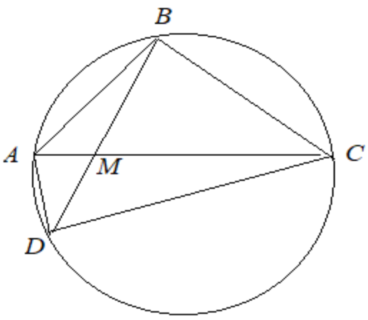
2) Группы из чисел n+1, n+2 и n, n+3. Уравнение $(n+1)(n+2)-n(n+3)=2022$ не имеет решений.

Оценивание. Если нет рассуждений про чётность разности, но приведены все возможные варианты произведений, то баллы не снижаются. Если перебор не полный, то снижаются по 2 балла за потерю каждого случая. Если ответ правильный без обоснованного решения, то ставится 3 балла.

2. (*12 баллов*) В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, в котором AB=BC=5, $\angle BCD=30^{\circ}$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B и M, где M – точка пересечения диагоналей $ABCD$.

Ответ: 5.

Решение. $\angle ACB=\angle BDC$, как опирающиеся на равные дуги AB и BC.



Далее имеем $\angle AMD=\angle MCD+\angle MDC=\angle ACD+\angle BDC=\angle ACD++\angle ACB=\angle BCD=30^{\circ}$. Радиус окружности, описанной около треугольника AMB, равен $R=\frac{AB}{2\sin\angle AMB}=\frac{AB}{2\sin\angle AMD}=\frac{5}{2\cdot 0{,}5}=5$.

Оценивание. Найден угол между диагоналями – 8 баллов. За полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Найдите p и n, где p – простое число, а n – целое число, при которых $\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2}$ является целым числом.

Ответ: $p=2$; $n=\pm1$ или $n=-3$.

Решение. Если p нечётно, то n^2+pn+2 – чётно, а n^3-pn+1 – нечётно, тогда дробь $\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2}$ не может быть целым числом. Таким образом, p – чётно, $p=2$. Найдём, при каких n дробь $\frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2}$ является целым числом, для этого выделим целую часть. Имеем $\frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2}=n-2+\frac{5}{n^2+2n+2}$. Осталось найти те n, при которых 5 делится на $n^2+2n+2=(n+1)^2+1$. Возможны варианты $(n+1)^2+1=5$ или $(n+1)^2+1=1$, получаем $n=\pm1$ или $n=-3$.

Оценивание. Сделан вывод, что $p=2$ – ставим 3 балла. Выделена целая часть дроби – 5 баллов. За полное решение – 13 баллов.

4. (*14 баллов*) Докажите, что число $\left(8+\sqrt{65}\right)^{2022}$ содержит по меньшей мере 2426 девяток после запятой подряд.

Решение. В выражении $n=\left(8+\sqrt{65}\right)^{2022}+\left(8-\sqrt{65}\right)^{2022}$ после раскрытия скобок все нечетные степени числа $\sqrt{65}$ взаимно уничтожаются, поэтому n натуральное. Тогда

$$\left(8+\sqrt{65}\right)^{2022}=n-\left(8-\sqrt{65}\right)^{2022}.$$

$$\left(8-\sqrt{65}\right)^{2022}=\left(8+\sqrt{65}\right)^{-2022}<16^{-2022}=2^{-8088}=(2^{10})^{-808}256^{-1}<1000^{-808}100^{-1}=10^{-(2424+2)}=10^{-2426}.$$

Поэтому число $n-\left(8-\sqrt{65}\right)^{2022}>n-10^{-2426}$, то есть содержит по меньшей мере 2426 девяток после запятой подряд.

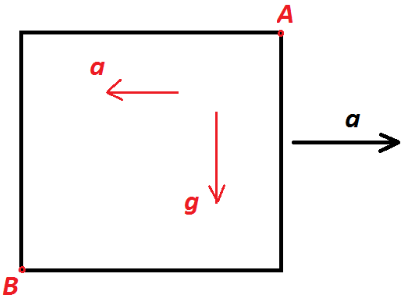
Оценивание. Отмечено, что $n=\left(8+\sqrt{65}\right)^{2022}+\left(8-\sqrt{65}\right)^{2022}$ целое – 8 баллов, показано, что $\left(8-\sqrt{65}\right)^{2022}<10^{-2426}$ – 5 баллов. Полное решение – 14 баллов.

5. (*15 баллов*) Запаянный кубик, полностью заполненный водой, двигается в горизонтальном направлении с ускорением a=5 м/с^2. Найдите максимальное давление воды, если её минимальное давление равно p=1000 Па. Длина ребра кубика L=10 см. Ускорение свободного падения g=10 м/с2.

Ответ: 2500 Па

Решение:

Если перейти в систему отсчета, связанную с кубиком, то можно сказать, что жидкость находится в двух полях одновременно. Гравитационное поле, характеризующееся ускорением g. И поле, характеризующееся ускорением a. (5 баллов)



Очевидно, что минимальное давление будет в точке A, а максимальное давление в точке B. (5 баллов)

Получаем:

$$p_{max} = p_{min} + \rho gL + \rho aL = 1000 + 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}1 + 1000 \cdot 5 \cdot 0{,}1 = 2500 \text{ Па}.$$

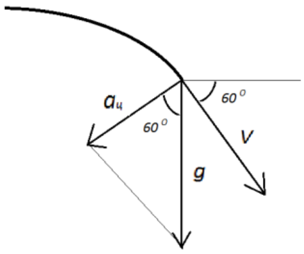
(5 баллов)

6. (*10 баллов*) Камень брошен с поверхности Земли под углом 60^O к горизонту с начальной скоростью 10 м/с. Определите радиус кривизны траектории в конечной точке полёта. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 20 м

Решение:

Конечная скорость камня равна его начальной скорости: (3 балла)



Центростремительное ускорение в конечной точке полета:

$a_ц = g \cdot \cos 60^O = 5$ м/с^2 (4 балла)

Радиус кривизны траектории в конечной точке полета:

$R = \frac{v^2}{a_ц} = \frac{10^2}{5} = 20$ м. (3 балла)

7. (*10 баллов*) В выключенном электрочайнике 1,5 литра кипятка остыли на пять градусов за две минуты. Определите время, на которое необходимо включить чайник, чтобы довести кипяток до первоначального состояния. Мощность электрочайника P=1,5 кВт, удельная теплоёмкость воды c=4200 Дж/(кг·К), плотность воды ρ=1 г/см^3.

Ответ: 25,5 секунд

Решение:

Связь массы и объема:

$m = \rho V.$ (1 балл)

Для начальной ситуации:

$cm\Delta T = P_{потерь} t_1.$ (3 балла)

$c\rho V\Delta T = P_{потерь} t_1.$

Для конечной ситуации:

$Pt_2 = cm\Delta T + P_{потерь} t_2.$ (3 балла)

Получаем:

$$Pt_2 = c\rho V\Delta T + \frac{c\rho V\Delta T}{t_1}t_2.$$

В результате:

$t_2 \approx 25{,}5$ секунд. (3 балла)

8. (*15 баллов*) Школьник решил измерить сопротивление батарейки. Для этого он подключил к ней омметр и получил показания 12 Ом. После этого он поменял полярность подключения. Теперь показания омметра составили 20 Ом. Определите сопротивление батарейки. Сопротивление омметра гораздо меньше сопротивления батарейки.

Ответ: 15 Ом или 60 Ом.

Решение:

В первом случае:

$I_1 = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r}.$ (2 балла)

При этом показания омметра:

$R_1 = \frac{\varepsilon_2}{I_1}.$ (2 балла)

После смены полярности подключения (если ЭДС омметра меньше ЭДС батарейки):

$I_2 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{r}.$ (2 балла)

При этом показания омметра:

$R_2 = \frac{\varepsilon_2}{I_2}.$ (2 балла)

Получаем систему уравнений:

$\frac{\varepsilon_2}{R_1} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r},$

$\frac{\varepsilon_2}{R_2} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{r}.$ (2 балла)

Решение которой дает: $r = 60$ Ом. (1 балл)

Существует еще одна возможность. (1 балл)

Если ЭДС омметра большее ЭДС батарейки, то система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$\frac{\varepsilon_2}{R_1} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r},$

$\frac{\varepsilon_2}{R_2} = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{r}.$ (2 балла)

И её решение: $r = 15$ Ом. (1 балл)

10 класс **Заключительный тур** **2021-2022**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по два числа. Известно, что произведение чисел одной группы на **2021** больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

Ответ: 1009, 1010, 1011, 1012.

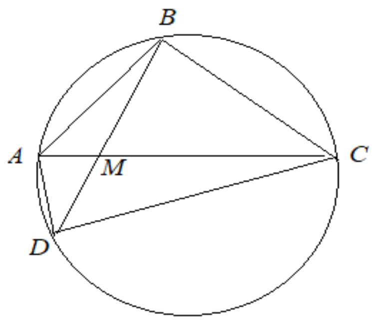
Решение. По условию задачи разность произведений – нечётное число. Это означает, что в одной группе произведение чётное, а в другой – нечётное число. Пусть эти числа – n, n+1, n+2, n+3. Тогда возможен случай: группы из чисел n, n+2 и n+1, n+3. Очевидно, что произведение больше во второй группе, имеем $(n+1)(n+3)-n(n+2)=2021, n=1009$.

Оценивание. Если нет рассуждений про нечётность разности, но приведены все возможные варианты произведений, то баллы не снижаются. Если перебор не полный, то снижаются по 2 балла за потерю каждого случая. Если ответ правильный без обоснованного решения, то ставится 3 балла.

2. (*12 баллов*) В окружность вписан четырёхугольник *ABCD*, в котором *AB*=*BC*=10, $\angle BCD=45^{\circ}$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B и M, где M – точка пересечения диагоналей *ABCD*.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Решение. $\angle ACB=\angle BDC$, как опирающиеся на равные дуги *AB* и *BC*.



Далее имеем $\angle AMD=\angle MCD+\angle MDC=\angle ACD+\angle BDC=\angle ACD++\angle ACB=\angle BCD=45^{\circ}$. Радиус окружности, описанной около треугольника *AMB*, равен $R=\frac{AB}{2\sin\angle AMB}=\frac{AB}{2\sin\angle AMD}=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

Оценивание. Найден угол между диагоналями – 8 баллов. За полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Найдите p и n, где p – простое число, а n – целое число, при которых $\frac{n^3-pn+13}{n^2+pn+2}$ является целым числом.

Ответ: p=2; n=–5; –1; 3.

Решение. Если p нечётно, то n^2+pn+2 – чётно, а $n^3-pn+13$ – нечётно, тогда дробь $\frac{n^3-pn+13}{n^2+pn+2}$ не может быть целым числом. Таким образом, p – чётно, p=2. Найдём, при каких n дробь $\frac{n^3-2n+13}{n^2+2n+2}$ является целым числом, для этого выделим целую часть. Имеем $\frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2}=n-2+\frac{17}{n^2+2n+2}$. Осталось найти те n, при которых 17 делится на $n^2+2n+2=(n+1)^2+1$. Возможны варианты $(n+1)^2+1=17$ или $(n+1)^2+1=1$, получаем n=–5; –1; 3.

Оценивание. Сделан вывод, что p=2 – ставим 3 балла. Выделена целая часть дроби – 5 баллов. За полное решение – 13 баллов.

4. (*14 баллов*) Докажите, что число $\left(4+\sqrt{17}\right)^{2022}$ содержит по меньшей мере 1819 девяток после запятой подряд.

Решение. В выражении $n=\left(4+\sqrt{17}\right)^{2022}+\left(4-\sqrt{17}\right)^{2022}$ после раскрытия скобок все нечетные степени числа $\sqrt{17}$ взаимно уничтожаются, поэтому n натуральное. Тогда

$\left(4+\sqrt{17}\right)^{2022}=n-\left(4-\sqrt{17}\right)^{2022}$.

$\left(4-\sqrt{17}\right)^{2022}$=$\left(4+\sqrt{17}\right)^{-2022}<8^{-2022}=2^{-6066}=(2^{10})^{-606}64^{-1}<1000^{-606}10^{-1}=10^{-(1818+1)}=10^{-1819}$.

Поэтому число $n-\left(4-\sqrt{17}\right)^{2022}>n-10^{-1819}$, то есть содержит по меньшей мере 1819 девяток после запятой подряд.

Оценивание. Отмечено, что $n=\left(4+\sqrt{17}\right)^{2022}+\left(4-\sqrt{17}\right)^{2022}$ целое – 8 баллов, показано, что $\left(4-\sqrt{17}\right)^{2022}<10^{-1819}$ – 5 баллов. Полное решение – 14 баллов.

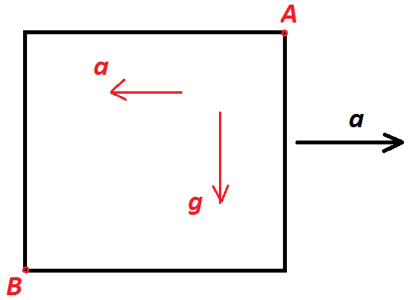
5. (*15 баллов*) Запаянный кубик, полностью заполненный водой, двигается в горизонтальном направлении с ускорением a=15 м/с^2. Найдите минимальное давление воды, если её максимальное давление равно p=10000 Па. Длина ребра кубика L=20 см. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 5000 Па

Решение:

Если перейти в систему отсчета, связанную с кубиком, то можно сказать, что жидкость находится в двух полях одновременно. Гравитационное поле, характеризующееся ускорением g. И поле, характеризующееся ускорением a.

(5 баллов)



Очевидно, что минимальное давление будет в точке A, а максимальное давление в точке B. (5 баллов)

Получаем:

$$p_{min} = p_{max} - \rho gL - \rho aL = 10000 - 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}2 - 1000 \cdot 15 \cdot 0{,}2 = 5000 \text{ Па}.$$

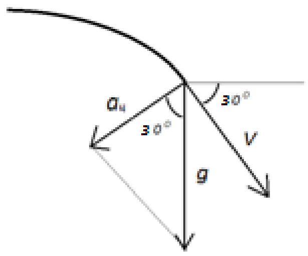
(5 баллов)

6. (*10 баллов*) Камень брошен с поверхности Земли под углом 30^{O} к горизонту с начальной скоростью 15 м/с. Определите радиус кривизны траектории в конечной точке полёта. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: ≈26 м

Решение:

Конечная скорость камня равна его начальной скорости: (3 балла)



Центростремительное ускорение в конечной точке полета:

$$a_ц = g \cdot \cos 30^{O} = 5\sqrt{3}\ \text{м/с}^2$$ (4 балла)

Радиус кривизны траектории в конечной точке полета:

$$R = \frac{v^2}{a_ц} = \frac{15^2}{5\sqrt{3}} \approx 26 \text{ м}.$$ (3 балла)

7. (*10 баллов*) В выключенном электрочайнике 2 литра кипятка остыли на пять градусов за одну минуту. Определите время, на которое необходимо включить чайник, чтобы довести кипяток до первоначального состояния. Мощность электрочайника P=1 кВт, удельная теплоёмкость воды c=4200 Дж/(кг·К), плотность воды ρ=1 г/см^3.

Ответ: 140 секунд

Решение:

Связь массы и объема:

$$m = \rho V.$$ (1 балл)

Для начальной ситуации:

$$cm\Delta T = P_{потерь}t_1.$$ (3 балла)

$$c\rho V\Delta T = P_{потерь}t_1.$$

Для конечной ситуации:

$$Pt_2 = cm\Delta T + P_{потерь}t_2.$$ (3 балла)

Получаем:

$$Pt_2 = c\rho V\Delta T + \frac{c\rho V\Delta T}{t_1}t_2.$$

В результате:

$$t_2 = 140 \text{ секунд}.$$ (3 балла)

8. (*15 баллов*) Школьник решил измерить сопротивление батарейки. Для этого он подключил к ней омметр и получил показания 8 Ом. После этого он поменял полярность подключения. Теперь показания омметра составили 16 Ом. Определите сопротивление батарейки. Сопротивление омметра гораздо меньше сопротивления батарейки.

Ответ: 10,7 Ом или 32 Ом.

Решение:

В первом случае:

$I_1 = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r}$. (2 балла)

При этом показания омметра:

$R_1 = \frac{\varepsilon_2}{I_1}$. (2 балла)

После смены полярности подключения (если ЭДС омметра меньше ЭДС батарейки):

$I_2 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{r}$. (2 балла)

При этом показания омметра:

$R_2 = \frac{\varepsilon_2}{I_2}$. (2 балла)

Получаем систему уравнений:

$\frac{\varepsilon_2}{R_1} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r}$,

$\frac{\varepsilon_2}{R_2} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{r}$. (2 балла)

Решение которой дает: $r = 32$ Ом. (1 балл)

Существует еще одна возможность.

(1 балл)

Если ЭДС омметра большее ЭДС батарейки, то система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$\frac{\varepsilon_2}{R_1} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r}$,

$\frac{\varepsilon_2}{R_2} = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{r}$. (2 балла)

И её решение: $r = 10{,}7$ Ом. (1 балл)

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*10 баллов*) Известно, что $2b > 4a + c > 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

Решение.

Первый способ. При $a = 0$ утверждение очевидно. Пусть $a \neq 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда по условию $P(-2) = 4a - 2b + c < 0$, $P(2) = 4a + 2b + c > 0$. Если квадратный трёхчлен принимает и положительные, и отрицательные значения, то он имеет два различных корня, то есть его дискриминант больше нуля, что и требовалось доказать.

Второй способ. По условию $b^2 > \left(\frac{4a+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{4a-c}{2}\right)^2 + 4ac \geq 4ac$, что и требовалось доказать.

Оценивание. За полное доказательство 10 баллов.

2. (*13 баллов*) Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1, \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1. \end{cases}$

Ответ: $\left(2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right), \left(\frac{\pi}{2} + \pi n,\ 2\pi m\right)$, где $k, n, m, l \in \mathbf{Z}$.

Решение. Сложив уравнения, получаем $\sin^4 x + \cos^3 x + \sin^5 y + \cos^7 y = 2$. Используя основное тригонометрическое тождество, преобразуем уравнение $(\sin^4 x - \sin^2 x) + (\cos^3 x - \cos^2 x) + (\sin^5 y - \sin^2 y) + (\cos^7 y - \cos^2 y) = 0$ или $\sin^2 x(\sin^2 x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) + \sin^2 y(\sin^3 y - 1) + \cos^2 y(\cos^5 y - 1) = 0$. Каждое из слагаемых в этом уравнении неположительное, следовательно, уравнение равносильно системе уравнений: $\begin{cases} \sin^2 x(\sin^2 x - 1) = 0, \\ \cos^2 x(\cos x - 1) = 0, \\ \sin^2 y(\sin^3 y - 1) = 0, \\ \cos^2 y(\cos^5 y - 1) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 2\pi m, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l; \end{array}\right. \end{cases}$ где $k, n, m, l \in \mathbf{Z}$.

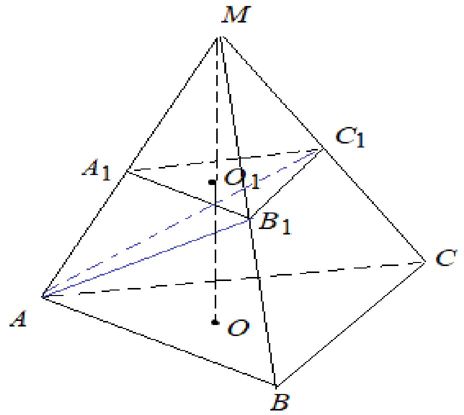
Исходной системе уравнений удовлетворяют решения $\left(2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right), \left(\frac{\pi}{2} + \pi n,\ 2\pi m\right)$, где $k, n, m, l \in \mathbf{Z}$.

Оценивание. Если ученик угадал, что одно из слагаемых в уравнениях системы равно 0, другое 1, но не доказал, что других решений нет – 3 балла. Обоснованно сделан вывод о том, что одно из слагаемых в уравнениях системы равно 0, другое 1 – 6 баллов. Полное решение – 13 баллов.

3. (*13 баллов*) Плоскость, параллельная основанию ABC пирамиды $MABC$, отсекает пирамиду $MA_1B_1C_1$ (вершины A_1, B_1, C_1 расположены на рёбрах MA, MB, MC соответственно). Объём пирамиды $MABC$ равен 324, объём пирамиды $MA_1B_1C_1$ равен 96. Найдите объём пирамиды MAB_1C_1.

Ответ: 144.

Решение. Объёмы подобных пирамид относятся как кубы их высот, то есть $\frac{MO^3}{MO_1^3} = \frac{324}{96} = \frac{27}{8}$, следовательно, $\frac{MO}{MO_1} = \frac{3}{2}$.



Имеем: $V_{MAB_1C_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{AA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}(MO_1 + OO_1) = \frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1} \cdot MO$. Кроме того, $V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1} \cdot MO_1 = \frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1} \cdot \frac{2MO}{3} = 96$. Тогда $S_{A_1B_1C_1} = \frac{96 \cdot 9}{2MO} = \frac{432}{MO}$. В итоге получаем: $V_{MAB_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{432}{MO} \cdot MO = 144$.

Оценивание. Обоснованное решение 13 баллов. Вычислительные ошибки минус 2 балла.

4. (*14 баллов*) Датчик случайных чисел за одно действие уменьшает или увеличивает на **1** коэффициент перед $\boldsymbol{x}$ или свободный член в квадратном трёхчлене. После некоторого числа таких операций он преобразовал трёхчлен $\boldsymbol{x^2 + 20x + 22}$ в трёхчлен $\boldsymbol{x^2 + 202x + 2}$. Верно ли, что среди полученных в процессе квадратных трёхчленов есть такой, у которого целые корни? Ответ обоснуйте.

Ответ: Да.

Решение. Рассмотрим разность коэффициента при x и свободного члена. В начале процесса она равна –2, в конце процесса она равна 200. Очевидно, что эта разность на каждом шаге увеличивается или уменьшается на 1. Значит, в некоторый момент времени она была равна 1. В этот момент времени квадратный трёхчлен имел вид $x^2 + (p + 1)x + p$, где p – целое число. Но такой квадратный трёхчлен имеет корень –1. По теореме Виета (или прямой подстановкой) вторым корнем будет $-p$. То есть был получен квадратный трёхчлен, имеющий целые корни.

Оценивание. За полное обоснованное доказательство 14 баллов. Снизить баллы за решение на 2 балла, если не была доказана целочисленность второго корня квадратного трёхчлена.

5. (*10 баллов*) Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута веревка массы *M*=5 кг, концы которой связаны. За вертикальный участок верёвки цепляется обезьяна массой *m*=30 кг и начинает карабкаться вверх, удерживаясь при этом на неизменной высоте. Определите мощность, развиваемую обезьяной, через две секунды после начала движения? Трением в оси блока пренебречь.

Ответ: 36000 Вт

Решение:

Так как обезьяна все время удерживается на одной и той же высоте, то сила F, с которой она тянет веревку, равна по величине весу обезьяны:

$F = mg.$ (2 балла)

Эта сила F сообщает веревке ускорение $a = \frac{mg}{M}$. (2 балла)

Через время t после того, как обезьяна ухватилась за веревку, веревка будет иметь скорость $v = \frac{mg}{M}t$ относительно обезьяны.

(2 балла)

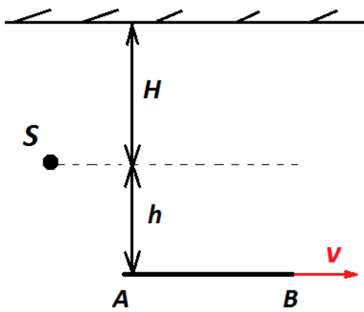
Мощность N, развиваемая обезьяной в каждый момент времени

$N = Fv,$ (2 балла)

или

$N = \frac{m^2g^2}{M}t = \frac{30^2 10^2}{5}2 = 36000$ Вт. (2 балла)

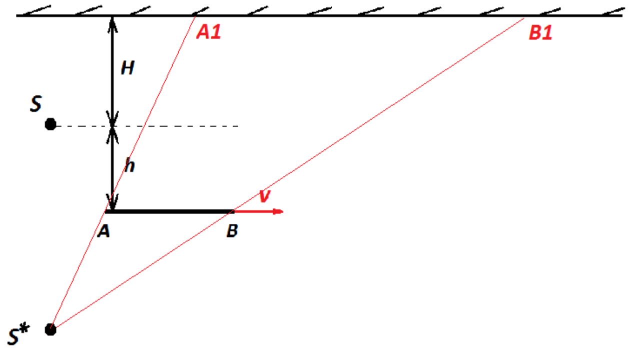
6. (*15 баллов*) На расстоянии *H*=2 м от стенки располагается точечный источник света *S*. На расстоянии *h*=1 м от источника *S* располагается плоское зеркало *AB*, которое двигается вправо с постоянной скоростью *v*=2 м/с. В начальный момент времени расстояние *SA*=2*h*. Определите, во сколько раз изменились размеры солнечного зайчика через время *t*=5 с после начального момента времени.



Ответ: размеры не изменились

Решение:

Источник света S можно заменить мнимым источником S*, который и формирует солнечный зайчик A1B1.



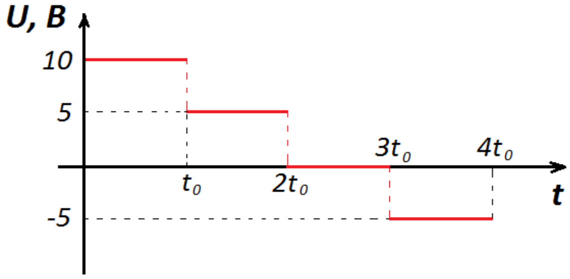
(5 баллов)

Из подобия треугольников, следует:

$\frac{A1B1}{AB} = \frac{H+2h}{h} = 4.$ (5 баллов)

Т.е. размер источника всегда в четыре раза больше размера зеркала. (5 баллов)

7. (*15 баллов*) Напряжение в цепи изменяется по закону, который показан на графике. Далее цикл повторяется. Определите действующее напряжение в данной цепи.



Ответ: 6,1 В

Решение:

Общее количество теплоты, выделяемое за время $4t_0$:

$$Q = \frac{U_1^2}{R}t_0 + \frac{U_2^2}{R}t_0 + \frac{U_3^2}{R}t_0 + \frac{U_4^2}{R}t_0 = \frac{100}{R}t_0 + \frac{25}{R}t_0 + 0 + \frac{25}{R}t_0 = \frac{150}{R}t_0.$$

(4 балла)

Получаем:

$Q = \frac{U_{\text{действ}}^2}{R}4t_0.$ (3 балла)

Окончательный результат:

$U_{\text{действ}} = \sqrt{\frac{150}{4}} = 6{,}1\ \text{В}.$ (3 балла)

8. (*10 баллов*) 2 моля молекулярного кислорода находятся в вертикальном сосуде с гладкими стенками, который закрыт невесомым поршнем. Температура кислорода *T*=300 К. В ходе медленного нагревания объём газа увеличился в три раза, при этом 40% молекул диссоциировали на атомы. Определите работу, совершённую газом в этом процессе.

Ответ: 9975 Дж

Решение:

Раз 40% молекул диссоциировали на атомы, следовательно, количество вещества увеличилось в 1,4 раза:

$\vartheta_2 = 1{,}4 \cdot \vartheta_1 = 2{,}8$ моля. (5 баллов)

Процесс – изобарный, следовательно, из уравнения Менделеева-Клапейрона, $pV = \vartheta RT$ следует, что:

$T_2 = \frac{30}{14}T_1 = \frac{30 \cdot 300}{14} \approx 643$ К. (5 баллов)

Работа газа в данном процессе:

$A = p\Delta V = \vartheta_2 RT_2 - \vartheta_1 RT_1 = (2{,}8 \cdot 8{,}31 \cdot 643) - (2 \cdot 8{,}31 \cdot 300) \approx 9975$ Дж. (5 баллов)

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*10 баллов*) Известно, что $3b > 9a + c > 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

Решение.

Первый способ. При $a = 0$ утверждение очевидно. Пусть $a \neq 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда по условию $P(-3) = 9a - 3b + c < 0$, $P(3) = 9a + 3b + c > 0$. Если квадратный трёхчлен принимает и положительные, и отрицательные значения, то он имеет два различных корня, то есть его дискриминант больше нуля, что и требовалось доказать.

Второй способ. По условию $b^2 > \left(\frac{9a+c}{3}\right)^2 = \left(\frac{9a-c}{3}\right)^2 + 4ac \geq 4ac$, что и требовалось доказать.

Оценивание. За полное доказательство 10 баллов.

2. (*13 баллов*) Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^3 x + \sin^4 y = 1, \\ \cos^3 x + \cos^5 y = 1. \end{cases}$

Ответ: $\left(2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi l\right), \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ 2\pi m\right)$, где $k, n, m, l \in \mathbf{Z}$.

Решение. Сложив уравнения, получаем $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^4 y + \cos^5 y = 2$. Используя основное тригонометрическое тождество, преобразуем уравнение $(\sin^3 x - \sin^2 x) + (\cos^3 x - \cos^2 x) + (\sin^4 y - \sin^2 y) + (\cos^5 y - \cos^2 y) = 0$ или $\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) + \sin^2 y(\sin^2 y - 1) + \cos^2 y(\cos^3 y - 1) = 0$. Каждое из слагаемых в этом уравнении неположительное, следовательно, уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \sin^2 x(\sin x - 1) = 0, \\ \cos^2 x(\cos x - 1) = 0, \\ \sin^2 y(\sin^2 y - 1) = 0, \\ \cos^2 y(\cos^3 y - 1) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 2\pi m, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi l; \end{array}\right. \end{cases}$$

где $k, n, m, l \in \mathbf{Z}$.

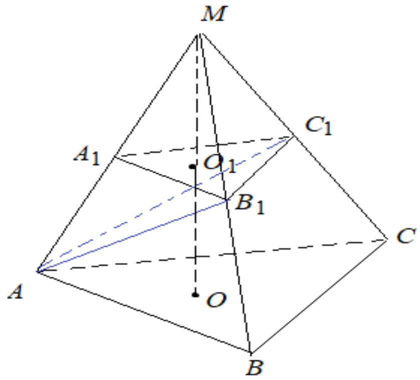
Исходной системе уравнений удовлетворяют решения $\left(2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi l\right), \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ 2\pi m\right)$, где $k, n, m, l \in \mathbf{Z}$.

Оценивание. Если ученик угадал, что одно из слагаемых в уравнениях системы равно 0, другое 1 но не доказал, что других решений нет – 3 балла. Обоснованно сделан вывод о том, что одно из слагаемых в уравнениях системы равно 0, другое 1 – 6 баллов. Полное решение – 13 баллов.

3. (*13 баллов*) Плоскость, параллельная основанию ABC пирамиды $MABC$, отсекает пирамиду $MA_1B_1C_1$ (вершины A_1, B_1, C_1 расположены на рёбрах MA, MB, MC соответственно). Объём пирамиды $MABC$ равен 375, объём пирамиды $MA_1B_1C_1$ равен 81. Найдите объём пирамиды MAB_1C_1.

Ответ: 135.

Решение. Объёмы подобных пирамид относятся как кубы их высот, то есть $\frac{MO^3}{MO_1^3}=\frac{375}{81}=\frac{125}{27}$, следовательно, $\frac{MO}{MO_1}=\frac{5}{3}$.



Имеем: $V_{MAB_1C_1}=V_{MA_1B_1C_1}+V_{AA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}(MO_1+OO_1)=\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot MO$. Кроме того, $V_{MA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot MO_1=\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot\frac{3MO}{5}=81.$ Тогда $S_{A_1B_1C_1}=\frac{81\cdot5}{MO}=\frac{405}{MO}$. В итоге получаем: $V_{MAB_1C_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{405}{MO}\cdot MO=135.$

Оценивание. Обоснованное решение 13 баллов. Вычислительные ошибки минус 2 балла.

4. (*14 баллов*) Датчик случайных чисел за одно действие уменьшает или увеличивает на **1** коэффициент перед $\boldsymbol{x}$ или свободный член в квадратном трёхчлене. После некоторого числа таких операций он преобразовал трёхчлен $\boldsymbol{x^2-20x+22}$ в трехчлен $\boldsymbol{x^2-202x+2}$. Верно ли, что среди полученных в процессе квадратных трёхчленов есть такой, у которого целые корни? Ответ обоснуйте.

Ответ: Да.

Решение. Рассмотрим сумму коэффициента при x и свободного члена. В начале процесса она равна 2, в конце процесса она равна –200. Очевидно, что эта сумма на каждом шаге увеличивается или уменьшается на 1. Значит, в некоторый момент времени она была равна –1. В этот момент времени квадратный трёхчлен имел вид $x^2-(p+1)x+p$, где p – целое число. Но такой квадратный трёхчлен имеет корень 1. По теореме Виета (или прямой подстановкой) вторым корнем будет p. То есть был получен квадратный трёхчлен, имеющий целые корни.

Оценивание. За полное обоснованное доказательство 14 баллов. Снизить баллы за решение на 2 балла, если не была доказана целочисленность второго корня квадратного трёхчлена.

5. (*10 баллов*) Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута веревка массы *M*=8 кг, концы которой связаны. За вертикальный участок веревки цепляется обезьяна массой *m*=20 кг и начинает карабкаться вверх, удерживаясь при этом на неизменной высоте. Определите мощность, развиваемую обезьяной, через три секунды после начала движения? Трением в оси блока пренебречь.

Ответ: 15000 Вт

Решение:

Так как обезьяна все время удерживается на одной и той же высоте, то сила F, с которой она тянет веревку, равна по величине весу обезьяны:

$F = mg.$ (2 балла)

Эта сила F сообщает веревке ускорение $a = \frac{mg}{M}$. (2 балла)

Через время t после того, как обезьяна ухватилась за веревку, веревка будет иметь скорость $v = \frac{mg}{M}t$ относительно обезьяны.

(2 балла)

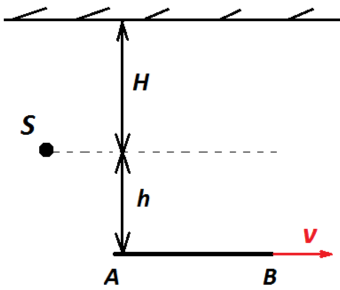
Мощность N, развиваемая обезьяной в каждый момент времени

$N = Fv,$ (2 балла)

или

$N = \frac{m^2g^2}{M}t = \frac{20^2 10^2}{8}3 = 15000$ Вт. (2 балла)

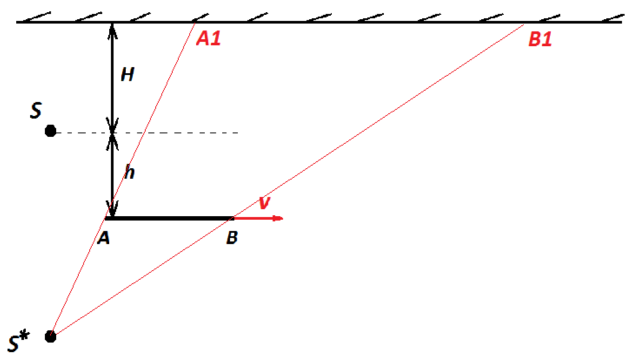
6. (*15 баллов*) На расстоянии *H*=3 м от стенки располагается точечный источник света *S*. На расстоянии *h*=2 м от источника *S* располагается плоское зеркало *AB*, которое двигается вправо с постоянной скоростью *v*=1,5 м/с. В начальный момент времени расстояние *SA*=2*h*. Определите, во сколько раз изменились размеры солнечного зайчика через время *t*=4 с после начального момента времени.



Ответ: размеры не изменились

Решение:

Источник света S можно заменить мнимым источником S*, который и формирует солнечный зайчик A1B1.



(5 баллов)

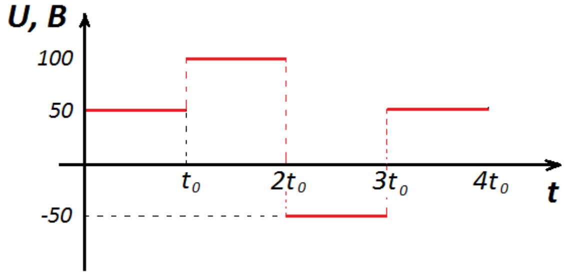
Из подобия треугольников, следует:

$\frac{A1B1}{AB} = \frac{H+2h}{h} = 3{,}5.$ (5 баллов)

Т.е. размер источника всегда в три с половиной раза больше размера зеркала.

(5 баллов)

7. (*10 баллов*) Напряжение в цепи изменяется по закону, который показан на графике. Далее цикл повторяется. Определите действующее напряжение в данной цепи.



Ответ: 66,1 В

Решение:

Общее количество теплоты, выделяемое за время 4t0:

$$Q = \frac{U_1^2}{R}t_0 + \frac{U_2^2}{R}t_0 + \frac{U_3^2}{R}t_0 + \frac{U_4^2}{R}t_0 = \frac{2500}{R}t_0 + \frac{10000}{R}t_0 + \frac{2500}{R}t_0 + \frac{2500}{R}t_0 = \frac{17500}{R}t_0.$$

(4 балла)

Получаем:

$$Q = \frac{U_{\text{действ}}^2}{R}4t_0.$$ (3 балла)

Окончательный результат:

$$U_{\text{действ}} = \sqrt{\frac{17500}{4}} \approx 66{,}1 \text{ В}.$$ (3 балла)

8. (*15 баллов*) 4 моля молекулярного азота находятся в вертикальном сосуде с гладкими стенками, который закрыт невесомым поршнем. Температура кислорода *T*=350 К. В ходе медленного нагревания объём газа увеличился в два раза, при этом 60% молекул диссоциировали на атомы. Определите работу, совершённую газом в этом процессе.

Ответ: 11634 Дж

Решение:

Раз 60% молекул диссоциировали на атомы, следовательно, количество вещества увеличилось в 1,6 раза:

$$\vartheta_2 = 1{,}6 \cdot \vartheta_1 = 6{,}4 \text{ моля}.$$ (5 баллов)

Процесс – изобарный, следовательно, из уравнения Менделеева-Клапейрона, $pV = \vartheta RT$ следует, что:

$$T_2 = \frac{20}{16}T_1 = \frac{20 \cdot 350}{16} = 437{,}5 \text{ К}.$$ (5 баллов)

Работа газа в данном процессе:

$$A = p\Delta V = \vartheta_2 RT_2 - \vartheta_1 RT_1 = (6{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 437{,}5) - (4 \cdot 8{,}31 \cdot 350) = 11634 \text{ Дж}.$$

(5 баллов)