Олимпиада школьников
«Звезда – Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Отборочный тур
2014-2015

6 класс

Решения, указания, ответы и критерии оценивания

1. Коробейник Василий купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя Василий получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки? Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть стоимость ручки – x руб. Из уравнения $5-x=10-3x$ находим x=2,5.

***Ответ*: 2,5**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов, если есть арифметическая ошибка – 15 баллов.

2. Стадо молодняка состоит из бычков и тёлочек. Тёлочек в стаде 55% от его общей численности, а их общий вес составляет 45% общего веса стада. Во сколько раз средний вес бычка больше среднего веса тёлочки?

Решение. Пусть в стаде всего x голов скота, а его общий вес – y кг. Тогда средний вес тёлочки равен $\frac{0{,}45y}{0{,}55x}=\frac{9}{11}\cdot\frac{y}{x}$, а средний вес бычка – $\frac{0{,}55y}{0{,}45x}=\frac{11}{9}\cdot\frac{y}{x}$. Получаем, что вес бычка в $\left(\frac{11}{9}\right)^2$ раз больше веса тёлочки.

Ответ: $1\frac{40}{81}$

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов, если есть арифметическая ошибка – 15 баллов.

3. Отрезок, равный 42 см, разделён на три (не обязательно равных) отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 26 см. Найдите длину среднего отрезка.

Решение. Сумма половинок крайних отрезков равна 42 – 26=16 см. Значит, сумма длин крайних отрезков в два раза больше – 32 см. Тогда длина среднего отрезка – 10 см.

***Ответ*: 10**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов.

4. Проезжал по лесной дороге Иван-царевич, встретил медведя, волка и лису. Медведь всегда говорит правду, лиса всегда лжет, а волк чередует правду и ложь, всегда начиная с правды. Звери сказали Ивану-царевичу по 2 предложения:

1-й: «Ты коня спасешь». «Но сам погибнешь».

2-й: «Ты целым и невредимым останешься». «И коня спасешь».

3-й: «Ты цел останешься». «А вот коня потеряешь».

Какие ответы, какому зверю принадлежат?

Решение. Первый и третий звери утверждают противоположное, это означает, что один из них лиса, другой – медведь. Тогда второй зверь это волк. Его первое утверждение – правда, следовательно, первый зверь – лиса, третий – медведь.

***Ответ*: лиса, волк, медведь**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов.

5. В пруд запустили 30 щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трёх щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут насытиться?

Решение. Если, например, 7 щук насытятся, съев каждая по три голодных щуки, то останутся ещё две голодные, которые насытятся, съев каждая, по три ранее насытившиеся щуки. Итак, общее количество насытившихся щук равно 9. Покажем, что 9 – наибольшее количество насытившихся щук. Пусть k – число оставшихся щук, n – число насытившихся, тогда $3n$ – число проглоченных щук, поэтому $k+3n=30$. Отсюда, k кратно 3. Пусть $k=3m$, тогда $m+n=10$. Так как заведомо останутся не съеденные щуки, то $m \geq 1$, а наибольшее значение $n = 9$.

***Ответ*: 9**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов. Если ответ правильный, но не доказано, что это наибольшее возможное значение, то ставить – 10 баллов.

Олимпиада школьников
«Звезда – Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Отборочный тур
2014-2015

7 класс

Решения, указания, ответы и критерии оценивания

1. Найдите значение выражения a^3+b^3+12ab, если известно, что $a+b=4$.

Решение. Имеем,

$$a^3+b^3+12ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+12ab=4(a^2-ab+b^2)+12ab=$$
$$=4a^2+4b^2+8ab=4(a+b)^2=4\cdot 16=64.$$

***Ответ*: 64**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов, если есть арифметическая ошибка – 15 баллов.

2. Рабочий копал яму. На вопрос прохожего, какой глубины будет яма, рабочий ответил: «Мой рост 180 см. Когда я вырою яму до конца, то макушка моей головы будет на столько ниже уровня земли, на сколько сейчас, когда я уже вырыл половину, она находится выше её уровня». Какой глубины будет яма? Ответ запишите в см.

Решение. Пусть яма имеет глубину x см. Тогда $x-180=180-0{,}5\cdot x$, откуда x=240.

***Ответ*: 240**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов, если есть арифметическая ошибка – 15 баллов.

3. В треугольнике ABC: $AC=BC$, AD – медиана. Разность периметров треугольников ACD и ADB равна 2 м, AB=8 м. Найдите AC.

***Ответ*: 10**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов, если есть арифметическая ошибка – 15 баллов.

4. В числе 1234567, записанном на доске, Вася стёр три цифры и получил число, кратное 8 и 9. Какое число записано теперь на доске?

Указание. Число находим перебором, используя признаки делимости на 8 и 9.

***Ответ*: 3456**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов.

5. Маша и Даша купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Маше коробки хватило только на 41 чашку чая, а Даше – на 58 чашек. Сколько пакетиков было в коробке?

Решение. Пусть n – количество пакетиков чая в коробке. Маша m пакетиков использовала два раза, (n – m) пакетиков – три раза. Тогда $2m+3(n-m)=41$, или $m=3n-41$. Даша d пакетиков использовала два раза, (n – d) пакетиков – три раза. Тогда $2d+3(n-d)=58$, или $d=3n-58$. Так как $d\geq 0$, то $n\geq 20$. Так как $m\leq n$, то $n\leq 20$. Получаем, что $n=20$.

***Ответ*: 20**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов. Если ответ правильный, но не построена оценка для n, то ставить – 10 баллов.

Олимпиада школьников
«Звезда – Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Отборочный тур
2014-2015

8 класс

Решения, указания, ответы и критерии оценивания

1. Разделите число 125 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй, как 2:3, вторая к третьей, как 3:5, а третья к четвёртой, как 5:6. В ответе запишите самую маленькую часть.
***Ответ*: 15,625**
Оценивание. За правильное решение – 20 баллов, если есть арифметическая ошибка – 15 баллов.

2. Дан прямоугольный треугольник с катетами 2 и 3 см. Найдите площадь квадрата, вписанного в этот треугольник (вершина квадрата совпадает с вершиной прямого угла треугольника).
Указание. Уравнение относительно стороны квадрата получаем, используя подобие двух прямоугольных треугольников, у которых, гипотенузы образуют гипотенузу исходного треугольника.
***Ответ*: 1,44**
Оценивание. За правильное решение – 20 баллов.

3. По дороге на Новогодний праздник несколько мальчиков помогли Деду Морозу донести подарки. Каждый из мальчиков донёс по три подарка, а остальные 107 подарков Дед Мороз сам довёз на санях. Все эти подарки Дед Мороз разделил поровну между всеми этими мальчиками и 19 девочками. Сколько было мальчиков, если известно, что их на празднике было меньше, чем девочек?
Решение. Отдадим из 107 подарков, привезённых Дедом Морозом, 57 подарков девочкам – по три каждой. Тогда у всех детей будет по три подарка. Оставшиеся 50 подарков поделим поровну между всеми детьми. Общее число детей – делитель 50. Так как девочек – 19, то общее число детей либо 50, либо 25. Известно, что мальчиков меньше, чем девочек, значит всего детей 25 человек, а мальчиков – 6.
***Ответ*: 6**
Оценивание. За правильное решение – 20 баллов.

4. В первый день ювелир продал 20% всего золота и ещё 2 кг. Во второй день он продал 50% остатка и ещё 1 кг. На третий день он продал 25% остатка и ещё 3 кг. В итоге у него осталось 18 кг золота. Сколько золота было у него изначально?

Решение. Начнём с конца. У ювелира после продажи 25% остатка был 21 кг золота, следовательно, на второй день было 28 кг. 29 кг – это остаток после продажи 50% золота, следовательно, после первого дня у него оставалось 58 кг. 60 кг – остаток после продажи 20% золота, следовательно, у ювелира изначально было 75 кг золота.

***Ответ*: 75**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов, если есть арифметическая ошибка – 15 баллов.

5. Найдите все пары целых чисел, для которых выполняется равенство $\frac{4}{x} - \frac{y}{6} = \frac{5}{18}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x(5+3y) = 72$. Разбивая 72 на целые множители, получаем возможные варианты: $\begin{cases} x = -72, \\ 5+3y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 36, \\ 5+3y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9, \\ 5+3y = 2. \end{cases}$

***Ответ*: (9,1); (– 72, – 2); (36, – 1)**

Оценивание. За правильное решение – 20 баллов. Если найдена правильно только одна пара – 10 баллов, найдены две пары – 15 баллов.

Олимпиада школьников
«Звезда — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Отборочный тур

2014–2015

Решения, указания, ответы и критерии оценивания

9 класс

1. В купе железнодорожного вагона один напротив другого стоят два дивана, на каждом из которых по четыре места. Из восьми пассажиров трое желают сидеть лицом в направлении движения поезда, а двое — спиной. Сколькими способами могут разместиться пассажиры, с учётом их пожеланий?

Ответ: 1728.

Решение. Пусть A, B и C хотят смотреть вперёд по ходу движения поезда, у D и E — «противоложное» желание, а F, G и H — всё равно, как сидеть. Тогда A выбирает место 4 способами, после чего у B — 3 варианта. Далее указываем для каждого пассажира число способов выбрать место, в предположении, что предшествующие пассажиры уже заняли свои места: C — 2, D — 4, E — 3, F — 3, G — 2, H — 1. Всего, по правилу произведения, получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1728$ способов размещения пассажиров.

Оценивание. За верное решение — 20 б. Ход решения верный, но ошибки при умножении — 15 б.

2. Решите уравнение $(x^2 - 2x + 3)^2 = x^3 + 9$.

Ответ: 0; 3.

Решение. Преобразуем уравнение, воспользовавшись формулой разности квадратов:

$$(x^2 - 2x + 3)^2 - 3^2 = x^3; \quad (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 6) = x^3.$$

Теперь видно, что 0 — корень уравнения. Найдём остальные корни:

$$(x - 2)(x^2 - 2x + 6) = x^2; \quad x^3 - 5x^2 + 10x - 12 = 0.$$

Перебором натуральных делителей свободного члена находим корень 3, после чего обнаруживаем, что $x^3 - 5x^2 + 10x - 12 = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$, откуда видно, что других корней нет.

Оценивание. За верное решение — 20 б. Если найден только корень 0, то 4 б. Если потерян корень 0, 10 б.

3. В квадрате $ABCD$ проведены отрезки CE и CF, где E — середина AB, F — середина AD. Докажите, что CE и CF делят отрезок BD на три равные части.

Доказательство. Докажем, что отрезок CE делит диагональ BD в отношении $1:2$, считая от вершины B. Пусть $K = BD \cap EC$, T — середина CD, $L = BD \cap AT$. Треугольники ATD и CEB — равные (по двум катетам). Отсюда $\angle TAD = \angle ECB$ и $EC \parallel AT$. Значит, EK — средняя линия в треугольнике ABL, а LT — средняя линия в треугольнике KDC. Поэтому $BK = KL = LD$ и $BK = \frac{1}{3}BD$. Точно так же доказывается, что отрезок CF делит диагональ BD в отношении $1:2$, считая от вершины D.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

4. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости Oxy неравенством $|x| + |y| + |x + y| \leqslant 2$.

Ответ: 3.

Указание. Прямые $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 0$ разбивают плоскость на 6 частей, в каждой из которых все три модуля в левой части неравенства раскрываются единообразно. Фигура представляет собой шестиугольник, площадь которого легко вычисляется.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

5. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором число $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 2000.

Ответ: 125.

Решение. Разложим число 2000 на простые множители: $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Из пяти подряд идущих чисел ровно одно делится на 5. В нашем случае это число должно делиться на 5^3. Значит, $n + 3 \geqslant 125$. Легко убедиться в том, что при $n = 122, 123, 124$ наше число не будет делится на 2^4, а при $n = 125$ — будет.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

Олимпиада школьников
«Звезда — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Отборочный тур

2014–2015

Решения, указания, ответы и критерии оценивания

10 класс

1. Трое пенсионеров в парке на лавочке играют в шахматы, причём игрок, проигравший очередную партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 6 партий, а второй — 13. Сколько партий сыграл третий игрок? (Считать, что вничью партии не заканчиваются).

Ответ: 7.

Решение. Всего партий было не менее 13. В каждой паре соседних партий первй игрок принимал участие; поскольку он сыграл 6 партий, партий было не больше 13. С учётом предыдущего получаем, что партий было ровно 13. В каждой из них играл второй игрок, в шести – первый, в оставшихся семи — третий.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

2. Найдите сумму

$$(2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2).$$

Ответ: 5050.

Решение. Перегруппируем слагаемые:

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\ldots+(100^2-99^2)=$$

$$=3+7+11+\ldots+199=\frac{3+199}{2}\cdot 50=5050.$$

Оценивание. За верное решение — 20 б.

3. Найдите $f(3)$, если известно, что для любого x имеет место равенство

$$f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=\frac{x+3}{x-1}.$$

Ответ: -19.

Решение. Обозначим $t = \dfrac{x+1}{2x-1}$. Тогда $x = \dfrac{t+1}{2t-1}$ и $\dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{7t-2}{-t+2}$. Значит, $f(t) = \dfrac{7t-2}{-t+2}$ и $f(3) = -19$.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

4. Решите неравенство $|x^4 - x| + |x^3 - x^2| \leqslant |x^4 - x^3 + x^2 - x|$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{1\}$.

Решение. $|a| + |b| \leqslant |a - b| \iff |ab| \leqslant -ab \iff ab \leqslant 0$. Положив $a = x^4 - x$ и $b = x^3 - x^2$, придём к неравенству $(x^4 - x)(x^3 - x^2) \leqslant 0$, которое решается методом интервалов.

5. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $DOEC$, если площадь треугольника ABC равна 105, а $AC : AB : BC = 4 : 3 : 2$.

Ответ: 32.

Указание. Если разместить в вершинах A, B и C соответственно массы 2, 4 и 3, то их центр масс будет в точке пересечения биссектрис. Отсюда $\frac{AO}{QD} = \frac{7}{2}$. Поэтому $\frac{AO}{AD} = \frac{7}{9}$. Кроме того, $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$. Отсюда $S_{AOE} = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{5} S_{ADC} = \frac{7}{15} S_{ADC}$, а $S_{DOEC} = \frac{8}{15} S_{ADC}$. В свою очередь, $S_{ADC} = \frac{4}{7} S_{ABC}$. Таким образом, $S_{DOEC} = \frac{32}{105} S_{ABC}$.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

Олимпиада школьников
«Звезда — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Отборочный тур

2014–2015

Решения, указания, ответы и критерии оценивания

11 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 15; \\ x^3y - y^3x = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1), (-2;-1)$.

Указание. Поделив первое уравнение на второе, получим $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{5}{2}$. Отсюда $x = 2y$ или $y = 2x$. Но из первого уравнения следует, что $|x| > |y|$. Следовательно, $x = 2y$.

Оценивание. За верное решение — 20 б. Потеряно одно из решений — 10 б.

2. Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Ответ: 9.

Указание. Нужно просуммировать равенства $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ для $k = 1, 2, \ldots, 99$.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x - \cos x + 1}{\sqrt{2\sin x - \sqrt{3}}} = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4. Пусть m — количество трёхзначных чисел, у которых средняя цифра меньше крайних, а n — количество трёхзначных чисел, у которых средняя цифра больше крайних. Чему равна разность $m - n$?

Ответ: 45.

Указание. Если средняя цифра k, то чисел первого вида $(9-k)^2$, а второго $(k-1)k$.

Оценивание. За верное решение — 20 б. Если ход решения верный, но есть арифметические ошибки, минус 5–10 баллов.

5. В куб с ребром 2 вписан шар. Через три вершины куба, имеющие общую смежную вершину, проведена плоскость. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Указание. Если O — центр шара, а K — точка пересечения диагонали куба и указанной плоскости, то OK составляет одну шестую диагонали куба.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

Олимпиада школьников
«Звезда - Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
Решения и критерии оценивания
1 марта 2015
6 класс

1. Вычислите $\dfrac{2015}{201520152015^2-201520152016\cdot 201520152014}$

Ответ: 2015.

Решение. Обозначим 201520152015=*a*, тогда в знаменателе имеем $a^2-(a+1)(a-1)$, что тождественно равно 1.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если честно посчитал, приводя все выкладки, балл не снижать. За ответ без обоснования и вычислений – 0 баллов.

2. Ученики 9 класса физико-математического лицея могут на выбор сдавать ОГЭ по физике или информатике. Каждый ученик должен выбрать хотя бы один предмет. В 2014 году экзамен по физике сдавали 65% девятиклассников, по информатике – 60%. Сколько процентов учеников сдавали и физику, и информатику?

Ответ: 25%.

Решение. Физику не сдавали 35%, а информатику 40%, и это разные люди, поскольку не было тех, кто не сдавал оба предмета. Значит, оставшиеся 25% учеников сдавали оба предмета.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

3. Когда Вася по пути из дома в школу считал ворон, то насчитал их 21. Сколько времени считал ворон Вася, если оно выражается целым числом минут, а в каждую следующую минуту Вася замечал на одну ворону больше, чем в предыдущую? Найдите все возможные варианты.

Ответ: 1, 2, 3, 6 минут

Решение. Если в первую минуту Вася увидел ровно 1 ворону, то он считал ворон 6 минут, так как 1+2+3+4+5+6=21. Значит, Вася считал ворон не более 6 минут. Осуществляем перебор по количеству минут. Если Вася считал ворон 5 минут, и в первую минуту насчитал x ворон, то получаем уравнение $5x+10=21$, которое не имеет решений в целых числах. Аналогично, для 4 минут: $4x+7=21$. Случаи 3 минут, 2 и 1 минуты, очевидно, подходят.

Оценивание. За правильное решение – 16 баллов. За потерю одного из решений минус 4 балла.

4. 25 декабря Васин средний балл по математике за вторую четверть был равен ровно 2,2. Какое наименьшее количество пятёрок по математике должен успеть получить Вася до Нового Года, чтобы его средний балл стал выше 4,5? Считайте, что оценок у Васи было меньше 10, и других оценок, кроме пятёрок, Вася больше получать не будет.

Ответ: 24.

Решение. Пусть S – сумма всех Васиных текущих оценок, n – количество оценок. Тогда S=2,2n или $S=\frac{11}{5}n$. Так как S – целое число, то n кратно 5, но по условию n<10, следовательно, n=5.

Пусть Вася получит κ пятёрок, тогда должно быть $11+5\kappa>4{,}5(5+\kappa)$, что равносильно неравенству $\kappa>23$. Значит, $\kappa\geq 24$.

Оценивание. За верное решение 18 баллов.

5. Решите в натуральных числах уравнение $x+\dfrac{2}{y+\frac{2}{z}}=\dfrac{7}{3}$.

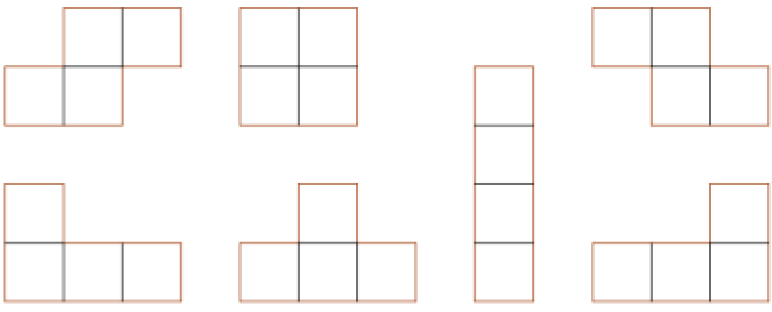
Ответ: (1;1;4), (2;4;1), (2;5;2).

Решение. Так как $\dfrac{2}{y+\frac{2}{z}}>0$ и $x\in\mathrm{N}$, то x=1 или x=2. Если x=1, то $y+\dfrac{2}{z}=\dfrac{3}{2}$, и, следовательно, y=1, z=4. Если x=2, то $\dfrac{2}{y+\frac{2}{z}}=\dfrac{1}{3}$, $y+\dfrac{2}{z}=6$.

Так как $y\in\mathrm{N}$, то z=1 или z=2, следовательно, соответственно, y=4 или y=5.

Оценивание. За верное решение 18 баллов. За потерю одного из решений минус 4 балла.

6. Имеется 7 фигурок, изображённых на рисунке, каждая из которых составлена из четырёх единичных квадратиков.



Можно ли ими замостить прямоугольник размером 4×7? (Фигурки можно поворачивать).

Ответ: нельзя.

Решение. Разобьём прямоугольник 4×7 на единичные клетки, и раскрасим их в шахматном порядке. Шесть из семи фигурок покроют по две чёрные и две белые клетки, а седьмая (т-образная) – три клетки одного цвета и одну другого. Таким образом, если бы удалось разбить прямоугольник на указанные 7 фигурок, то оказалось бы, что они покрывают разное количество белых и чёрных клеток, а их должно быть поровну! Полученное противоречие показывает, что требуемое разбиение невозможно.

Оценивание. За верное решение 20 баллов.

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания
1 марта 2015 г.

7 класс

1. Средний рост 6 волейболистов 195 см. Какое наибольшее количество из них может иметь рост больше 199 см?

Ответ: 5.

Решение. Если все 6 волейболистов выше 199 см, то и их средний рост будет больше 199 см. А вот пятеро могут быть выше 199 см, если шестой игрок достаточно невысок. Например, его рост 170 см, а все остальные имеют рост 200 см.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

2. Ученики 9 класса физико-математического лицея могут на выбор сдавать ОГЭ по физике или информатике. Каждый ученик должен выбрать хотя бы один предмет. В 2014 году экзамен по физике сдавали 65% девятиклассников, по информатике 60%. Сколько процентов учеников сдавали и физику, и информатику?

Ответ: 25%.

Решение. Физику не сдавали 35%, а информатику 40%, и это разные люди, поскольку не было тех, кто не сдавал оба предмета. Значит, оставшиеся 25% учеников сдавали оба предмета.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

3. Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел прямо под собой крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев после этого полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погоню, догнав её ещё через 4 минуты. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если его скорость в 5 раз меньше скорости дракона?

Ответ: в 3 раза.

Решение. Пусть y — скорость крысы, а x — скорость Гарри. Скорость дракона $5x$. Крыса и Гарри удалялись друг от друга в течение 0,5 мин со скоростью $y + 5x$, а сближались в течение 4 мин со скоростью $x - y$. Отсюда $0{,}5(y + 5x) = 4(x - y)$, $4{,}5y = 1{,}5x$, $x = 3y$.

Оценивание. За верное решение 16 баллов.

4. Торт имеет форму равнобедренной трапеции, у которой верхнее основание и боковые стороны в 2 раза меньше нижнего основания. Как разделить торт а) на 3; б) на 4 равные части?

Решение. Пусть E — середина нижнего основания трапеции $ABCD$ (рис. 1).

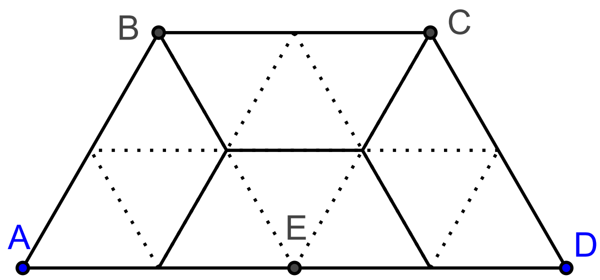


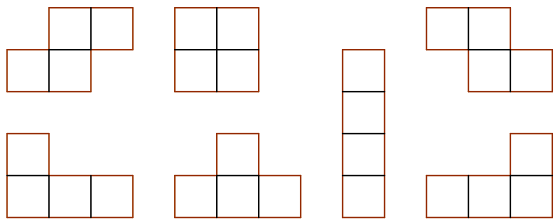
Рис. 1

Тогда $AB = BC = CD = DE = EA$. Четырёхугольник $EBCD$ — параллелограмм (так как $ED = BC$ и $ED \parallel BC$). Поэтому $BE = CD$. Аналогично $AB = EC$. Таким образом, ABE, BCE, CDE — равные треугольники (все их стороны равны между собой). Получили пример разбиения на 3 равные части.

Разобьём теперь каждый из треугольников ABE, BCE, CDE средними линиями на 4 равные части. Получим 12 равных правильных треугольников, которые объединяются в 4 равных трапеции (см. рис. 1).

Оценивание. За полное решение обоих пунктов 18 баллов. За разбиение на 3 равные части: с обоснованием 5 баллов, без обоснования 3 балла. За разбиение на 4 равные части: с обоснованием 13 баллов, без обоснования 10 баллов.

5. Имеется 7 фигурок, изображённых на рисунке, каждая из которых составлена из четырёх единичных квадратиков.



Можно ли ими замостить прямоугольник размером 4×7? (Фигурки можно поворачивать).

Ответ: нельзя.

Решение. Разобьём прямоугольник 4×7 на единичные клетки, и раскрасим их в шахматном порядке. Шесть из 7 фигурок покроют по две чёрные и две белые клетки, а седьмая (т-образная) — три клетки одного цвета и одну другого. Таким образом, если бы удалось разбить прямоугольник на указанные 7 фигурок, то оказалось бы, что они покрывают разное количество белых и чёрных клеток, в то время как их поровну! Полученное противоречие показывает, что требуемое разбиение невозможно.

Оценивание. За верное решение — 18 баллов.

6. Имеется две кучки спичек: в первой — 61, во второй — 60. Играют двое, ходят поочерёдно. За один ход игрок должен уменьшить число спичек в одной из кучек так, чтобы число оставшихся в ней не было делителем числа спичек в другой кучке и не делилось на него. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?

Ответ: выигрывает второй.

Решение. Стратегия второго игрока: после своего хода оставлять пару вида $\{2k, 2k+1\}$. Ясно, что после хода первого игрока будет пара иного вида $\{x, y\}$. Пусть $x < y$. Если x — чётное, то второй игрок далее оставит пару $\{x, x+1\}$. Если же x — нечётное, то — $\{x-1, x\}$. В конце концов после хода второго игрока останется пара $\{2, 3\}$, и у соперника не будет допустимого хода.

Оценивание. За верное решение — 20 баллов.

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания

1 марта 2015 г.

8 класс

1. Ученики 9 класса физико-математического лицея могут на выбор сдавать ОГЭ по физике или информатике. Каждый ученик должен выбрать хотя бы один предмет. В 2014 году экзамен по физике сдавали 65% девятиклассников, по информатике 60%. Сколько процентов учеников сдавали и физику, и информатику?

Ответ: 25%.

Решение. Физику не сдавали 35%, а информатику 40%, и это разные люди, поскольку не было тех, кто не сдавал оба предмета. Значит, оставшиеся 25% учеников сдавали оба предмета.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел прямо под собой крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев после этого полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погоню, догнав её ещё через 4 минуты. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если его скорость в 5 раз меньше скорости дракона?

Ответ: в 3 раза.

Решение. Пусть y — скорость крысы, а x — скорость Гарри. Скорость дракона $5x$. Крыса и Гарри удалялись друг от друга в течение 0,5 мин со скоростью $y + 5x$, а сближались в течение 4 мин со скоростью $x - y$. Отсюда $0{,}5(y + 5x) = 4(x - y)$, $4{,}5y = 1{,}5x$, $x = 3y$.

Оценивание. За верное решение 16 баллов.

3. Пусть a, b, c — положительные числа и $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca} = 2.$$

Решение. Преобразуем вторую и третью дробь, умножив числитель и знаменатель второй на a, а третьей на ab.

$$\frac{1+b}{1+b+bc} = \frac{a+ab}{a+ab+abc} = \frac{a+ab}{a+ab+1};$$

$$\frac{1+c}{1+c+ca} = \frac{ab+abc}{ab+abc+abca} = \frac{ab+1}{ab+1+a}.$$

Теперь у всех трёх дробей одинаковый знаменатель, и их легко сложить.

Оценивание. За полное решение — 16 баллов. Если тождество проверено только для каких-то частных случаев, 0 баллов.

4. Торт имеет форму равнобедренной трапеции, у которой верхнее основание и боковые стороны в 2 раза меньше нижнего основания. Как разделить торт а) на 3; б) на 4 равные части?

Решение. Пусть E — середина нижнего основания трапеции $ABCD$ (рис. 1).

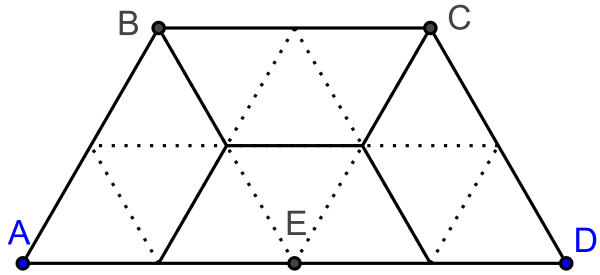


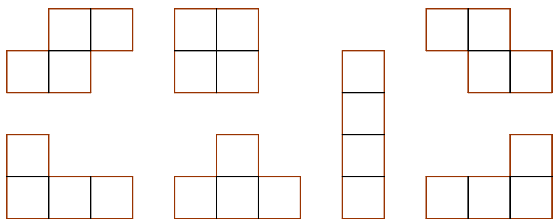
Рис. 1

Тогда $AB = BC = CD = DE = EA$. Четырёхугольник $EBCD$ — параллелограмм (так как $ED = BC$ и $ED \parallel BC$). Поэтому $BE = CD$. Аналогично $AB = EC$. Таким образом, ABE, BCE, CDE — равные треугольники (все их стороны равны между собой). Получили пример разбиения на 3 равные части.

Разобьём теперь каждый из треугольников ABE, BCE, CDE средними линиями на 4 равные части. Получим 12 равных правильных треугольников, которые объединяются в 4 равных трапеции (см. рис. 1).

Оценивание. За полное решение обоих пунктов 18 баллов. За разбиение на 3 равные части: с обоснованием 5 баллов, без обоснования 3 балла. За разбиение на 4 равные части: с обоснованием 13 баллов, без обоснования 10 баллов.

5. Имеется 7 фигурок, изображённых на рисунке, каждая из которых составлена из четырёх единичных квадратиков.



Можно ли ими замостить прямоугольник размером 4×7? (Фигурки можно поворачивать).

Ответ: нельзя.

Решение. Разобьём прямоугольник 4×7 на единичные клетки, и раскрасим их в шахматном порядке. Шесть из 7 фигурок покроют по две чёрные и две белые клетки, а седьмая (т-образная)

— три клетки одного цвета и одну другого. Таким образом, если бы удалось разбить прямоугольник на указанные 7 фигурок, то оказалось бы, что они покрывают разное количество белых и чёрных клеток, в то время как их поровну! Полученное противоречие показывает, что требуемое разбиение невозможно.

Оценивание. За верное решение — 18 баллов.

6. В какое наименьшее число цветов можно покрасить натуральные числа, чтобы числа, разность которых — простое число, были разного цвета?

Ответ: 4.

Решение. Оценка. Числа 1, 3, 6 и 8 должны быть разного цвета, поскольку их попарные разности — простые числа. Значит, разных цветов должно быть не меньше четырёх.

Пример. Можно разбить $\mathbb{N}$ на 4 прогрессии с разностью 4, и члены каждой прогрессии покрасить своим цветом.

Оценивание. За полное решение 20 баллов. Если есть только оценка — 10 баллов. Если есть только пример покраски в 4 цвета — 10 баллов.

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания
1 марта 2015 г.

9 класс

1. Ученики 9 класса физико-математического лицея могут на выбор сдавать ОГЭ по физике или информатике. Каждый ученик должен выбрать хотя бы один предмет. В 2014 году экзамен по физике сдавали 65% девятиклассников, по информатике 60%. Сколько процентов учеников сдавали и физику, и информатику?

Ответ: 25%.

Решение. Физику не сдавали 35%, а информатику 40%, и это разные люди, поскольку не было тех, кто не сдавал оба предмета. Значит, оставшиеся 25% учеников сдавали оба предмета.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. На школьной доске записаны числа 0, 1, 2,..., 30. К доске по очереди по одному разу подходят 30 учеников. Каждый из них выбирает какие-то два числа x и y, стирает их, и записывает число, вычисляемое по формуле $\frac{x+y+|x-y|}{2}$. Какое число может остаться на доске?

Ответ: только 30.

Решение. Легко убедиться в том, что $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \max(x,y)$. Значит, после каждого действия из двух чисел, к которым оно применяется, на доске остаётся максимальное из них. После последнего действия на доске может остаться только наибольшее из исходных чисел.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

3. Пусть a, b, c — положительные числа и $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca} = 2.$$

Решение. Преобразуем вторую и третью дробь, умножив числитель и знаменатель второй на a, а третьей на ab.

$$\frac{1+b}{1+b+bc} = \frac{a+ab}{a+ab+abc} = \frac{a+ab}{a+ab+1};$$

$$\frac{1+c}{1+c+ca} = \frac{ab+abc}{ab+abc+abca} = \frac{ab+1}{ab+1+a}.$$

Теперь у всех трёх дробей одинаковый знаменатель, и их легко сложить.

Оценивание. За полное решение — 16 баллов. Если тождество проверено только для каких-то частных случаев, 0 баллов.

4. В треугольнике ABC провели биссектрису CK. Известно, что $\angle BCA = 120°$. Докажите, что $\frac{1}{CK} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$.

Решение. Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $l = CK$.

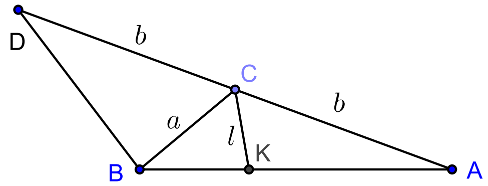


Рис. 1

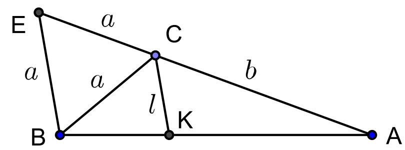


Рис. 2

Первое решение. Пусть на луче AC отложена точка D такая, что $DC = CA$ (рис. 1). Поскольку BC — медиана в треугольнике DBA, а медиана делит площадь треугольника пополам, имеем

$$S_{DCB} = S_{ABC} = S_{BCK} + S_{KCA}. \tag{1}$$

Заметим, что $\angle DCB = \angle BCK = \angle KCA = 60°$. Воспользуемся таким фактом: если у двух треугольников есть общий (по величине) угол, то отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений сторон, заключающих этот угол. Поделив части равенства (1) на S_{DCB}, получим

$$1 = \frac{S_{BCK}}{S_{DCB}} + \frac{S_{KCA}}{S_{DCB}} = \frac{al}{ab} + \frac{bl}{ab} = \frac{l}{b} + \frac{l}{a}.$$

Отсюда $\frac{1}{l} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$.

Второе решение. Проведём через вершину B прямую, параллельную KC, до пересечения с прямой AC в точке E (рис. 2). Заметим, что $\angle ECB = 60°$ (как внешний угол треугольника BCA), а $\angle EBC = \angle BCK = 60°$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых). Поэтому треугольник BCE — равносторонний. Из подобия треугольников ACK и AEB имеем

$$\frac{a}{l} = \frac{BE}{CK} = \frac{AE}{AC} = \frac{b+a}{b} = 1 + \frac{a}{b}.$$

Поделив обе части равенства $\frac{a}{l} = 1 + \frac{a}{b}$ на a, получим требуемое.

Оценивание. За полное решение — 18 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 + y^2)(x - 2y + 2015) = 2xy.$$

Ответ: $(0; 0), (-2015; 0), (2014, 2014), (-672, 672)$.

Решение. Если $y = 0$, то $x^2(x + 2015) = 0$ и $x = 0$ или $x = -2015$. При $x = 0$ новых решений уравнения не обнаруживается. Пусть теперь $xy \neq 0$. Тогда и $x - 2y + 2015 \neq 0$. При этом

$$|(x^2 + y^2)(x - 2y + 15)| \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|,$$

а равенство возможно лишь при $|x| = |y|$ и $x - 2y + 2015 = \pm 1$, а именно:

- если $x = y$, то $x - 2y + 2015 = 1$, откуда $x = y = 2014$;
- если $x = -y$, то $x - 2y + 2015 = -1$, откуда $3x = -2016$, $x = -672$, $y = 672$.

Оценивание. За полное решение — 20 баллов. Если рассмотрен только случай $xy = 0$, 6 баллов. Если не рассмотрен случай $xy = 0$, 14 баллов. Если доказано, что при $xy \neq 0$ $|x| = |y|$, но пропущен случай $x = -y$, минус 7 баллов.

6. По кругу записано 100 положительных чисел. Сумма любых двух соседних чисел равна квадрату числа, следующего за ними по часовой стрелке. Найдите все такие наборы чисел.

Ответ: сто двоек.

Решение. Пусть M — наибольшее из всех чисел, а перед ним стоят числа a и b. Тогда $a + b = M^2$, $a \leqslant M$, $b \leqslant M$, откуда $M^2 \leqslant 2M$ и $M \leqslant 2$ (учитываем, что $M > 0$).

Пусть m — наименьшее из всех чисел, а перед ним стоят числа c и d. Тогда $c + d = m^2$, $c \geqslant m$, $d \geqslant m$, откуда $m^2 \geqslant 2m$ и $m \geqslant 2$ (поскольку $m > 0$).

Итак, наибольшее число не больше 2, а наименьшее не меньше 2. Значит, все числа равны 2. С другой стороны, для 100 двоек выполнено условие задачи.

Оценивание. За полное решение — 20 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 5 баллов. Если показано, что все числа должны быть равны 2, но не отмечено, что 100 двоек действительно удовлетворяют условию задачи, 18 баллов.

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания
1 марта 2015 г.

10 класс

1. Выпускники 11 класса языковой гимназии могут по выбору сдавать ЕГЭ по следующим предметам: обществознание, немецкий язык и английский язык. Каждый ученик должен выбрать не менее двух предметов из трех. В 2014 году ЕГЭ по немецкому языку сдавали 50% выпускников гимназии, по английскому 70% и по обществознанию 90%. Сколько процентов учеников сдавали ЕГЭ по всем трём предметам?

Ответ: 10%.

Решение. Пусть доля учеников, сдававших обществознание и английский равна x, обществознание и немецкий — y, английский и немецкий — z, все предметы — t. Тогда из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} y+z+t=0{,}5; \\ x+z+t=0{,}7; \\ x+y+t=0{,}9; \\ x+y+z+t=1. \end{cases}$$

Если из суммы первых трёх уравнений вычесть удвоенное четвёртое, получим $t=0{,}1$.

Оценивание. За верное решение — 12 баллов. Если система уравнений составлена верно, но не решена, 4 балла.

2. Вычислите произведение

$$(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)\ldots(1+\operatorname{tg}44^\circ).$$

Ответ: 2^{22}.

Первое решение. Заметим, что

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha))=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)=2.$$

Множители в вычисляемом произведении разбиваются на 22 такие пары.

Второе решение. Каждый множитель можно представить в виде

$$1+\operatorname{tg}n^\circ=\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}n^\circ=\frac{\sin(n^\circ+45^\circ)}{\cos 45^\circ\cos n^\circ}=\sqrt{2}\,\frac{\cos(45^\circ-n^\circ)}{\cos n^\circ}.$$

После перемножения всех 44 скобок косинусы сократятся.

Оценивание. За верное решение — 14 баллов.

3. Имеется три пары одинаковых перчаток. Из них случайно выбирают четыре перчатки. С какой вероятностью из них можно составить две пары перчаток?

Ответ: 0,6.

Решение. Четыре перчатки образуют две пары тогда и только тогда, когда пару образуют оставшиеся две перчатки. Поэтому подсчитаем вероятность составить пару для двух перчаток. После того, как одна перчатка выбраны, из пяти оставшихся три образуют с ней пару. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

Второе решение. Можно решить задачу и с помощью сочетаний:

$$P = \frac{C_3^2 \cdot C_3^2}{C_6^4} = \frac{9}{15} = 0{,}6.$$

Оценивание. За верное решение — 14 баллов.

4. Найдите все значения параметра a, при которых многочлен

$$P(x) = x^4 - 2(a+2)x^2 + (a-2)^2$$

можно представить в виде произведения двух многочленов второй степени с целыми коэффициентами.

Ответ: $a = n^2$ и $a = 2n^2$, где n — произвольное целое число.

Решение. Пусть $t = x^2$. Для квадратного трёхчлена $t^2 - 2(a+2)t + (a-2)^2$ имеем $D/4 = (a+2)^2 - (a-2)^2 = 8a$, корни этого трёхчлена (при $a \geqslant 0$) $(a+2) \pm \sqrt{8a}$. Поэтому

$$P(x) = (x^2 - (a+2) - \sqrt{8a})(x^2 - (a+2) + \sqrt{8a}). \qquad (1)$$

Разложение (1) непосредственно будет подходящим, если одновременно целыми будут числа $a \pm 2\sqrt{2a}$. Их сумма $2a \in \mathbb{Z}$. При этом $\sqrt{2a} \in \mathbb{Q}$. Значит, $2a = k^2$, где $k \in \mathbb{Z}$. Теперь видно, что a — целое, $k = 2n$ и $a = 2n^2$ для некоторого целого n.

Итак, при $a = 2n^2$ имеем разложение

$$P(x) = (x^2 - 2n^2 - 2 - 4n)(x^2 - 2n^2 - 2 + 4n). \qquad (2)$$

Но этим возможные значения a не исчерпываются!

Заметим, что от разложения (1) можно перейти к разложению на линейные множители. Действительно, $a+2\pm2\sqrt{2a} = (\sqrt{a}\pm\sqrt{2})^2$. Поэтому

$$P(x) = (x-\sqrt{a}-\sqrt{2})(x+\sqrt{a}+\sqrt{2})(x-\sqrt{a}+\sqrt{2})(x+\sqrt{a}-\sqrt{2}). \quad (3)$$

Существует три способа группировки линейных множителей по два. Один из них приводит к (2). Во втором имеем

$$(x-\sqrt{a}-\sqrt{2})(x+\sqrt{a}-\sqrt{2}) = (x-\sqrt{2})^2 - a = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - a,$$

и коэффициент при x не целый. Третий способ даёт разложение

$$P(x) = (x^2 - 2\sqrt{a}x + a - 2)(x^2 + 2\sqrt{a}x + a - 2).$$

Если $2\sqrt{a} = m \in \mathbb{Z}$, то $a = \frac{m^2}{4}$. Кроме того, свободный член трёхчленов $(a-2)$ — целое число. Значит, и a — целое число. Поэтому $m = 2n$ и $a = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Другой способ решения — метод неопределённых коэффициентов.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если найдена (из-за неполного перебора возможных вариантов) только одна из двух серий, 7 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 + y^2)(x - 2y + 2015) = 2xy.$$

Ответ: $(0;0), (-2015;0), (2014, 2014), (-672, 672)$.

Решение. Если $y = 0$, то $x^2(x + 2015) = 0$ и $x = 0$ или $x = -2015$. При $x = 0$ новых решений уравнения не обнаруживается. Пусть теперь $xy \neq 0$. Тогда и $x - 2y + 2015 \neq 0$. При этом

$$|(x^2 + y^2)(x - 2y + 15)| \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|,$$

а равенство возможно лишь при $|x| = |y|$ и $x - 2y + 2015 = \pm 1$, а именно:

- если $x = y$, то $x - 2y + 2015 = 1$, откуда $x = y = 2014$;
- если $x = -y$, то $x - 2y + 2015 = -1$, откуда $3x = -2016$, $x = -672$, $y = 672$.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если рассмотрен только случай $xy = 0$, 4 балла. Если не рассмотрен случай $xy = 0$, 11 баллов. Если доказано, что при $xy \neq 0$ $|x| = |y|$, но пропущен случай $x = -y$, минус 5 баллов.

6. На стороне AB треугольника ABC с тупым углом при вершине C взяли точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Докажите, что

$$2\angle NMK + \angle ACB = 180^\circ.$$

Решение. Точки K и N (середины чевиан) лежат на средней линии B_1A_1 (рис. 1). Пусть $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$, $\varepsilon = \angle KMN$. Заметим, что $c > a$ и $c > b$.

Нетрудно видеть, что $AQ = c - b$, $B_1K = \frac{c-b}{2}$; $BP = c - a$, $A_1N = \frac{c-a}{2}$, $A_1B_1 = \frac{c}{2}$.

Отсюда $B_1N = A_1B_1 - A_1N = \frac{a}{2}$. Но и $B_1M = \frac{a}{2}$ (длина средней линии). Значит, треугольник B_1MN — равнобедренный. Обозначим $x = \angle B_1NM$. Тогда $B_1MK = x - \varepsilon$.

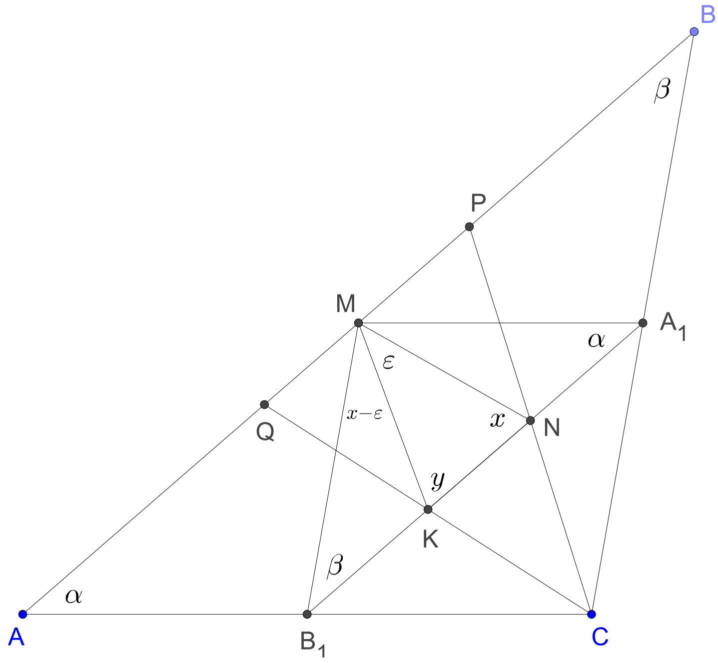


Рис. 1

Обозначим также $y = \angle MKA_1$ — внешний угол для треугольника B_1MK. Поскольку $\angle MB_1A_1 = \beta$, имеем $y = \beta + x - \varepsilon$. Аналогично получается $x = \alpha + y - \varepsilon$. Сложим данные равенства: $2\varepsilon = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Отсюда $2\varepsilon + \gamma = 180^\circ$. Это и требовалось доказать.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов.

7. По кругу записано 100 положительных чисел. Сумма любых двух соседних чисел равна квадрату числа, следующего за ними по часовой стрелке. Найдите все такие наборы чисел.

Ответ: сто двоек.

Решение. Пусть M — наибольшее из всех чисел, а перед ним стоят числа a и b. Тогда $a + b = M^2$, $a \leqslant M$, $b \leqslant M$, откуда $M^2 \leqslant 2M$ и $M \leqslant 2$ (учитываем, что $M > 0$).

Пусть m — наименьшее из всех чисел, а перед ним стоят числа c и d. Тогда $c + d = m^2$, $c \geqslant m$, $d \geqslant m$, откуда $m^2 \geqslant 2m$ и $m \geqslant 2$ (поскольку $m > 0$).

Итак, наибольшее число не больше 2, а наименьшее не меньше 2. Значит, все числа равны 2. С другой стороны, для 100 двоек выполнено условие задачи.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 5 баллов. Если показано, что все числа должны быть равны 2, но не отмечено, что 100 двоек действительно удовлетворяют условию задачи, 13 баллов.

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания

1 марта 2015 г.

11 класс

1. Выпускники 11 класса языковой гимназии могут по выбору сдавать ЕГЭ по следующим предметам: обществознание, немецкий язык и английский язык. Каждый ученик должен выбрать не менее двух предметов из трех. В 2014 году ЕГЭ по немецкому языку сдавали 50% выпускников гимназии, по английскому 70% и по обществознанию 90%. Сколько процентов учеников сдавали ЕГЭ по всем трём предметам?

Ответ: 10%.

Решение. Пусть доля учеников, сдававших обществознание и английский равна x, обществознание и немецкий — y, английский и немецкий — z, все предметы — t. Тогда из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} y+z+t=0{,}5; \\ x+z+t=0{,}7; \\ x+y+t=0{,}9; \\ x+y+z+t=1. \end{cases}$$

Если из суммы первых трёх уравнений вычесть удвоенное четвёртое, получим $t=0{,}1$.

Оценивание. За верное решение — 12 баллов. Если система уравнений составлена верно, но не решена, 4 балла.

2. Вычислите произведение

$$(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)\ldots(1+\operatorname{tg}44^\circ).$$

Ответ: 2^{22}.

Первое решение. Заметим, что

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha))=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)=2.$$

Множители в вычисляемом произведении разбиваются на 22 такие пары.

Второе решение.

$$\prod_{n=1}^{44}(1+\operatorname{tg}n^\circ)=\prod_{n=1}^{44}\frac{\cos n^\circ+\sin n^\circ}{\cos n^\circ}=\prod_{n=1}^{44}\frac{\cos n^\circ+\cos(90^\circ-n^\circ)}{\cos n^\circ}=$$

$$=\prod_{n=1}^{44}\frac{2\cos 45^\circ\cdot\cos(45^\circ-n)}{\cos n^\circ}=(\sqrt{2})^{44}\cdot\frac{\cos 44^\circ\cdot\cos 43^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 1^\circ}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 44^\circ}=2^{22}.$$

Третье решение. Каждый множитель можно представить в виде

$$1+\operatorname{tg} n^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} n^\circ = \frac{\sin(n^\circ+45^\circ)}{\cos 45^\circ \cos n^\circ} = \sqrt{2}\,\frac{\cos(45^\circ - n^\circ)}{\cos n^\circ}.$$

После перемножения всех 44 скобок косинусы сократятся.

Оценивание. За верное решение — 13 баллов.

3. Решите уравнение

$$\log_{20}\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right) = \log_{15}\left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right).$$

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Аргументы обоих логарифмов — положительные числа, а их произведение, как легко видеть, равно единице. Если аргументы отличны от 1, то один из них больше 1, а другой меньше 1, из-за чего левая и правая части уравнения будут разных знаков. Если же оба аргумента равны 1, то равенство будет выполняться. Значит, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = 1; \\ \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Система (1), в свою очередь, равносильна уравнению $\cos x = 1$.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 балла. Если задача сведена к системе (1), но та решена неверно (например, получен ответ $x = \pi k$), 8 баллов.

4. Найдите все значения параметра a, при которых многочлен

$$P(x) = x^4 - 2(a+2)x^2 + (a-2)^2$$

можно представить в виде произведения двух многочленов второй степени с целыми коэффициентами.

Ответ: $a = n^2$ и $a = 2n^2$, где n — произвольное целое число.

Решение. Пусть $t = x^2$. Для квадратного трёхчлена $t^2 - 2(a+2)t + (a-2)^2$ имеем $D/4 = (a+2)^2 - (a-2)^2 = 8a$, корни этого трёхчлена (при $a \geqslant 0$) $(a+2) \pm \sqrt{8a}$. Поэтому

$$P(x) = (x^2 - (a+2) - \sqrt{8a})(x^2 - (a+2) + \sqrt{8a}). \tag{1}$$

Разложение (1) непосредственно будет подходящим, если одновременно целыми будут числа $a \pm 2\sqrt{2a}$. Их сумма $2a \in \mathbb{Z}$. При этом $\sqrt{2a} \in \mathbb{Q}$. Значит, $2a = k^2$, где $k \in \mathbb{Z}$. Теперь видно, что a — целое, $k = 2n$ и $a = 2n^2$ для некоторого целого n.

Итак, при $a = 2n^2$ имеем разложение

$$P(x) = (x^2 - 2n^2 - 2 - 4n)(x^2 - 2n^2 - 2 + 4n). \qquad (2)$$

Но этим возможные значения a не исчерпываются!

Заметим, что от разложения (1) можно перейти к разложению на линейные множители. Действительно, $a+2\pm2\sqrt{2a} = (\sqrt{a}\pm\sqrt{2})^2$. Поэтому

$$P(x) = (x-\sqrt{a}-\sqrt{2})(x+\sqrt{a}+\sqrt{2})(x-\sqrt{a}+\sqrt{2})(x+\sqrt{a}-\sqrt{2}). \quad (3)$$

Существует три способа группировки линейных множителей по два. Один из них приводит к (2). Во втором имеем

$$(x - \sqrt{a} - \sqrt{2})(x + \sqrt{a} - \sqrt{2}) = (x - \sqrt{2})^2 - a = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - a,$$

и коэффициент при x не целый. Третий способ даёт разложение

$$P(x) = (x^2 - 2\sqrt{a}x + a - 2)(x^2 + 2\sqrt{a}x + a - 2).$$

Если $2\sqrt{a} = m \in \mathbb{Z}$, то $a = \frac{m^2}{4}$. Кроме того, свободный член трёхчленов $(a - 2)$ — целое число. Значит, и a — целое число. Поэтому $m = 2n$ и $a = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Другой способ решения — метод неопределённых коэффициентов.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если найдена (из-за неполного перебора возможных вариантов) только одна из двух серий, 7 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 + y^2)(x - 2y + 2015) = 2xy.$$

Ответ: $(0; 0), (-2015; 0), (2014, 2014), (-672, 672)$.

Решение. Если $y = 0$, то $x^2(x + 2015) = 0$ и $x = 0$ или $x = -2015$. При $x = 0$ новых решений уравнения не обнаруживается. Пусть теперь $xy \neq 0$. Тогда и $x - 2y + 2015 \neq 0$. При этом

$$|(x^2 + y^2)(x - 2y + 15)| \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|,$$

а равенство возможно лишь при $|x| = |y|$ и $x - 2y + 2015 = \pm1$, а именно:

- если $x = y$, то $x - 2y + 2015 = 1$, откуда $x = y = 2014$;
- если $x = -y$, то $x - 2y + 2015 = -1$, откуда $3x = -2016$, $x = -672$, $y = 672$.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если рассмотрен только случай $xy = 0$, 4 балла. Если не рассмотрен случай $xy = 0$, 11 баллов. Если доказано, что при $xy \neq 0$ $|x| = |y|$, но пропущен случай $x = -y$, минус 5 баллов.

6. На стороне AB треугольника ABC с тупым углом при вершине C взяли точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Докажите, что

$$2\angle NMK + \angle ACB = 180^\circ.$$

Решение. Точки K и N (середины чевиан) лежат на средней линии B_1A_1 (рис. 1). Пусть $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$, $\varepsilon = \angle KMN$. Заметим, что $c > a$ и $c > b$.

Нетрудно видеть, что $AQ = c - b$, $B_1K = \frac{c-b}{2}$; $BP = c - a$, $A_1N = \frac{c-a}{2}$, $A_1B_1 = \frac{c}{2}$.

Отсюда $B_1N = A_1B_1 - A_1N = \frac{a}{2}$. Но и $B_1M = \frac{a}{2}$ (длина средней линии). Значит, треугольник B_1MN — равнобедренный. Обозначим $x = \angle B_1NM$. Тогда $B_1MK = x - \varepsilon$.

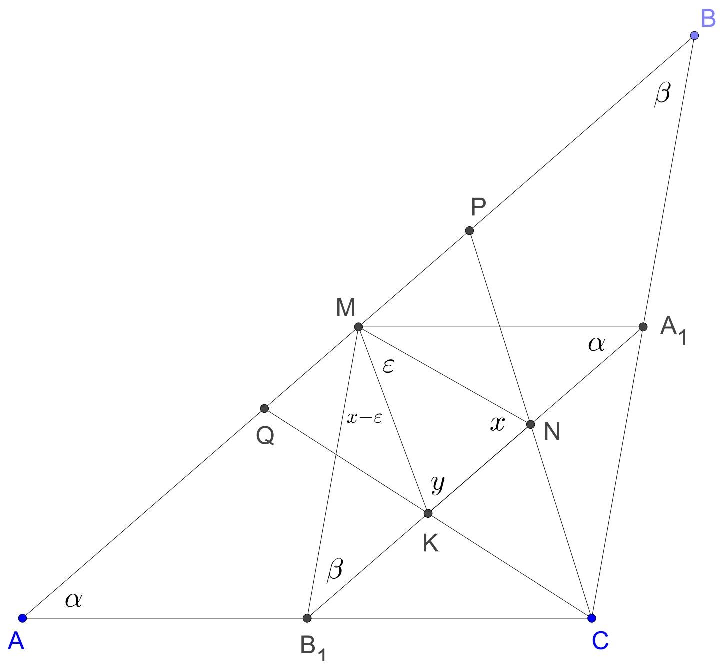


Рис. 1

Обозначим также $y = \angle MKA_1$ — внешний угол для треугольника B_1MK. Поскольку $\angle MB_1A_1 = \beta$, имеем

$$y = \beta + x - \varepsilon.$$

Аналогично получается

$$x = \alpha + y - \varepsilon.$$

Сложим данные равенства: $2\varepsilon = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Отсюда $2\varepsilon + \gamma = 180^\circ$. Это и требовалось доказать.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов.

7. По кругу записано 100 положительных чисел. Сумма любых двух соседних чисел равна квадрату числа, следующего за ними по часовой стрелке. Найдите все такие наборы чисел.

Ответ: сто двоек.

Решение. Пусть M — наибольшее из всех чисел, а перед ним стоят числа a и b. Тогда $a + b = M^2$, $a \leqslant M$, $b \leqslant M$, откуда $M^2 \leqslant 2M$ и $M \leqslant 2$ (учитываем, что $M > 0$).

Пусть m — наименьшее из всех чисел, а перед ним стоят числа c и d. Тогда $c+d = m^2$, $c \geqslant m$, $d \geqslant m$, откуда $m^2 \geqslant 2m$ и $m \geqslant 2$ (поскольку $m > 0$).

Итак, наибольшее число не больше 2, а наименьшее не меньше 2. Значит, все числа равны 2. С другой стороны, для 100 двоек выполнено условие задачи.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 5 баллов. Если показано, что все числа должны быть равны 2, но не отмечено, что 100 двоек действительно удовлетворяют условию задачи, 13 баллов.