



1. (17 баллов) Решите уравнение $12x = \sqrt{36 + x^2}(6 + x - \sqrt{36 + x^2})$.

Ответ: $-6; 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x^2 + 12x + 36 = \sqrt{36 + x^2}(6 + x)$.

После выделения полного квадрата и разложения на множители получаем

уравнение $(x + 6)(x + 6 - \sqrt{36 + x^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = 0, \\ x + 6 = \sqrt{36 + x^2}. \end{cases}$ Решая

полученные уравнения, находим: $x = -6, x = 0$.

2. (16 баллов) Из посёлка Мирный выехал грузовик со скоростью 40 км/ч. Одновременно с ним из города Тихий в том же направлении, что и грузовик, выехал легковой автомобиль. В первый час пути автомобиль прошёл 50 км, а в каждый следующий час проходил на 5 км больше, чем в предыдущий. Через сколько часов легковой автомобиль догонит грузовой, если расстояние между посёлком и городом равно 135 км?

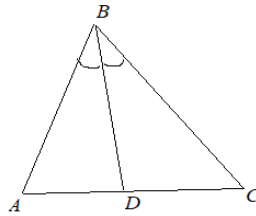
Ответ: 6.

Решение. В первый час пути скорость преследования легковым автомобилем грузовика составила $50 - 40 = 10$ км/ч. В каждый следующий час скорость преследования увеличивается на 5 км/ч. Таким образом, скорости преследования образуют арифметическую прогрессию 10, 15, 20... км/ч. Найдём количество n часов до встречи автомобилей. Сумма полученной прогрессии равна суммарному расстоянию, которое проедет легковой автомобиль до встречи с грузовиком $\frac{20 + 5(n-1)}{2} \cdot n = 135$. После преобразования получаем уравнение $n^2 + 3n - 54 = 0$, корни которого 6, -9 .

3. (17 баллов) В треугольнике ABC $AB=4$, $BC=6$, угол ABC равен 30° , BD – биссектриса треугольника ABC . Найдите площадь треугольника ABD .

Ответ: 2,4.

Решение. По свойству биссектрисы $AD:DC=4:6=2:3$. Следовательно, $AD = \frac{2}{5} \cdot AC$. Площадь $S_{ABD} = \frac{2}{5} S_{ABC}$, так как треугольники ABC и ABD имеют общую высоту.



В итоге получаем $S_{ABD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 2,4$ кв. ед.

4. (15 баллов) Два нагревателя подключают поочерёдно к одному и тому же источнику постоянного тока. От первого нагревателя вода в кастрюле закипела через $t_1=120$ с. От второго нагревателя та же самая вода, взятая при той же начальной температуре, закипела через $t_2=180$ с. За какое время закипела бы эта вода, если нагреватели подключить параллельно друг другу? Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

Ответ: 72 с.

Решение. Количество тепла, необходимое для нагрева в первом случае $Q = I^2 R_1 t_1$. Количество тепла, необходимое для нагрева во втором случае $Q = I^2 R_2 t_2$. Количество тепла, необходимое для нагрева в случае параллельного соединения $Q = I^2 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} t$. В результате получаем

$$t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{120 \cdot 180}{120 + 180} = 72 \text{ с.}$$

5. (20 баллов) Автомобиль тормозит до полной остановки. Известно, что скорость на середине пути была равна 40 км/ч. Определите его начальную скорость.

Ответ: 56,6 км/ч.

Решение. Уравнения движения для каждой из половин тормозного пути $\frac{s}{2} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$, и $\frac{s}{2} = \frac{v^2 - 0^2}{2a}$. Получаем $v_0 = \sqrt{2}v = 56,6$ км/ч.

6. (15 баллов) Три материальные точки массами $m_1=100$ г, $m_2=200$ г и $m_3=400$ г расположены последовательно на одной прямой. Расстояние между точками 1 и 2 равно 50 см. Расстояние между точками 2 и 3 равно 200 см. Определите, на каком расстоянии от точки 1 располагается центр масс этой системы из трёх точек.

Ответ: 1,57 м.

Решение. По определению центра масс $x_{\text{центра}} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0,5 + m_3 \cdot 2,5}{m_1 + m_2 + m_3} = 1,57$ м.



Задания, ответы и критерии оценивания

1. (17 баллов) Решите уравнение $10x = \sqrt{25 + x^2}(5 + x - \sqrt{25 + x^2})$.

Ответ: $-5; 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x^2 + 10x + 25 = \sqrt{25 + x^2}(5 + x)$.

После выделения полного квадрата и разложения на множители получаем

уравнение $(x + 5)(x + 5 - \sqrt{25 + x^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0, \\ x + 5 = \sqrt{25 + x^2}. \end{cases}$ Решая

полученные уравнения, находим: $x = -5, x = 0$.

2. (16 баллов) Из посёлка Мирный выехал грузовик со скоростью 40 км/ч. Одновременно с ним из города Тихий в том же направлении, что и грузовик, выехал легковой автомобиль. В первый час пути автомобиль прошёл 50 км, а в каждый следующий час проходил на 5 км больше, чем в предыдущий. Через сколько часов легковой автомобиль догонит грузовой, если расстояние между посёлком и городом равно 175 км?

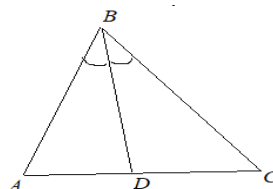
Ответ: 7.

Решение. В первый час пути скорость преследования легковым автомобилем грузовика составила $50 - 40 = 10$ км/ч. В каждый следующий час скорость преследования увеличивается на 5 км/ч. Таким образом, скорости преследования образуют арифметическую прогрессию 10, 15, 20... км/ч. Найдём количество n часов до встречи автомобилей. Сумма полученной прогрессии равна суммарному расстоянию, которое проедет легковой автомобиль до встречи с грузовиком $\frac{20 + 5(n-1)}{2} \cdot n = 175$. После преобразования получаем уравнение $n^2 + 3n - 70 = 0$, корни которого 7, -10.

3. (17 баллов) В треугольнике ABC $AB=6$, $BC=9$, угол ABC равен 30° , BD – биссектриса треугольника ABC . Найдите площадь треугольника ABD .

Ответ: 5,4.

Решение. По свойству биссектрисы $AD:DC=6:9=2:3$. Следовательно, $AD = \frac{2}{5} \cdot AC$. Площадь $S_{ABD} = \frac{2}{5} S_{ABC}$, так как треугольники ABC и ABD имеют общую высоту.



В итоге получаем $S_{ABD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{5} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 5,4$ кв. ед.

4. (15 баллов) Два нагревателя подключают поочерёдно к одному и тому же источнику постоянного тока. От первого нагревателя вода в кастрюле закипела через $t_1=3$ мин. От второго нагревателя та же самая вода, взятая при той же начальной температуре, закипела через $t_2=6$ мин. За какое время закипела бы эта вода, если нагреватели подключить параллельно друг другу? Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.

Ответ: 2 мин.

Решение. Количество тепла, необходимое для нагрева в первом случае $Q = I^2 R_1 t_1$. Количество тепла, необходимое для нагрева во втором случае $Q = I^2 R_2 t_2$. Количество тепла, необходимое для нагрева в случае параллельного соединения $Q = I^2 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} t$. В результате получаем:

$$t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ мин.}$$

5. (20 баллов) Автомобиль тормозит до полной остановки. Известно, что скорость на середине пути была равна 100 км/ч. Определите его начальную скорость.

Ответ: 141,1 км/ч.

Решение. Уравнения движения для каждой из половин тормозного пути:

$$\frac{s}{2} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}, \text{ и } \frac{s}{2} = \frac{v^2 - 0^2}{2a}. \text{ Получаем } v_0 = \sqrt{2}v = 141,4 \text{ км/ч.}$$

6. (15 баллов) Три материальные точки массами $m_1=2$ кг, $m_2=3$ кг и $m_3=4$ кг расположены последовательно на одной прямой. Расстояние между точками 1 и 2 равно 25 см. Расстояние между точками 2 и 3 равно 75 см. Определите, на каком расстоянии от точки 1 располагается центр масс этой системы из трёх точек.

Ответ: 52,8 см.

Решение. По определению центра масс $x_{\text{центра}} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 25 + m_3 \cdot 100}{m_1 + m_2 + m_3} = 52,8$ см.