11 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

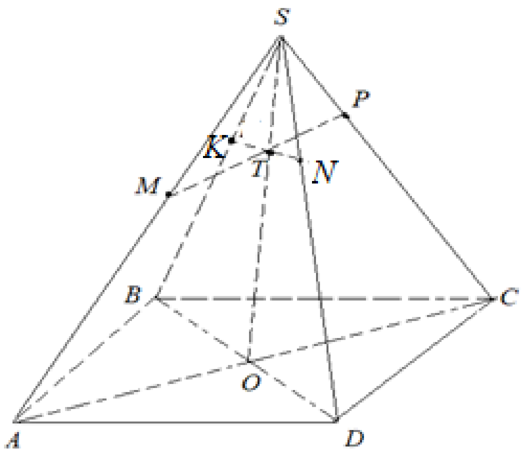
Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

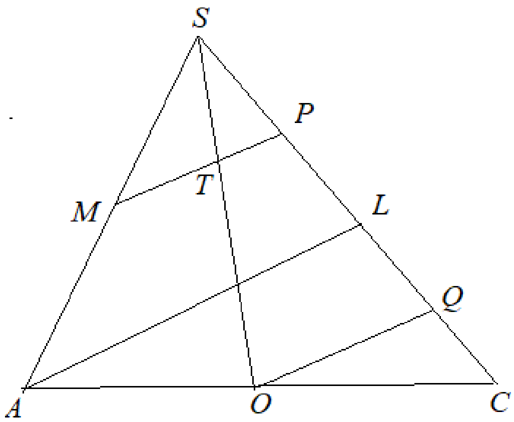
1. (*12 баллов*) Параллелограмм *ABCD* является основанием пирамиды *SABCD*. Точки *M*, *N* и *P* лежат на рёбрах *SA*, *SD* и *SC* соответственно, причём *SM*:*MA*=1:2, *SN*:*ND*=1:3, *SP*:*PC*=1:4. В каком отношении плоскость *MNP* делит ребро *SB*?

Ответ: 1:3.

Решение. Пусть плоскости *BSD* и *ASC* пересекаются по прямой *SO*. Рассмотрим треугольник *ASC*. Пусть $T = MP \cap SO$.



В треугольнике *ASC* проведём прямые *AL* и *OQ* параллельные *MP*.



По теореме Фалеса имеем $\frac{SP}{PL} = \frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{LQ}{QC} = \frac{AO}{OC} = 1$. Учитывая, что *SP*:*PC*=1:4, получаем, что $\frac{ST}{TO} = \frac{1}{3}$.

Пусть $K = NT \cap SB$. Так как *SN*:*ND*=*ST*:*TO*=1:3, то в силу теоремы Фалеса прямые *BD* и *NK* параллельны, и, следовательно, *SK*:*KB*=1:3.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 11 баллов. Имеются арифметические ошибки – минус 2 балла.

2. (*12 баллов*) Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2(xy)} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{\log_3 y \cdot \log_{25} z}{\log_5(yz)} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{\log_{27} z \cdot \log_2 x}{\log_{16}(zx)} = 1. \end{cases}$$

Ответ: x=3, y=9, z=27.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0,\ y > 0,\ z > 0, \\ xy \neq 1, yz \neq 1, zx \neq 1. \end{cases}$ Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} 3\log_3 x \cdot \log_2 y = 2\log_2(xy), \\ 5\log_3 y \cdot \log_5 z = 6\log_5(yz), \\ 4\log_3 z \cdot \log_2 x = 3\log_2(zx). \end{cases} \qquad (1)$$

Сделаем замену: $\begin{cases} \log_3 x = u, \\ \log_3 y = v, \\ \log_3 z = t. \end{cases}$ После преобразований получаем систему $\begin{cases} 3u \cdot v = 2(u+v), \\ 5v \cdot t = 6(v+t), \\ 4t \cdot u = 3(u+t). \end{cases}$ (2). Из первого уравнения системы (2) выразим $v = \frac{2u}{3u-2}$, из третьего уравнения выразим $t = \frac{3u}{4u-3}$. Подставим во второе уравнение системы, получим после преобразований уравнение $u^2 - u = 0$. При u=0 получаем v=t=0, но соответствующие значения x, y, z не удовлетворяют ОДЗ. При u=1 получаем v=2, t=3, следовательно, x=3, y=9, z=27.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Получена система (1) и записано ОДЗ – 2 балла, сделана замена и получена система (2) рациональных уравнений + 5 баллов. Правильно решена система (2) + 4 балла. При правильном ходе решения допущены арифметические ошибки минус 3 балла. Получены посторонние решения (не проверено ОДЗ) ставим 6 баллов.

3. (*13 баллов*) Даны числа x, y, z такие, что $4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16$. Докажите, что $2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq 28$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a} = (2^x; \sin^2 y; \ln^3 z)$ и $\vec{b} = (2; 3; -6)$. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Имеем $|\vec{b}| = \sqrt{4+9+36} = 7$, $|\vec{a}| = \sqrt{4^x + \sin^4 y + \ln^6 z} = 4$. Тогда получаем, что $2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq 28$. Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Обоснованное доказательство – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Дана последовательность:

$$a_1 = \cos 10°,\ a_2 = \cos 100°, \ldots, a_n = \cos(10^n)°, \ldots.$$

Найдите наименьшее значение выражения

$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x, \text{ где } x \in R.$$

Ответ: -1.

Решение. Покажем, что $a_3 = a_4 = \cdots = a_n$. Если $n \geq 3$, то углы соседних членов последовательности будут отличаться на величину кратную 360°, действительно:

$$10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10-1) = 9 \cdot 1000 \cdot 10^{n-3} = 360 \cdot 25 \cdot 10^{n-3}.$$

Таким образом, $a_{2023} = a_{2024} = a_3 = \cos 1000°$. Далее получаем

$$a_2 + a_{2023} + a_{2024} = \cos 100° + 2\cos 1000° = \cos 100° + 2\cos(360° \cdot 3 - 80) =$$

$= \cos(90° + 10°) + 2\cos 80° = -\sin 10° + 2\sin 10° = \sin 10°$. Тогда

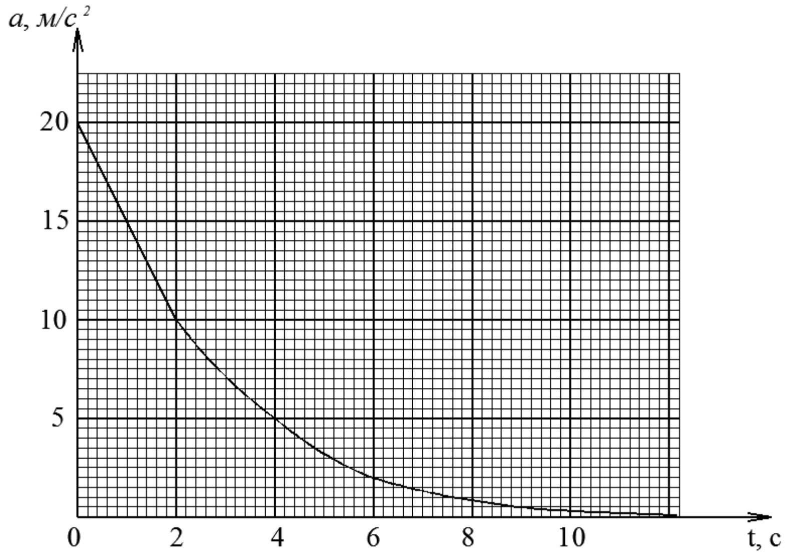
$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x = \cos 10° \cdot \cos x + \sin 10° \cdot \sin x =$$

$= \cos(x - 10°)$. Наименьшее значение равно -1.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов. Доказано, что все члены последовательности равны, начиная с третьего, ставим 6 баллов. Правильно найдено $a_2 + a_{2023} + a_{2024}$ ещё 4 балла. Имеются арифметические ошибки – минус 3 балла.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (15 баллов) Тело бросают с высокорасположенного балкона вертикально вверх. Зависимость модуля ускорения тела от времени приведена на графике. Пользуясь данной зависимостью, оцените начальную скорость тела. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ответ: 30 м/с.

Решение. График выглядит таким образом из-за наличия силы сопротивления воздуха, действующей на мяч. **(4 балла)**

В момент времени $t = 2$ с ускорение равно ускорению свободного падения. Следовательно, в этот момент времени мяч находился в самой верхней точке своей траектории и его скорость $v = 0$ м/с. **(4 балла)**

Изменение скорости равно площади под графиком. **(4 балла)**

Оценка площади даёт следующий результат: $v_0 = 30$ м/с. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Два маленьких одноименно заряженных шарика удерживают на расстоянии L друг от друга. Заряды шариков q_1 и q_2, их массы m_1 и m_2 соответственно. В определённый момент времени шарики отпускают. Определите их скорости через достаточно продолжительный промежуток времени. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$, $\quad v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$.

Решение. Закон сохранения импульса: $0 = m_1v_1 - m_2v_2$. **(3 балла)**

Закон сохранения энергии: $k\frac{q_1q_2}{L} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$. **(3 балла)**

Решая данную систему, получаем: $v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$, **(2 балла)**

$v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$. **(2 балла)**

7. (*10 баллов*) Одиннадцатиклассник Петя выполнял эксперимент с водяным паром. Он взял пар при температуре T=100°С, поместил его в вертикальный цилиндрический сосуд под невесомый поршень. Поршень Петя установил на высоте h_0=30 см от дна сосуда и отпустил. После установления равновесия поршень оказался на высоте h=10 см, при этом давление пара выросло в 2 раза. Определите массу пара, которую Петя взял для работы. Площадь дна сосуда S=100 см^2.

Ответ: 0,048 кг.

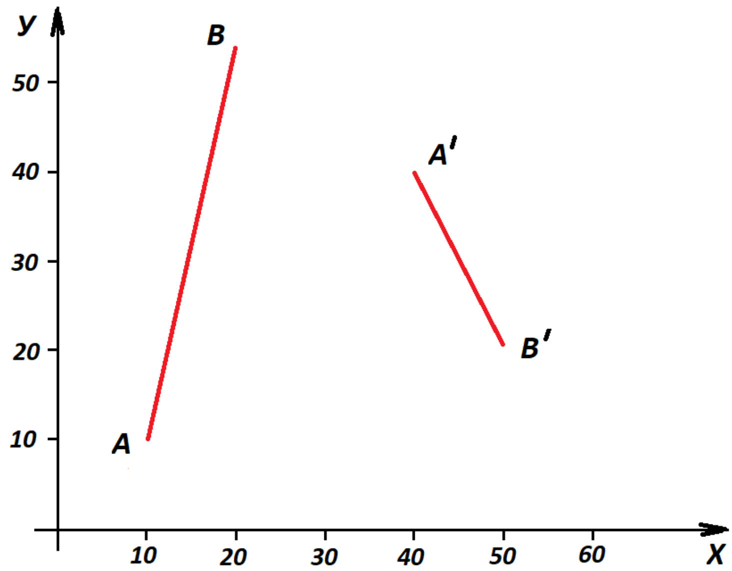
Решение. Давление пара, после установления равновесия при температуре T=100°С, равно атмосферному. **(2 балла)**

Следовательно, пар стал насыщенным. **(2 балла)**

Исходное давление пара: $p = 5 \cdot 10^4$ Па. **(2 балла)**

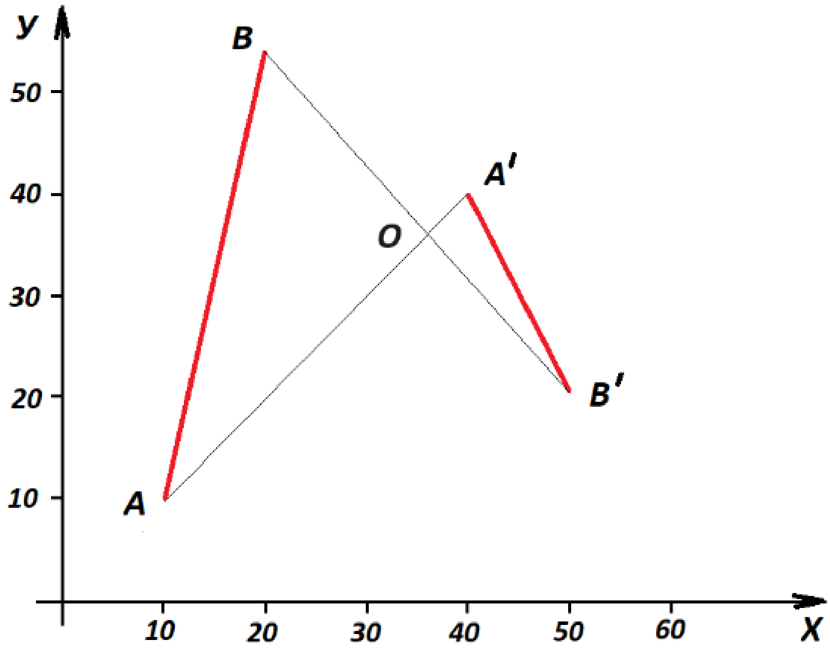
Масса пара: $m = \frac{pVM}{RT} = \frac{pSh_0}{RT} = \frac{5\cdot10^4\cdot100\cdot10^{-4}\cdot0{,}3}{8{,}31\cdot373} = 0{,}048$ кг. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показано местоположение предмета AB и его изображения $A^I B^I$, полученного с помощью тонкой линзы. С помощью циркуля и линейки восстановите положение линзы, определите координаты её оптического центра и фокусов. Словами опишите последовательность действий, приводящую к ответу.

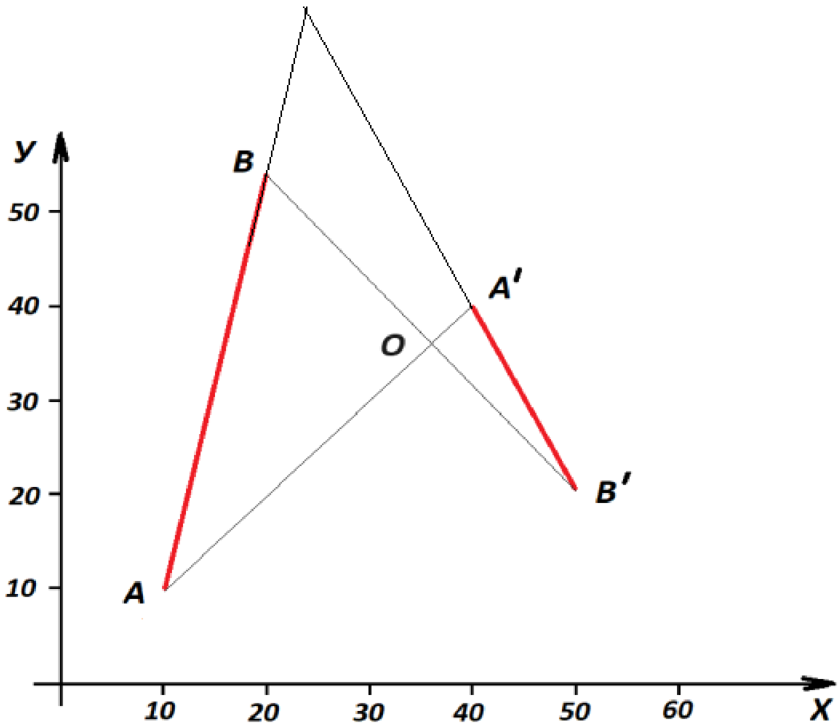


Ответ: Оптический центр – (36; 36); фокусы – (32; 34) и (40; 38).

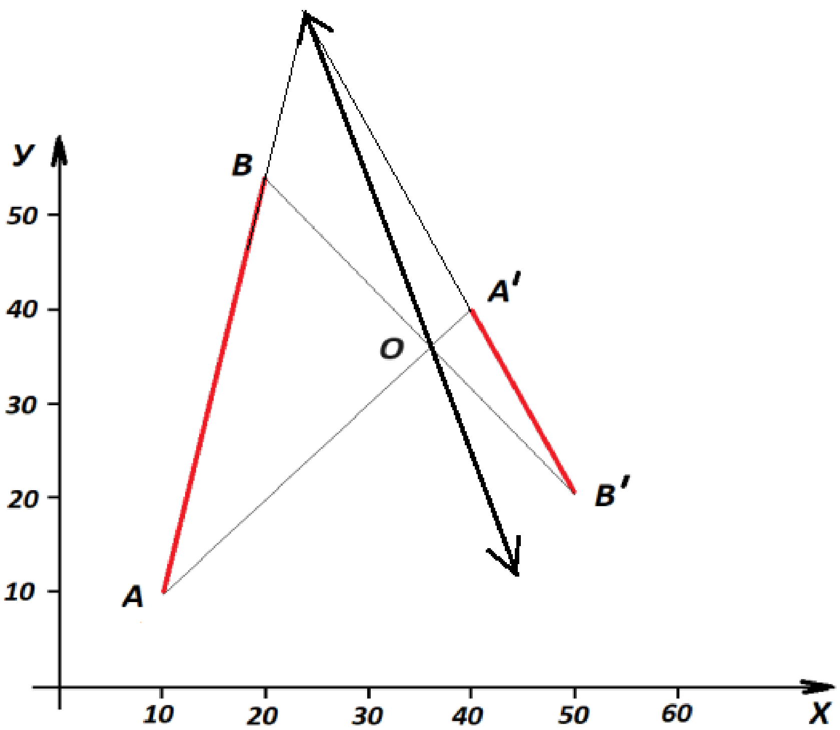
Решение: Соединяем A и $A^/$, а также B и $B^/$.



Точка пересечения даёт оптический центр. Его координаты (36; 36). **(4 балла)**
Продолжаем AB и $A^/B^/$.

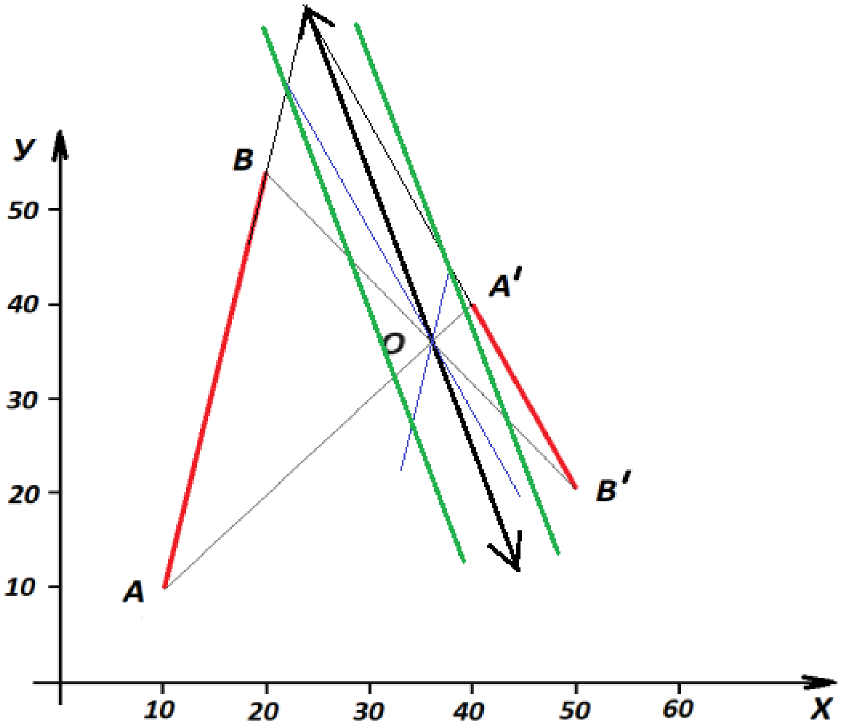


Точка пересечения дает вторую точку линзы. **(3 балла)**



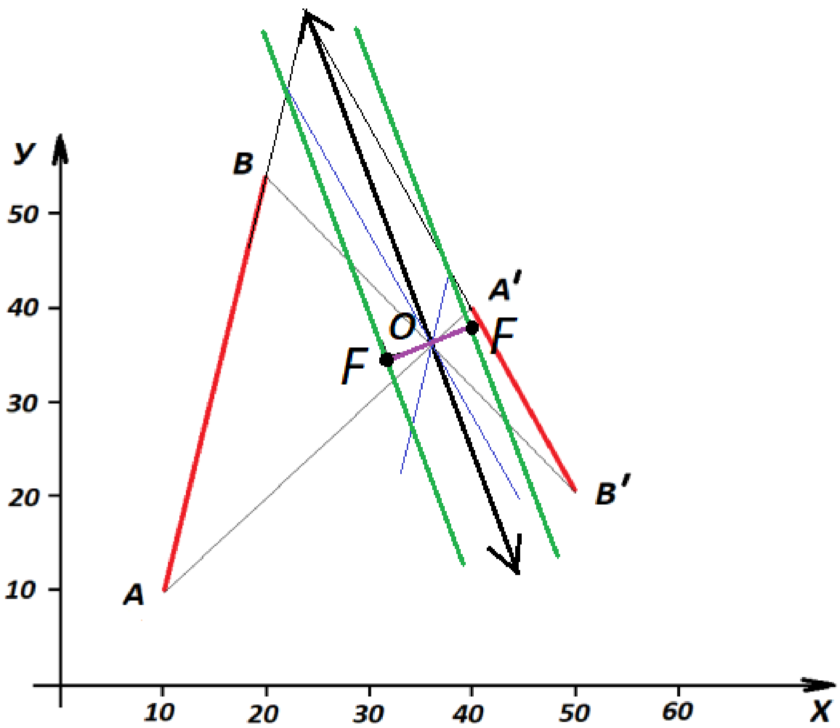
Через оптический центр проводим прямые параллельные AB и $A'B'$. Их пересечения с лучами $A'B'$ и AB дают положения фокальных плоскостей (на рисунке зеленым цветом).

(4 балла)



Из оптического центра опускаем перпендикуляры на фокальные плоскости. Получаем местоположение главных фокусов (32; 34) и (40; 38).

(4 балла)



<u>Примечание:</u> если приведены правильные рассуждения, но ответ отличается от авторского в пределах разумной погрешности, то работа оценивается полным баллом.

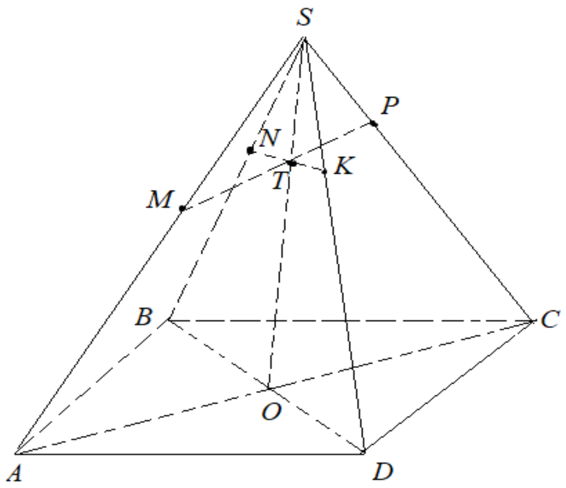
Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

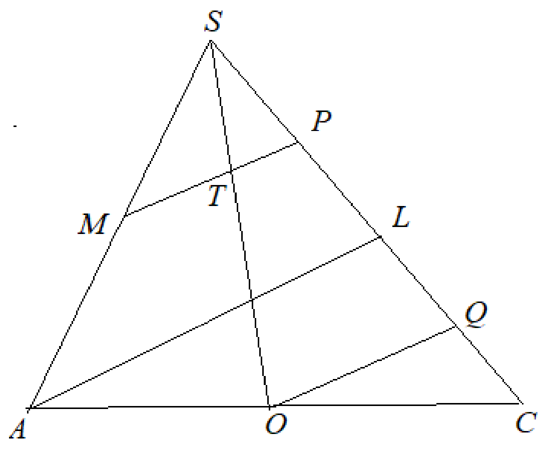
1. (*11 баллов*) Параллелограмм *ABCD* является основанием пирамиды *SABCD*. Точки *M*, *N* и *P* лежат на рёбрах *SA*, *SB* и *SC* соответственно, причём *SM*:*MA*=1:2, *SN*:*NB*=1:3, *SP*:*PC*=1:4. В каком отношении плоскость *MNP* делит ребро *SD*?

Ответ: 1:3.

Решение. Пусть плоскости *BSD* и *ASC* пересекаются по прямой *SO*. Рассмотрим треугольник *ASC*. Пусть $T = MP \cap SO$.



В треугольнике *ASC* проведём прямые *AL* и *OQ* параллельные *MP*.



По теореме Фалеса имеем $\frac{SP}{PL} = \frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{LQ}{QC} = \frac{AO}{OC} = 1.$ Учитывая, что *SP*:*PC*=1:4, получаем, что $\frac{ST}{TO} = \frac{1}{3}$.

Пусть $K = NT \cap SD$. Так как *SN*:*NB*=*ST*:*TO*=1:3, то в силу теоремы Фалеса прямые *BD* и *NK* параллельны, и, следовательно, *SK*:*KD*=1:3.

2. (*12 баллов*) Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{25}x \cdot \log_3 y}{\log_{27}(xy)} = 1, \\ \dfrac{\log_5 y \cdot \log_{49} z}{\log_7(yz)} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{\log_{125}z \cdot \log_3 x}{\log_{81}(zx)} = 1. \end{cases}$$

Ответ: x=5, y=25, z=125.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0,\ y > 0,\ z > 0, \\ xy \neq 1, yz \neq 1, zx \neq 1. \end{cases}$ Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} 3\log_5 x \cdot \log_3 y = 2\log_3(xy), \\ 5\log_5 y \cdot \log_7 z = 6\log_7(yz), \\ 4\log_5 z \cdot \log_3 x = 3\log_3(zx). \end{cases} \qquad (1)$$

Сделаем замену: $\begin{cases} \log_5 x = u, \\ \log_5 y = v, \\ \log_5 z = t. \end{cases}$ После преобразований получаем систему $\begin{cases} 3u \cdot v = 2(u+v), \\ 5v \cdot t = 6(v+t), \\ 4t \cdot u = 3(u+t). \end{cases}$ (2). Из первого уравнения системы (2) выразим $v = \frac{2u}{3u-2}$, из третьего уравнения выразим $t = \frac{3u}{4u-3}$. Подставим во второе уравнение системы, получим после преобразований уравнение $u^2 - u = 0$. При u=0 получаем v=t=0, но соответствующие значения x, y, z не удовлетворяют ОДЗ. При u=1 получаем v=2, t=3, следовательно, x=5, y=25, z=125.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Получена система (1) и записано ОДЗ – 2 балла, сделана замена и получена система (2) рациональных уравнений + 5 баллов. Правильно решена система (2) + 4 балла. При правильном ходе решения допущены арифметические ошибки минус 3 балла. Получены посторонние решения (не проверено ОДЗ) ставим 6 баллов.

3. (*13 баллов*) Даны числа x, y, z такие, что $4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 25$. Докажите, что $2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 45$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a} = (2^x; \sin^2 y; \ln^3 z)$ и $\vec{b} = (1; -4; 8)$. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Имеем $|\vec{b}| = \sqrt{1+16+64} = 9$, $|\vec{a}| = \sqrt{4^x + \sin^4 y + \ln^6 z} = 5$. Тогда получаем, что $2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 45$. Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Обоснованное доказательство – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Дана последовательность:

$$a_1 = \cos 10°, a_2 = \cos 100°, \ldots, a_n = \cos(10^n)°, \ldots.$$

Найдите наибольшее значение выражения

$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x, \text{ где } x \in R.$$

Ответ: 1.

Решение. Покажем, что $a_3 = a_4 = \cdots = a_n$. Если $n \geq 3$, то углы соседних членов последовательности будут отличаться на величину кратную $360°$, действительно:

$10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10 - 1) = 9 \cdot 1000 \cdot 10^{n-3} = 360 \cdot 25 \cdot 10^{n-3}$.

Таким образом, $a_{2023} = a_{2024} = a_3 = \cos 1000°$. Далее получаем

$$a_2 + a_{2023} + a_{2024} = \cos 100° + 2\cos 1000° = \cos 100° + 2\cos(360° \cdot 3 - 80) =$$

$= \cos(90° + 10°) + 2\cos 80° = -\sin 10° + 2\sin 10° = \sin 10°$. Тогда

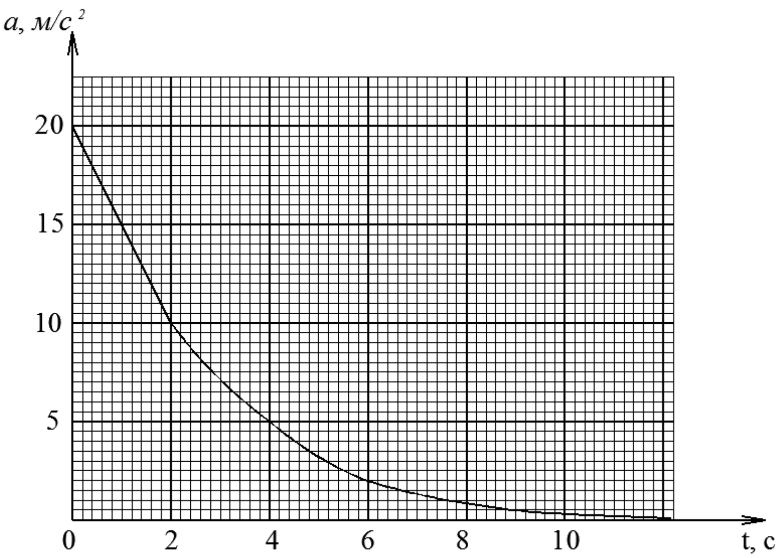
$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x = \cos 10° \cdot \cos x + \sin 10° \cdot \sin x =$$

$= \cos(x - 10°)$. Наибольшее значение равно 1.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов. Доказано, что все члены последовательности равны, начиная с третьего, ставим 6 баллов. Правильно найдено $a_2 + a_{2023} + a_{2024}$ ещё 4 балла. Имеются арифметические ошибки – минус 3 балла.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*15 баллов*) Тело бросают с высокорасположенного балкона вертикально вверх. Зависимость модуля ускорения тела от времени приведена на графике. Пользуясь данной зависимостью, оцените установившуюся скорость тела. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ответ: 25 м/с.

Решение. График выглядит таким образом из-за наличия силы сопротивления воздуха, действующей на мяч. **(4 балла)**

В момент времени $t = 2\,c$ ускорение равно ускорению свободного падения. Следовательно, в этот момент времени мяч находился в самой верхней точке своей траектории и его скорость $v = 0$ м/с. **(4 балла)**

Изменение скорости равно площади под графиком. **(4 балла)**

Оценка площади даёт следующий результат: $v_{\text{уст}} = 25$ м/с **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Два маленьких одноименно заряженных шарика удерживают на расстоянии L друг от друга. Заряды шариков q_1 и q_2, их массы m_1 и m_2 соответственно. В определённый момент времени шарики отпускают. Определите их скорости через достаточно продолжительный промежуток времени. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$.

Решение. Закон сохранения импульса: $0 = m_1v_1 - m_2v_2$. **(3 балла)**

Закон сохранения энергии: $k\frac{q_1q_2}{L} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$. **(3 балла)**

Решая данную систему, получаем:

$v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$, **(2 балла)**

$v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$. **(2 балла)**

7. (*10 баллов*) Одиннадцатиклассник Петя выполнял эксперимент с водяным паром. Он взял пар при температуре T=100°С, поместил его в вертикальный цилиндрический сосуд под невесомый поршень. Поршень Петя установил на высоте h_0=60 см от дна сосуда и отпустил. После установления равновесия поршень оказался на высоте h=15 см, при этом давление пара выросло в 2 раза. Определите массу пара, которую Петя взял для работы. Площадь дна сосуда S=500 см^2.

Ответ: 0,484 кг.

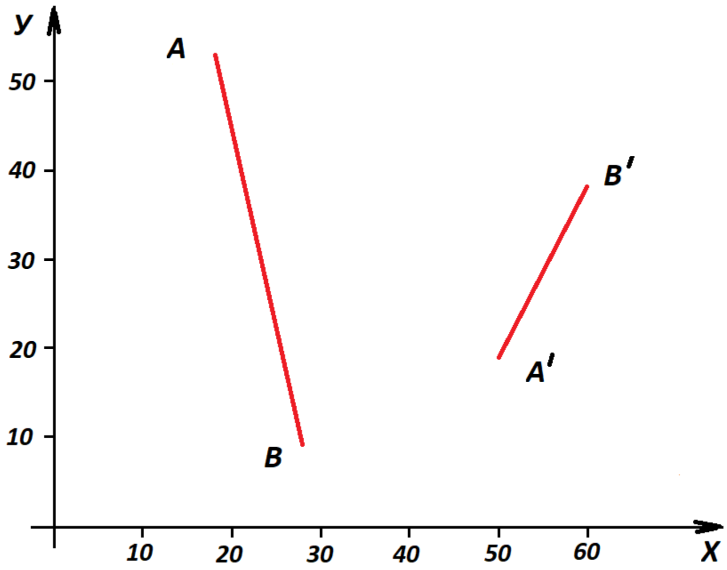
Решение. Давление пара, после установления равновесия при температуре T=100°С, равно атмосферному. **(2 балла)**

Следовательно, пар стал насыщенным. **(2 балла)**

Исходное давление пара: $p = 5\cdot10^4$ Па. **(2 балла)**

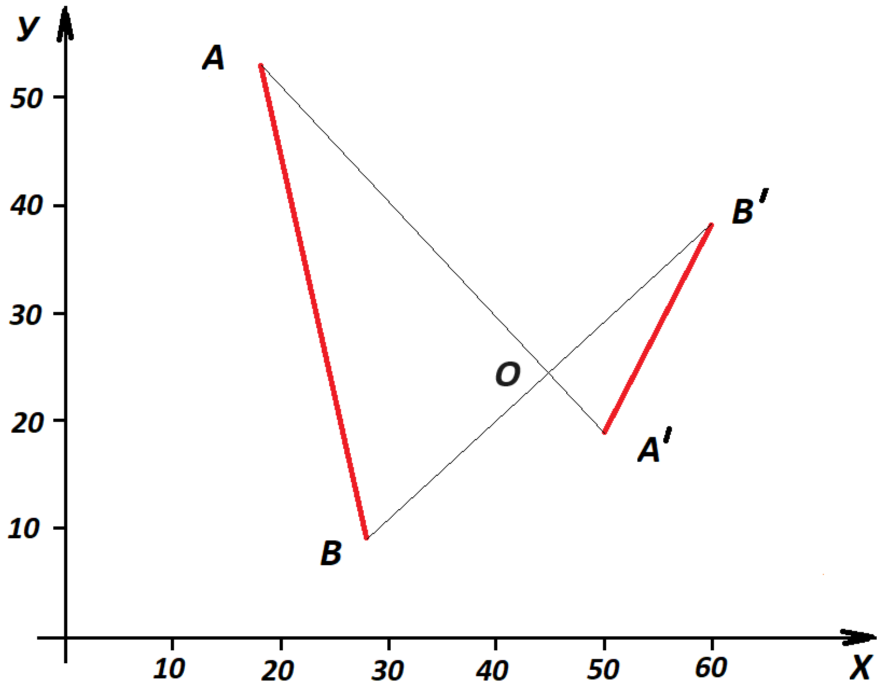
Масса пара: $m = \frac{pVM}{RT} = \frac{pSh_0}{RT} = \frac{5\cdot10^4\cdot500\cdot10^{-4}\cdot0{,}6}{8{,}31\cdot373} = 0{,}484$ кг. **(4 балла)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показано местоположение предмета *AB* и его изображения $A^I B^I$, полученного с помощью тонкой линзы. С помощью циркуля и линейки восстановите положение линзы, определите координаты её оптического центра и фокусов. Словами опишите последовательность действий, приводящую к ответу.



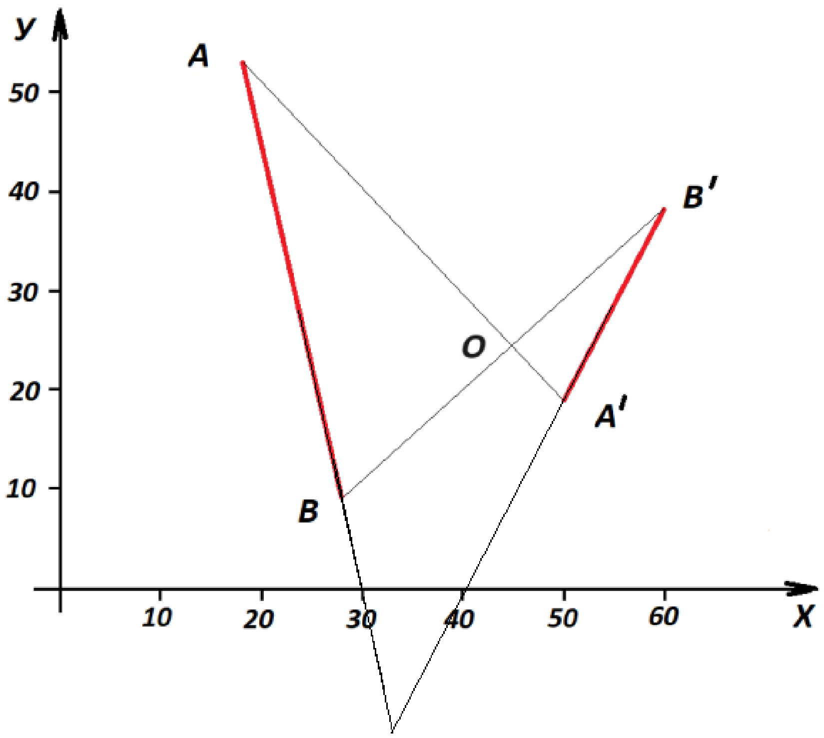
Ответ: оптический центр – (45; 25); фокусы – (38; 26) и (50; 23).

Решение. Соединяем A и $A^/$, а также B и $B^/$.

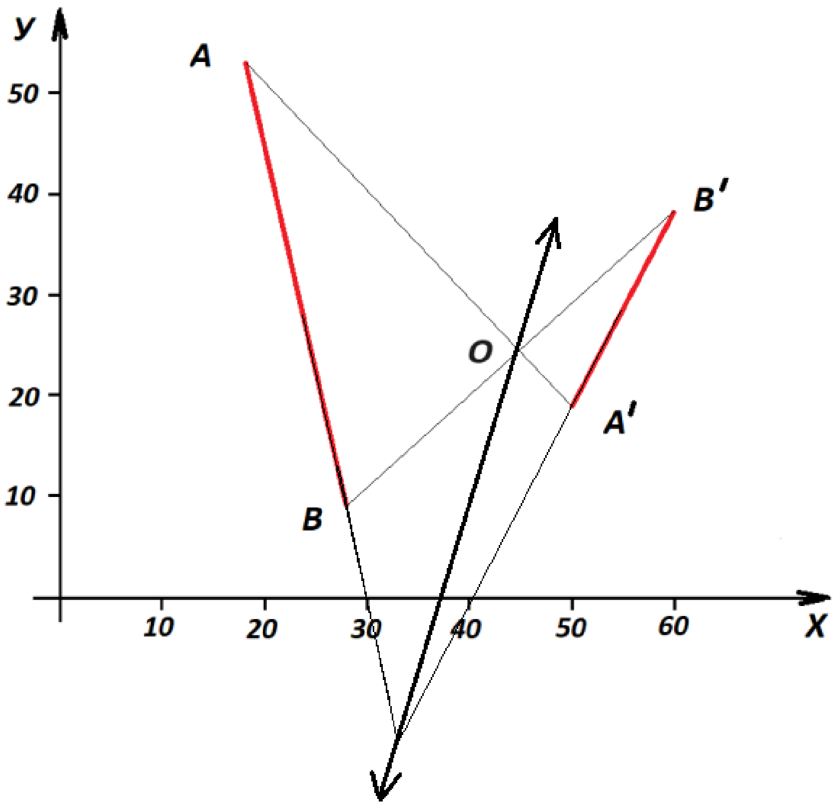


Точка пересечения даёт оптический центр. Его координаты (45; 25). **(4 балла)**

Продолжаем AB и $A^/B^/$.

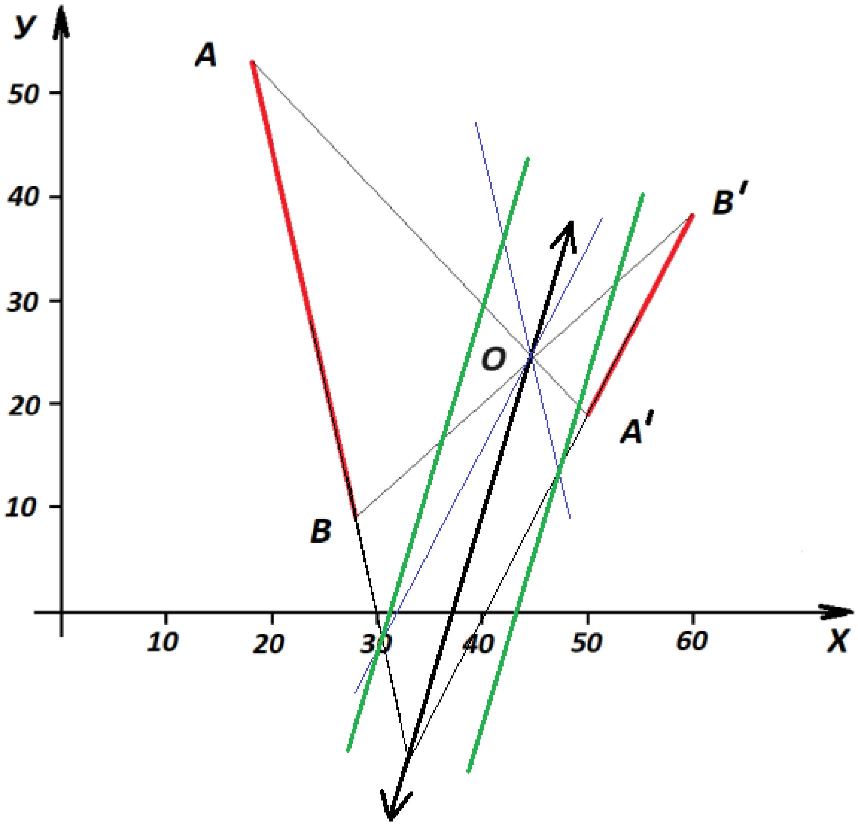


Точка пересечения даёт вторую точку линзы. **(3 балла)**



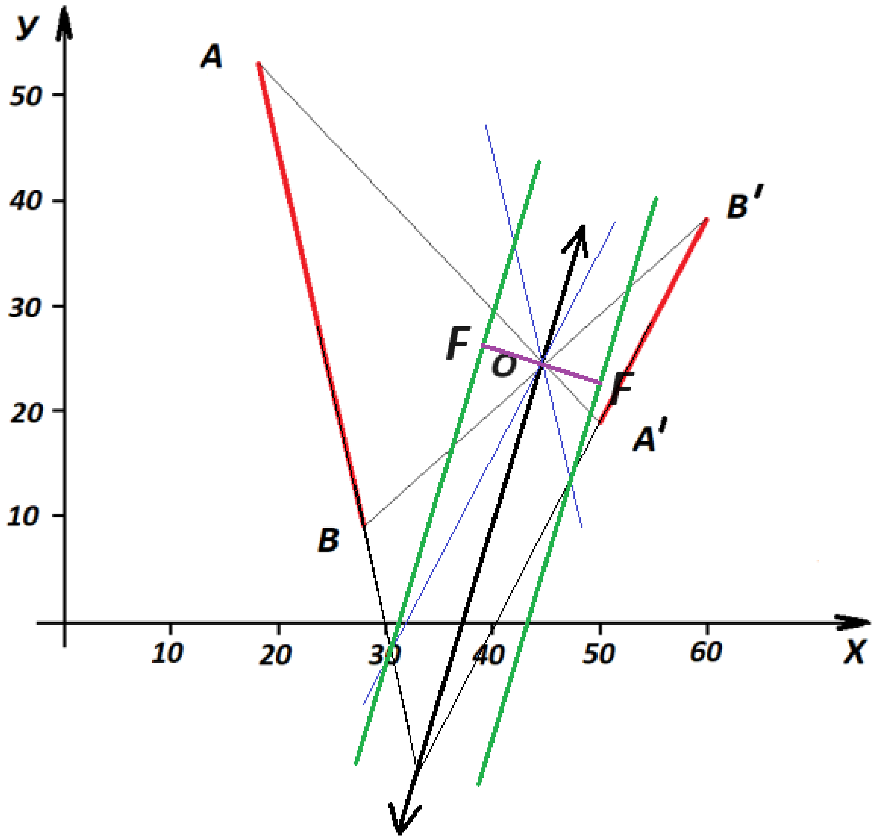
Через оптический центр проводим прямые параллельные AB и $A^{/}B^{/}$. Их пересечения с лучами $A^{/}B^{/}$ и AB дают положения фокальных плоскостей (на рисунке зеленым цветом).

(4 балла)



Из оптического центра опускаем перпендикуляры на фокальные плоскости. Получаем местоположение главных фокусов (38; 26) и (50; 23).

(4 балла)



<u>Примечание:</u> если приведены правильные рассуждения, но ответ отличается от авторского в пределах разумной погрешности, то работа оценивается полным баллом.

10 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Найдите знаменатель дроби, полученной после максимально возможного сокращения дроби

$$\frac{80!}{10^{80}},$$

где $80!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 79\cdot 80$.

Ответ. $2^2\cdot 5^{61}$.

Решение. Имеем $80!=2^{40+20+10+5+2+1}\cdot 5^{16+3}\cdot\ldots=2^{78}\cdot 5^{19}\cdot\ldots$ Поэтому

$$\frac{80!}{10^{80}}=\frac{2^{78}\cdot 5^{19}\cdot\ldots}{2^{80}\cdot 5^{80}}=\frac{\ldots}{2^2\cdot 5^{61}}.$$

Критерии оценивания. Правильно найдено разложение знаменателя – 2 балла; верно найдены степень 2 в числителе + 5 баллов, степень 5 в числителе +3 балла; арифметические ошибки – минус 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 11 баллов.

2. (*12 баллов*) В двух кружках для 10 классов «Олимпиадная математика» и «Робототехника» участвуют более 29 ребят. Количество школьников в первом кружке, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает количество школьников во втором кружке. Утроенное количество участников в первом кружке превышает удвоенное количество участников второго кружка, но менее чем на 60. Сколько школьников занимается в кружке «Олимпиадная математика»?

Ответ. 24.

Решение. Пусть n – количество школьников в первом кружке, m – количество школьников во втором кружке. По условию задачи получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} n+m>29, \\ n-2>3m, \\ 3n-2m<60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+m>29, & (1) \\ n-3m>2, & (2) \\ -3n+2m>-60. & (3) \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на 3 и сложим с неравенством (2), получим $4n>89$ или $n>22\frac{1}{4}$. Умножим неравенство (2) на 2 и сложим с неравенством (3), умноженным на 3, получим: $-7n>-176$ или $n<25\frac{1}{7}$. Учитывая целочисленность n, получаем, что n=23, n=24 или n=25.

Проверим n=23. Подставляя в неравенства (1) и (2) исходной системы, получаем систему: $\begin{cases} m > 6, \\ m < 7; \end{cases}$ которая не имеет целых решений.

Проверим n=24. Получаем систему $\begin{cases} m > 5, \\ m < 7\frac{1}{3}, \\ m > 6. \end{cases}$ Отсюда получаем m=7.

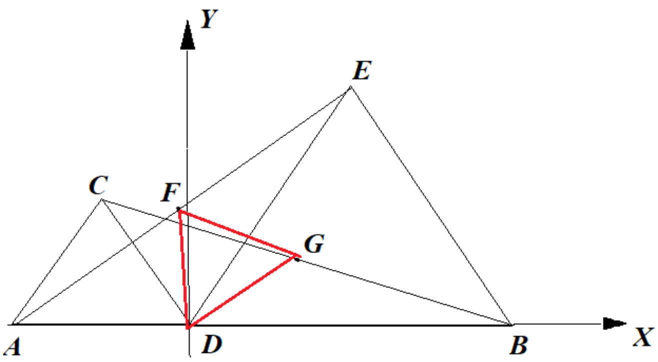
И, наконец, проверим n=25. Получаем систему $\begin{cases} m > 4, \\ m < 7\frac{2}{3}, \\ m > 7\frac{1}{2}. \end{cases}$ Которая не имеет целых решений.

Критерии оценивания. Получена система неравенств, ставим по 2 балла за каждое верное неравенство. Если перебором найдено верное решение, но не доказана его единственность, ставим всего 6 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) На отрезке AB по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ACD и DEB со сторонами 2 и 5 соответственно (точка D лежит на отрезке AB). Точки F и G – середины отрезков AE и CB соответственно. Покажите, что $\triangle FGD$ равносторонний, и найдите длину его стороны.

Ответ. $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

Решение. Пусть начало декартовой системы координат находится в точке D, положительное направление оси Dx совпадает с лучом DB. Стороны треугольников ACD и DEB равны соответственно a и b.



Тогда $A(-a;0)$; $B(b;0)$; $C\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$; $E\left(\frac{b}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$. Координаты точек F и G найдём по формуле координат середины отрезков:

$$F\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}b\right);\ G\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}a\right).$$

Находим стороны $\triangle FGD$:

$$FD = \sqrt{\left(\frac{b}{4} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} b\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - ab + a^2}}{2}.$$

Для двух других сторон $\triangle FGD$ получаем то же выражение. Следовательно, $\triangle FGD$ равносторонний. Длина его стороны равна:

$$\frac{\sqrt{b^2 - ab + a^2}}{2} = \frac{\sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Критерии оценивания. Доказано, что треугольник равносторонний и получен верный ответ – 13 баллов. Если было приведено решение без метода координат, то за верное доказательство, что треугольник правильный, ставим 9 баллов; правильно найдена сторона треугольника – 4 балла. Если имеются арифметические ошибки при верном ходе решения задачи – минус 2 балла.

4. (*14 баллов*) В стае обезьян 80 детёнышей. У любых двух из них есть общий дед и, разумеется, у каждого детёныша два деда. Докажите, что найдётся дед, у которого хотя бы 54 внука (в том числе внучки).

Решение. Пусть деды – вершины графа. Вершины (то есть дедов) соединяем ребром, если у них есть хотя бы один общий внук. Так как не бывает больше двух дедов у одного внука, а у любых двух внуков есть общий по условию дед, не могут два ребра этого графа не иметь общей вершины. Поэтому возможны два варианта.

1. Одна вершина соединена с остальными, эти остальные не соединены друг с другом. В этом случае у этого деда все детёныши – внуки.

2. Есть только три вершины, соединенные друг с другом. Берём деда (вершину), у которого больше всего внуков. На всех у них 160 внуков. Значит, у кого-то из трёх больше, чем 53.

Критерии оценивания. Приведено верное доказательство – 14 баллов. Введён граф, где деды – вершины, внуки – ребра, ставим 3 балла. Замечено, что этот граф имеет один из двух видов: «звезда» или «треугольник» – 10 баллов. Если что-то одно из двух, и на этой основе неполное решение – 7 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Сталкер, для обнаружения гравитационной аномалии (области, где ускорение свободного падения резко изменяется по модулю), бросает небольшую гайку от поверхности Земли под углом $\alpha=30^0$ к горизонту со скоростью $v_0=10$ м/с. Нормальное ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. В самой верхней точке своей траектории гайка попадает в зону аномалии и продолжает двигаться в ней. В результате, гайка падает на Землю на расстоянии S=5,196 м от сталкера. Определите ускорение свободного падения внутри аномалии.

Ответ: 250 м/с^2.

Решение. Уравнения движения до аномалии: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 5\sqrt{3} \cdot t$,
(1 балл)

$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 5 \cdot t - 5 \cdot t^2$, **(1 балл)**

$v_x = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{3}$, **(1 балл)**

$v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 5 - 10t$. **(1 балл)**

Отсюда получаем, что для верхней точки полёта: $t_в = 0{,}5c$, $x_в = 2{,}5\sqrt{3}$м, $y_в = 1{,}25$м. **(1 балл)**

Уравнения движения внутри аномалии:

$S = x_в + v_x t = 2{,}5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}t$, **(1 балл)**

$y = 0 = y_в - \frac{g_a t^2}{2} = 1{,}25 - \frac{g_a t^2}{2}$. **(1 балл)**

Решая данную систему, получаем: $g_a = 250\,\text{м/с}^2$. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Известно, что нагретое тело излучает каждую секунду с одного квадратного метра энергию, которая определяется выражением w=σT^4, где σ=5,67·10^{-8} Дж/(с·м^2·К^4). До какой температуры нагреется кусок проволоки длиной L=50 см и диаметром сечения D=2 мм, если к его концам в течение длительного времени прикладывается напряжение U=220 В и по проволоке протекает ток I=5 А?

Ответ: 1576 К.

Решение. Мощность протекающего по проволоке тока: $P = UI$. **(2 балла)**

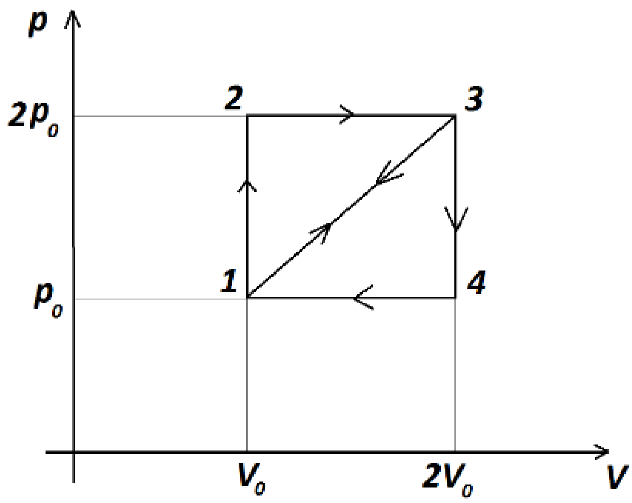
Мощность теплового излучения: $P = w \cdot S = \sigma T^4 L \cdot \pi D$. **(4 балла)**

Получаем:

$\sigma T^4 L \cdot \pi D = UI$. Откуда: $T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\sigma L \pi D}} = \sqrt[4]{\frac{220 \cdot 5}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 1576$ К.

(4 балла)

7. (*15 баллов*) С одинаковым количеством одноатомного идеального газа совершают два циклических процесса 1-2-3-1 и 1-3-4-1. Найдите отношение их КПД.



Ответ: 1,08.

Решение. Для цикла 1-2-3-1:

Работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2}p_0V_0$. **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{123} + A_{123} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 2p_0V_0 = 6{,}5p_0V_0$.
(2 балла)

КПД данного цикла: $\eta_{123} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{13}$. **(2 балла)**

Для цикла 1-3-4-1:

Работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2}p_0V_0$. **(2 балла)**

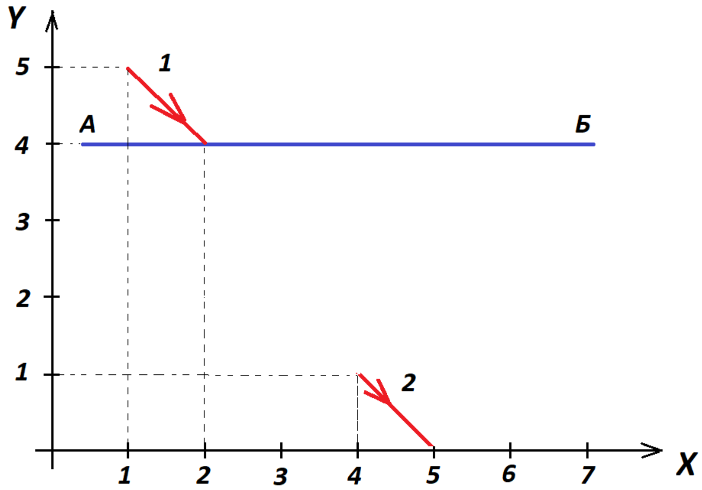
Теплота, получаемая от нагревателя:

$Q = Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 1{,}5p_0V_0 = 6p_0V_0$. **(2 балла)**

КПД: $\eta_{134} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{12}$. **(2 балла)**

Отношение КПД данных циклов: $\frac{\eta_{134}}{\eta_{123}} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$. **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показана часть луча 1 до падения на верхнюю грань плоскопараллельной пластины, верхняя грань *АБ* этой пластины, и часть луча 2 после прохождения пластины. Показатель преломления материала пластины *n*=1,5. Рассчитайте местоположение нижней грани пластины.



Ответ: y=1,85.

Решение. Угол падения 1 луча равен 45^0. **(2 балла)**

Закон преломления на пластине: $\frac{\sin 45^0}{\sin\alpha} = 1{,}5$. **(2 балла)**

В результате: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$. **(2 балла)**

Уравнение преломлённого луча: $y = -\sqrt{\frac{7}{2}}x + 4 + 2\sqrt{\frac{7}{2}}$. **(4 балла)**

Уравнение луча 2: $y = 5 - x$. **(2 балла)**

Получаем: $y = -\sqrt{\frac{7}{2}}(5 - y) + 4 + 2\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Нижняя грань пластины расположена на уровне: $y \approx 1{,}85$. **(3 балла)**

10 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Найдите знаменатель дроби, полученной после максимально возможного сокращения дроби

$$\frac{81!}{10^{81}},$$

где 81!=1·2·3·…·80·81.

Ответ. $2^3 \cdot 5^{62}$.

Решение. Имеем $81! = 2^{40+20+10+5+2+1} \cdot 5^{16+3} \cdot \ldots = 2^{78} \cdot 5^{19} \cdot \ldots$ Поэтому

$$\frac{80!}{10^{81}} = \frac{2^{78} \cdot 5^{19} \cdot \ldots}{2^{81} \cdot 5^{81}} = \frac{\ldots}{2^3 \cdot 5^{62}}.$$

Критерии оценивания. Правильно найдено разложение знаменателя – 2 балла; верно найдены степень 2 в числителе + 5 баллов, степень 5 в числителе +3 баллов; арифметические ошибки – минус 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 11 баллов.

2. (*12 баллов*) В двух кружках для 10 классов «Олимпиадная математика» и «Робототехника» участвуют более 29 ребят. Количество школьников в первом кружке, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает количество школьников во втором кружке. Утроенное количество участников в первом кружке превышает удвоенное количество участников второго кружка, но менее чем на 60. Сколько школьников занимается в кружке «Робототехника»?

Ответ. 7.

Решение. Пусть n – количество школьников в первом кружке, m – количество школьников во втором кружке. По условию задачи получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} n + m > 29, \\ n - 2 > 3m, \\ 3n - 2m < 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + m > 29, & (1) \\ n - 3m > 2, & (2) \\ -3n + 2m > -60. & (3) \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на 3 и сложим с неравенством (2), получим $4n > 89$ или $n > 22\frac{1}{4}$. Умножим неравенство (2) на 2 и сложим с неравенством (3), умноженным на 3, получим: $-7n > -176$ или $n < 25\frac{1}{7}$. Учитывая целочисленность n, получаем, что n=23, n=24 или n=25.

Проверим n=23. Подставляя в неравенства (1) и (2) исходной системы, получаем систему: $\begin{cases} m > 6, \\ m < 7; \end{cases}$ которая не имеет целых решений.

Проверим n=24. Получаем систему $\begin{cases} m > 5, \\ m < 7\frac{1}{3}, \\ m > 6. \end{cases}$ Отсюда получаем m=7.

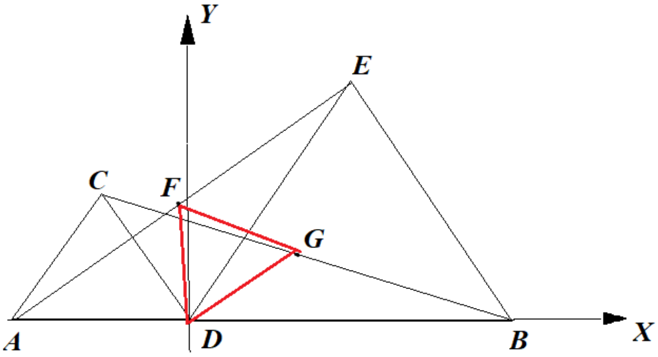
И, наконец, проверим n=25. Получаем систему $\begin{cases} m > 4, \\ m < 7\frac{2}{3}, \\ m > 7\frac{1}{2}. \end{cases}$ Которая не имеет целых решений.

Критерии оценивания. Получена система неравенств, ставим по 2 балла за каждое верное неравенство. Если перебором найдено верное решение, но не доказана его единственность, ставим всего 6 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) На отрезке AB по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ACD и DEB со сторонами 3 и 4 соответственно (точка D лежит на отрезке AB). Точки F и G – середины отрезков AE и CB соответственно. Покажите, что $\triangle FGD$ равносторонний, и найдите длину его стороны.

Ответ. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Решение. Пусть начало декартовой системы координат находится в точке D, положительное направление оси Dx совпадает с лучом DB. Стороны треугольников ACD и DEB равны соответственно a и b.



Тогда $A(-a;0)$; $B(b;0)$; $C\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$; $E\left(\frac{b}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$. Координаты точек F и G найдём по формуле координат середины отрезков:

$$F\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}b\right);\ G\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}a\right).$$

Находим стороны $\triangle FGD$:

$$FD=\sqrt{\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}b\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2-ab+a^2}}{2}.$$

Для двух других сторон $\triangle FGD$ получаем то же выражение. Следовательно, $\triangle FGD$ равносторонний. Длина его стороны равна:

$$\frac{\sqrt{b^2-ab+a^2}}{2}=\frac{\sqrt{4^2-3\cdot4+3^2}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Критерии оценивания. Доказано, что треугольник равносторонний и получен верный ответ – 13 баллов. Если было приведено решение без метода координат, то за верное доказательство, что треугольник правильный, ставим 9 баллов; правильно найдена сторона треугольника – 4 балла. Если имеются арифметические ошибки при верном ходе решения задачи – минус 2 балла.

4. (*14 баллов*) В стае обезьян 82 детёныша. У любых двух из них есть общий дед и, разумеется, у каждого детёныша два деда. Докажите, что найдётся дед, у которого хотя бы 55 внуков (в том числе внучек).

Решение. Пусть деды – вершины графа. Вершины (то есть дедов) соединяем ребром, если у них есть хотя бы один общий внук. Так как не бывает больше двух дедов у одного внука, а у любых двух внуков есть общий по условию дед, не могут два ребра этого графа не иметь общей вершины. Поэтому возможны два варианта:

1. Одна вершина соединена с остальными, эти остальные не соединены друг с другом. В этом случае у этого деда все детёныши – внуки;

2. Есть только три вершины, соединенные друг с другом. Берём деда (вершину), у которого больше всего внуков. На всех у них 164 внуков. Значит, у кого-то из трёх больше, чем 54.

Критерии оценивания. Приведено верное доказательство – 14 баллов. Введён граф, где деды – вершины, внуки – ребра, ставим 3 балла. Замечено, что этот граф имеет один из двух видов: «звезда» или «треугольник» – 10 баллов. Если что-то одно из двух, и на этой основе неполное решение – 7 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Сталкер, для обнаружения гравитационной аномалии (области, где ускорение свободного падения резко изменяется по модулю), бросает небольшую гайку от поверхности Земли под углом α=30^0 к горизонту со скоростью v_0=20 м/с. Нормальное ускорение свободного падения g=10 м/с^2. В самой верхней точке своей траектории гайка попадает в зону аномалии и продолжает двигаться в ней. В результате, гайка падает на Землю на расстоянии S=25,98 м от сталкера. Определите ускорение свободного падения внутри аномалии.

Ответ: 40 м/с^2.

Решение. Уравнения движения до аномалии:

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 10\sqrt{3} \cdot t,$ **(1 балл)**

$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 10 \cdot t - 5 \cdot t^2,$ **(1 балл)**

$v_x = v_0 \cos\alpha = 10\sqrt{3},$ **(1 балл)**

$v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 10 - 10t.$ **(1 балл)**

Отсюда получаем, что для верхней точки полета: $t_в = 1\ c$, $x_в = 10\sqrt{3}$ м, $y_в = 5$ м. **(1 балл)**

Уравнения движения внутри аномалии: $S = x_в + v_x t = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3}t.$ **(1 балл)**

$y = 0 = y_в - \frac{g_a t^2}{2} = 5 - \frac{g_a t^2}{2}.$ **(1 балл)**

Решая данную систему, получаем: $g_a = 40\ м/с^2$. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Известно, что нагретое тело излучает каждую секунду с одного квадратного метра энергию, которая определяется выражением w=σT^4, где σ=5,67·10^{-8} Дж/(с·м^2·К^4). До какой температуры нагреется кусок проволоки длиной L=25 см и диаметром сечения D=1 мм, если к его концам в течение длительного времени прикладывается напряжение U=220 В и по проволоке протекает ток I=5 А?

Ответ: 2229 К.

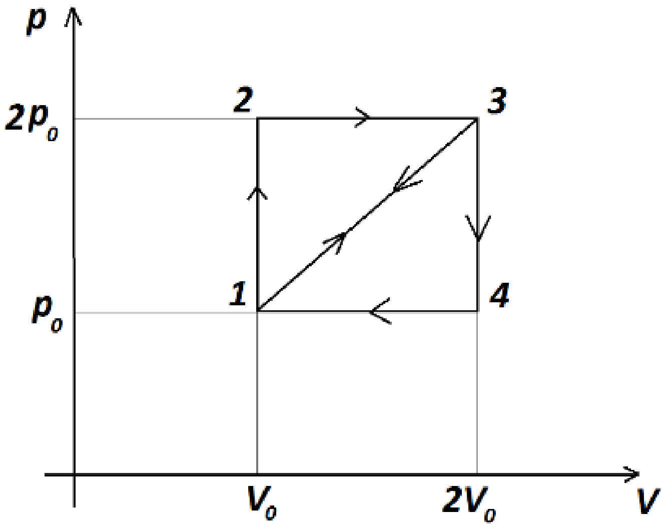
Решение. Мощность протекающего по проволоке тока: $P = UI$. **(2 балла)**

Мощность теплового излучения: $P = w \cdot S = \sigma T^4 L \cdot \pi D$. **(4 балла)**

Получаем:

$\sigma T^4 L \cdot \pi D = UI$. Откуда: $T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\sigma L \pi D}} = \sqrt[4]{\frac{220 \cdot 5}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}} = 2229$ К. **(4 балла)**

7. (*15 баллов*) С одинаковым количеством одноатомного идеального газа совершают два циклических процесса 1-2-3-1 и 1-3-4-1. Найдите отношение их КПД.



Ответ: 1,08.

Решение. Для цикла 1-2-3-1:

Работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2} p_0 V_0$. **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{123} + A_{123} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 2p_0V_0 = 6{,}5p_0V_0.$$
(2 балла)

КПД данного цикла: $\eta_{123} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{13}$. **(2 балла)**

Для цикла 1-3-4-1:

Работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2} p_0 V_0$. **(2 балла)**

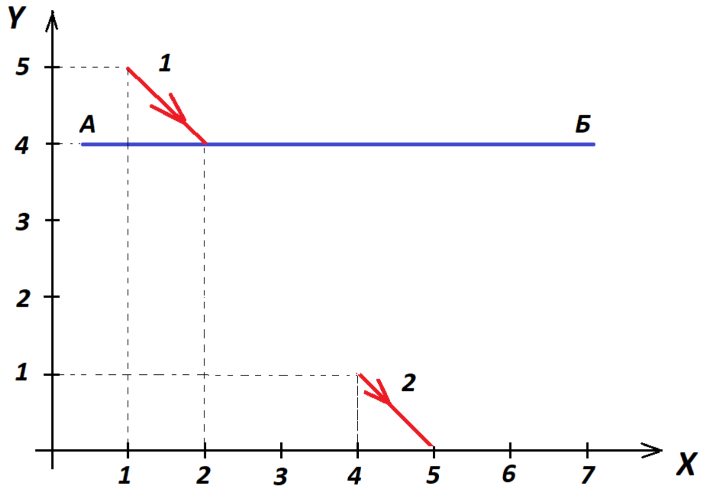
Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q = Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 1{,}5p_0V_0 = 6p_0V_0.$$ **(2 балла)**

КПД: $\eta_{134} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{12}$. **(2 балла)**

Отношение КПД данных циклов: $\frac{\eta_{134}}{\eta_{123}} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$. **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показана часть луча 1 до падения на верхнюю грань плоскопараллельной пластины, верхняя грань *АБ* этой пластины, и часть луча 2 после прохождения пластины. Показатель преломления материала пластины *n*=1,6. Рассчитайте местоположение нижней грани пластины.



Ответ: *y*=2,03.

Решение. Угол падения 1 луча равен 45^0. **(2 балла)**

Закон преломления на пластине: $\frac{\sin 45^0}{\sin\alpha} = 1{,}6$. **(2 балла)**

В результате: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-(\sin\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{1}{4{,}12}}$. **(2 балла)**

Уравнение преломленного луча: $y = -\sqrt{4{,}12}x + 4 + 2\sqrt{4{,}12}$. **(4 балла)**

Уравнение луча 2: $y = 5 - x$. **(2 балла)**

Получаем: $y = -\sqrt{4{,}12}(5 - y) + 4 + 2\sqrt{4{,}12}$.

Нижняя грань пластины расположена на уровне: $y \approx 2{,}03$. **(3 балла)**

9 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Найдите все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+2=(y+z)^2; \\ y^2+3=(x+z)^2; \\ z^2+4=(x+y)^2. \end{cases}$$

Ответ. $x=\frac{7}{6};\ y=1;\ z=\frac{5}{6}$.

Решение. Перенесём правые части уравнений в левую часть и применим формулу «разности квадратов». Обозначив $S=x+y+z$, получим:

$$\begin{cases} (2x-S)S+2=0; \\ (2y-S)S+3=0; \\ (2z-S)S+4=0. \end{cases}$$

Заметим, что по условию $S>0$. Сложив все уравнения системы, получим: $S^2=9,\ S=3$. Отсюда

$$\begin{cases} x=\dfrac{S^2-2}{2S}=\dfrac{7}{6}; \\ y=\dfrac{S^2-3}{2S}=1; \\ z=\dfrac{S^2-4}{2S}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если ход решения правильный, но имеются арифметические ошибки минус 3 балла.

2. (*12 баллов*) В магазине работают два кассовых аппарата. До обеда первый кассир обслужил на 25% меньше покупателей, чем второй, зато после обеда на 20% больше, чем второй кассир. По итогам дня оказалось, что первый кассир обслужил на 10% покупателей больше, чем второй. Общее количество обслуженных двумя кассирами покупателей оказалось меньше 250. Сколько всего покупателей обслужил второй кассир?

Ответ: 90.

Решение. Второй кассир до обеда обслужил количество покупателей кратное 4, так как 25% от этого количества должно быть целым числом. Аналогично число покупателей, обслуженных вторым кассиром после обеда, должно делиться на 5. Пусть второй кассир до обеда обслужил $4x$ покупателей, после обеда – $5y$ покупателей. Тогда первый кассир обслужил соответственно $3x$ и $6y$ покупателей. Кроме того, число $4x$+$5y$ должно делиться на 10. Следовательно, x кратно 5, а y – чётное. Пусть x=5a, y=2b, где $a, b \in N$. Так как $3x + 6y = \frac{11}{10}(4x + 5y)$, получим $15a + 12b = \frac{11}{10}(20a + 10b)$. Отсюда b=7a. Тогда первый кассир обслужил 99a покупателей, а второй – 90a покупателей. Вместе они обслужили за смену 189a покупателей. Из условия, что $189a<250$ находим a=1.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Участник заметил, что количество покупателей, обслуженных вторым кассиром, до обеда кратно 4, а после обеда – кратно 5, то ставим 3 балла. Получено основное уравнение +5 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 3 балла.

3. (*13 баллов*) На окружности отмечено 2024 точки, точка *A* – одна из них. Каких (выпуклых) многоугольников с вершинами в некоторых из этих точек больше и на сколько: содержащих точку *A* или не содержащих её?

Ответ. Больше многоугольников, содержащих точку *A,* на **2045253**.

Решение. Каждому многоугольнику, не содержащему точку *A*, поставим в соответствие многоугольник, содержащий точку *A,* добавив эту точку к вершинам исходного многоугольника. Получим не все многоугольники с вершиной *A,* а именно, не получим треугольники. Треугольников с вершиной в точке *A* столько, сколько пар точек в множестве из (остальных) 2023 точек, то есть, $\frac{2023 \cdot 2022}{2} = 2045253$.

Критерии оценивания. Показано, что содержащих точку *A* больше на количество треугольников, – 7 баллов. Правильно подсчитано их количество – еще 6 баллов. За неподсчитанное произведение в ответе баллов не снимаем.

4. (*13 баллов*) Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет **три** различных действительных корня. А многочлен $f(g(x))$, где

$$g(x) = x^2 + 6x + 2024$$

действительных корней не имеет. Докажите, что $f(2024) > 729$.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 – действительные корни многочлена $f(x)$, то

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Тогда $f(g(x)) = (g(x) - x_1)(g(x) - x_2)(g(x) - x_3)$, где каждый из множителей не обращается в нуль.

Если $g(x) \neq x_1$, то уравнение $x^2 + 6x + 2024 - x_1 = 0$ не имеет корней, и $D = 36 - 4(2024 - x_1) < 0$, следовательно, $2024 - x_1 > 9$.

Аналогично, $2024 - x_2 > 9$ и $2024 - x_3 > 9$. Тогда
$$f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) > 9^3 = 729.$$

Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Правильно записано разложение для многочлена $f(g(x))$ – 5 баллов. Сделан вывод, что каждый множитель не обращается в нуль и, следовательно, дискриминанты меньше нуля +5 баллов, имеются арифметические ошибки – минус 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Маленький шарик запустили с горизонтальной поверхности со скоростью v_0=40 м/с под углом α=60 ^{0} к горизонту. В момент времени, когда скорость шарика стала равной v=30 м/с, он врезался в вертикальную стенку. Считая удар о стенку абсолютно упругим, определите на каком расстоянии от точки запуска шарик упадёт обратно на горизонтальную поверхность? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 89,4 м.

Решение. Уравнения движения шарика: **(2 балла)**

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t,$

$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - 5t^2,$

$v_x = v_0 \cos\alpha,$

$v_y = v_0 \sin\alpha - 10t.$

Квадрат вертикальной составляющей скорости:

$v_y^2 = v^2 - v_x^2 = (v_0 \sin\alpha - 10t)^2.$ **(2 балла)**

Получаем квадратное уравнение:

$100t^2 - 20v_0 \sin\alpha \cdot t + v_0^2 - v^2 = 0,\ 100t^2 - 20 \cdot 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t + 40^2 - 30^2 = 0.$

Получаем, что время, когда шарик врезается в стенку:

$t_1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \approx 1{,}23$ с, **(1 балл)**

$t_2 = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} \approx 5{,}70$ с. **(1 балл)**

Расстояние по горизонтали, на котором располагается стенка от точки броска:

$x_1 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}23 \approx 24{,}6$ м, **(1 балл)**

$x_2 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5{,}70 \approx 114{,}0$ м. **(1 балл)**

Максимальная дальность полёта шарика:

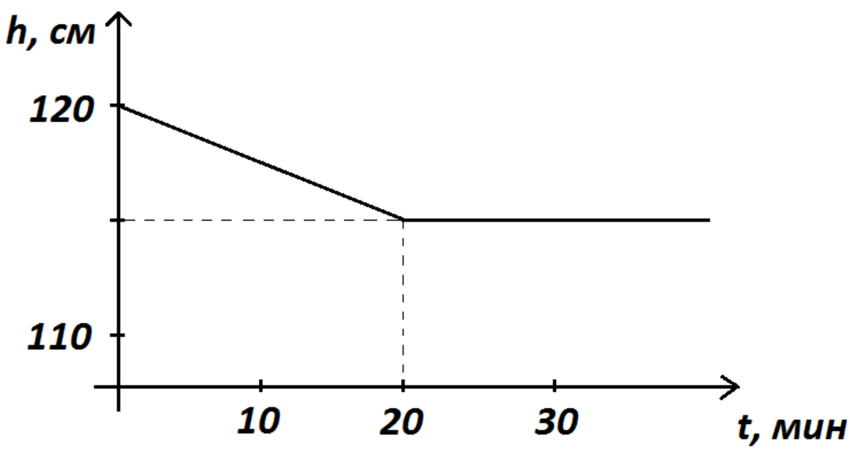
$S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{40^2 \sin 120^0}{10} \approx 138{,}6$ м. **(1 балл)**

Окончательный ответ:

$L_1 = S - 2x_1 = 89{,}4$ м, $L_2 = 2x_2 - S = 89{,}4$ м. **(1 балл)**

Примечание: *Если решение ограничивается только одним возможным вариантом, то данное решение оценивается максимум 12 баллами.*

6. (*10 баллов*) В цилиндрическом сосуде на дне намерз лёд. Его температура 0^0C. Сверху налита вода, взятая при той же температуре. Сосуд внесли в тёплое помещение. Зависимость уровня воды в сосуде от времени приведена на графике. Определите исходные массы льда и воды. Площадь основания сосуда S=15 см^2, плотность воды $\rho_В$=1 г/см^3, плотность льда $\rho_Л$=0,9 г/см^3.



Ответ: масса льда – 675 г, масса воды – 1050 г.

Решение. Изменение объёма воды в сосуде: $\Delta V = S\Delta h = 15 \cdot 5 = 75$ см^3.

(1 балл)

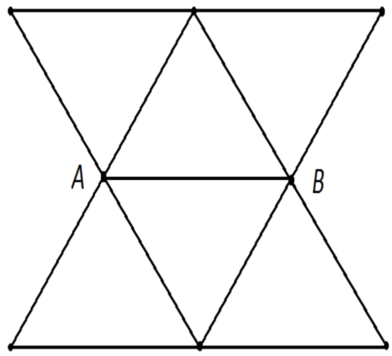
Данное изменение – это разница между объёмами исходного льда и воды, в которую он превратился: $\Delta V = V_л - V_в = \frac{m_л}{\rho_л} - \frac{m_л}{\rho_в}$. **(3 балла)**

Получаем, что масса исходного льда: $m_л = \frac{\Delta V \cdot \rho_л \cdot \rho_в}{\rho_в - \rho_л} = 675$ г. **(2 балла)**

Конечный объём воды в сосуде: $V_к = 115 \cdot 15 = 1725$ см^3. **(2 балла)**

Следовательно, начальная масса воды: $m_в = \rho_в V_к - m_л = 1050$ г. **(2 балла)**

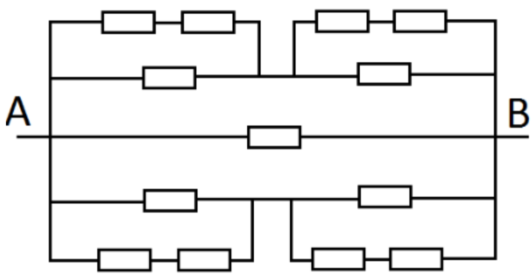
7. (*15 баллов*) Тринадцать одинаковых металлических стержней соединены следующим образом (см. рис.). Известно, что сопротивление одного стержня R_0=10 Ом. Определите сопротивление всей конструкции, если она подключается к источнику тока точками A и B.



Ответ: 4 Ом.

Решение. Эквивалентная схема выглядит следующим образом:

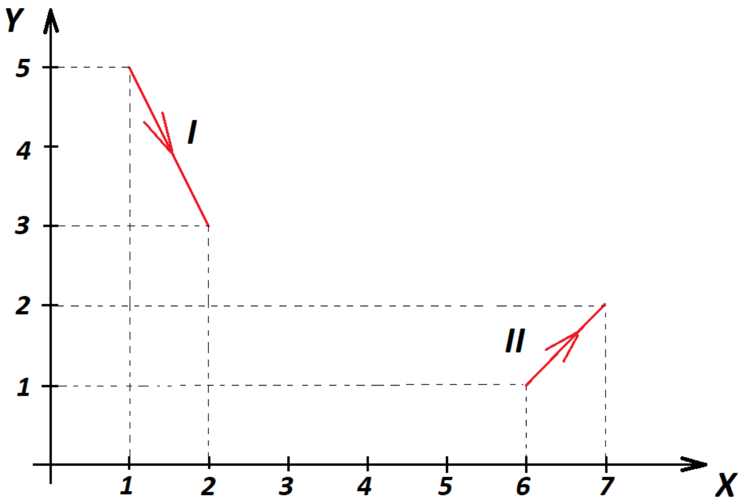
(10 баллов)



где каждый из резисторов имеет сопротивление $R_0 = 10$ Ом.

В результате, общее сопротивление: $R = \frac{4}{10} R_0 = 4$ Ом **(5 баллов)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показана часть светового луча I, падающего на плоское зеркало, и часть отражённого от него луча II. Рассчитайте координаты точки отражения и угол к горизонту, под которым расположено зеркало.



Ответ: $\alpha = -9{,}2^0$.

Решение. Уравнение, падающего на зеркало луча: $y_1 = 7 - 2x$. **(2 балла)**

Уравнение, отражённого от зеркала луча: $y_2 = -5 + x$. **(2 балла)**

В точке отражения от зеркала: $y_1 = y_2$, $7 - 2x = -5 + x$.

Координаты точки отражения: $x_{\text{отр}} = 4$; $y_{\text{отр}} = -1$. **(2 балла)**

Уравнение биссектрисы, проведенной из точки пересечения этих прямых, определяется из равенства: $\frac{y+2x-7}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{y-x+5}{\sqrt{1^2+1^2}}$. **(4 балла)**

Откуда, перпендикуляр к зеркалу: $y = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}x - \frac{7\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Само зеркало: $y = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}x + \frac{7\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$. **(3 балла)**

Получаем, что угол наклона: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \approx -0{,}162$, **(2 балла)**

$\alpha \approx -9{,}2^0$.

Примечание:

1) *ответ возможен в виде угла или его функции;*

2) *если задача решается построением, а не расчётами, то она оценивается максимум в 6 баллов.*

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Найдите все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+2=(y+z)^2; \\ y^2+1=(x+z)^2; \\ z^2+1=(x+y)^2. \end{cases}$$

Ответ. $x=\frac{1}{2};\ y=\frac{3}{4};\ z=\frac{3}{4}.$

Решение. Перенесём правые части уравнений в левую часть и применим формулу «разности квадратов». Обозначив $S=x+y+z$, получим:

$$\begin{cases} (2x-S)S+2=0; \\ (2y-S)S+1=0; \\ (2z-S)S+1=0. \end{cases}$$

Заметим, что по условию S>0. Сложив все уравнения системы, получим: $S^2=4,\ S=2$. Отсюда

$$\begin{cases} x=\dfrac{S^2-2}{2S}=\dfrac{1}{2}; \\ y=\dfrac{S^2-1}{2S}=\dfrac{3}{4}; \\ z=\dfrac{S^2-1}{2S}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если ход решения правильный, но имеются арифметические ошибки минус 3 балла.

2. (*12 баллов*) В магазине работают два кассовых аппарата. До обеда первый кассир обслужил на 25% меньше покупателей, чем второй, зато после обеда на 20% больше, чем второй кассир. По итогам дня оказалось, что первый кассир обслужил на 10% покупателей больше, чем второй. Общее количество обслуженных двумя кассирами покупателей оказалось меньше 250. Сколько всего покупателей обслужил первый кассир?

Ответ: 99.

Решение. Второй кассир до обеда обслужил количество покупателей кратное 4, так как 25% от этого количества должно быть целым числом. Аналогично число покупателей, обслуженных вторым кассиром после обеда, должно делиться на 5. Пусть второй кассир до обеда обслужил $4x$ покупателей, после обеда – $5y$ покупателей. Тогда первый кассир обслужил соответственно $3x$ и $6y$ покупателей. Кроме того, число $4x+5y$ должно делиться на 10. Следовательно, x кратно 5, а y – чётное. Пусть $x=5a$, $y=2b$, где $a, b \in N$. Так как $3x+6y=\frac{11}{10}(4x+5y)$, получим $15a+12b=\frac{11}{10}(20a+10b)$. Отсюда $b=7a$. Тогда первый кассир обслужил $99a$ покупателей, а второй – $90a$ покупателей. Вместе они обслужили за смену $189a$ покупателей. Из условия, что $189a<250$ находим $a=1$.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Участник заметил, что количество покупателей, обслуженных вторым кассиром, до обеда кратно 4, а после обеда – кратно 5, то ставим 3 балла. Получено основное уравнение +5 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 3 балла.

3. (*13 баллов*) На окружности отмечено 2025 точек, точка *A* – одна из них. Каких (выпуклых) многоугольников с вершинами в некоторых из этих точек больше и на сколько: содержащих точку *A* или не содержащих её?

Ответ. Больше многоугольников, содержащих точку *A,* на **2047276**.

Решение. Каждому многоугольнику, не содержащему точку *A*, поставим в соответствие многоугольник, содержащий точку *A,* добавив эту точку к вершинам исходного многоугольника. Получим не все многоугольники с вершиной *A,* а именно, не получим треугольники. Треугольников с вершиной в точке *A* столько, сколько пар точек в множестве из (остальных) 2024 точек, то есть, $\frac{2024\cdot 2023}{2}=2047276$.

Критерии оценивания. Показано, что содержащих точку *A* больше на количество треугольников, 7 баллов. Правильно подсчитано их количество – еще 6 баллов. За неподсчитанное произведение в ответе баллов не снимаем.

4. (*13 баллов*) Многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет **три** различных действительных корня. А многочлен $f(g(x))$, где

$$g(x)=x^2+4x+2024$$

действительных корней не имеет. Докажите, что $f(2024)>64$.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 – действительные корни многочлена $f(x)$, то

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Тогда $f(g(x)) = (g(x) - x_1)(g(x) - x_2)(g(x) - x_3)$, где каждый из множителей не обращается в нуль.

Если $g(x) \neq x_1$, то уравнение $x^2 + 4x + 2024 - x_1 = 0$ не имеет корней, и $D = 16 - 4(2024 - x_1) < 0$, следовательно, $2024 - x_1 > 4$.

Аналогично, $2024 - x_2 > 4$ и $2024 - x_3 > 4$. Тогда

$$f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) > 4^3 = 64.$$

Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Правильно записано разложение для многочлена $f(g(x))$ – 5 баллов. Сделан вывод, что каждый множитель не обращается в нуль и, следовательно, дискриминанты меньше нуля +5 баллов. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Маленький шарик запустили с горизонтальной поверхности со скоростью v_0=30 м/с под углом α=60^0 к горизонту. В момент времени, когда скорость шарика стала равной v=20 м/с, он врезался в вертикальную стенку. Считая удар о стенку абсолютно упругим, определите на каком расстоянии от точки запуска шарик упадёт обратно на горизонтальную поверхность? Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 39,6 м.

Решение. Уравнения движения шарика: **(2 балла)**

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t,$

$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - 5t^2,$

$v_x = v_0 \cos\alpha,$

$v_y = v_0 \sin\alpha - 10t.$

Квадрат вертикальной составляющей скорости:

$v_y^2 = v^2 - v_x^2 = (v_0 \sin\alpha - 10t)^2.$ **(2 балла)**

Получаем квадратное уравнение:

$$100t^2 - 20v_0 \sin\alpha \cdot t + v_0^2 - v^2 = 0,\ 100t^2 - 20 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t + 30^2 - 20^2 = 0.$$

Получаем, что время, когда шарик врезается в стенку:

$t_1 = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}28$ с, **(1 балл)**

$t_1 = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} \approx 3{,}92$ с. **(1 балл)**

Расстояние по горизонтали, на котором располагается стенка от точки броска: $x_1 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}28 \approx 19{,}2$ м, **(1 балл)**

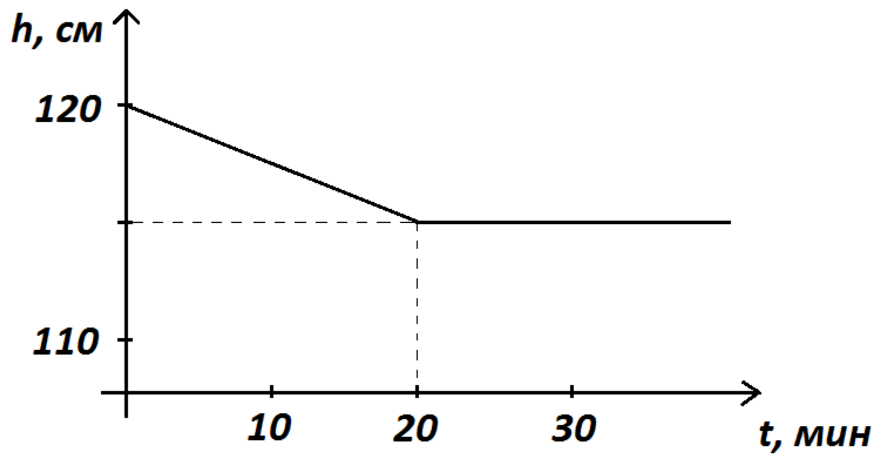
$x_2 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}92 \approx 58{,}8$ м. **(1 балл)**

Максимальная дальность полёта шарика: $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{30^2 \sin 120^0}{10} \approx 77{,}9$ м. **(1 балл)**

Окончательный ответ: $L_1 = S - 2x_1 = 39{,}5$ м, $L_2 = 2x_2 - S = 39{,}7$ м. **(1 балл)**

Примечание: Если решение ограничивается только одним возможным вариантом, то данное решение оценивается максимум 12 *баллами.*

6. (*10 баллов*) В цилиндрическом сосуде на дне намерз лёд. Его температура 0^0С. Сверху налита вода, взятая при той же температуре. Сосуд внесли в тёплое помещение. Зависимость уровня воды в сосуде от времени приведена на графике. Определите исходные массы льда и воды. Площадь основания сосуда S=15 см^2, плотность воды $\rho_В$=1 г/см^3, плотность льда $\rho_Л$=0,9 г/см^3.



Ответ: масса льда – 675 г, масса воды – 1050 г.

Решение. Изменение объёма воды в сосуде: $\Delta V = S\Delta h = 15 \cdot 5 = 75$ см^3. **(1 балл)**

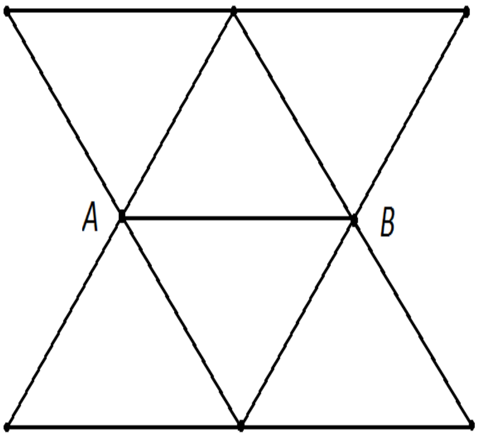
Данное изменение – это разница между объёмами исходного льда и воды, в которую он превратился: $\Delta V = V_л - V_в = \frac{m_л}{\rho_л} - \frac{m_л}{\rho_в}$. **(3 балла)**

Получаем, что масса исходного льда: $m_л = \frac{\Delta V \cdot \rho_л \cdot \rho_в}{\rho_в - \rho_л} = 675$ г. **(2 балла)**

Конечный объём воды в сосуде: $V_к = 115 \cdot 15 = 1725$ см^3. **(2 балла)**

Следовательно, начальная масса воды: $m_в = \rho_в V_к - m_л = 1050$ г. **(2 балла)**

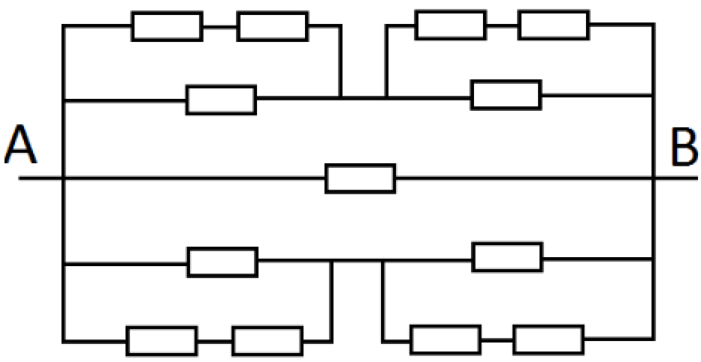
7. (*15 баллов*) Тринадцать одинаковых металлических стержней соединены следующим образом (см. рис.). Известно, что сопротивление одного стержня R_0=8 Ом. Определите сопротивление всей конструкции, если она подключается к источнику тока точками A и B.



Ответ: 3,2 Ом.

Решение. Эквивалентная схема выглядит следующим образом:

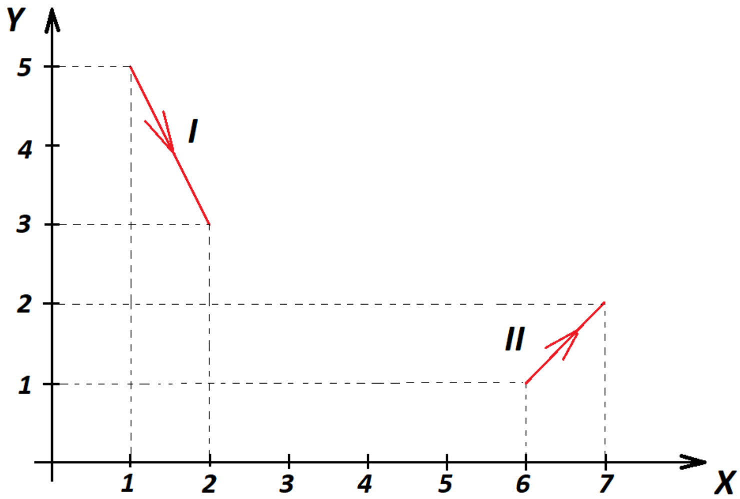
(10 баллов)



где каждый из резисторов имеет сопротивление $R_0 = 8$ Ом.

В результате, общее сопротивление: $R = \frac{4}{10} R_0 = 3{,}2$ Ом **(5 баллов)**

8. (*15 баллов*) На рисунке показана часть светового луча I, падающего на плоское зеркало, и часть отражённого от него луча II. Рассчитайте координаты точки отражения и угол к горизонту, под которым расположено зеркало.



Ответ: α = – 9,2^0.

Решение. Уравнение, падающего на зеркало луча: $y_1 = 7 - 2x$. **(2 балла)**

Уравнение, отражённого от зеркала луча: $y_2 = -5 + x$. **(2 балла)**

В точке отражения от зеркала: $y_1 = y_2$, $7 - 2x = -5 + x$.

Координаты точки отражения: $x_{\text{отр}} = 4$; $y_{\text{отр}} = -1$. **(2 балла)**

Уравнение биссектрисы, проведенной из точки пересечения этих прямых, определяется из равенства: $\frac{y+2x-7}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{y-x+5}{\sqrt{1^2+1^2}}$. **(4 балла)**

Откуда, перпендикуляр к зеркалу: $y = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}x - \frac{7\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Само зеркало: $y = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}x + \frac{7\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$. **(3 балла)**

Получаем, что угол наклона: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \approx -0{,}162$, **(2 балла)**

$\alpha \approx -9{,}2^0$.

Примечание:

1) *ответ возможен в виде угла или его функции;*

2) *если задача решается построением, а не расчётами, то она оценивается максимум в 6 баллов.*

8 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Несколько студентов, живущих в общежитии, решили в складчину купить «умную» колонку. Однако, в последний момент двое отказались участвовать и забрали свою долю денег, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести дополнительно по одной тысяче рублей, чтобы восстановить прежнюю сумму. Сколько стоит колонка, если известно, что она стоит целое число тысяч рублей и её цена заключена в промежутке от 8000 до 20000?

Ответ: 12000.

Решение. Пусть S тыс. рублей – стоимость колонки, а n – количество студентов, участвовавших в закупке первоначально. Тогда $\frac{S}{n}$ тыс. рублей – сумма, которую внёс каждый студент первоначально. Приравнивая сумму, которую забрали два студента к сумме, которую внесли оставшиеся, получаем уравнение $\frac{2S}{n} = n - 2$ или $n^2 - 2n - 2S = 0$. Чтобы уравнение имело только натуральные корни необходимо, чтобы дискриминант $D = 4 + 8S = k^2$, где k – целое число. Для этого $1 + 2S$ должно быть квадратом целого числа. Для заданного в условии промежутка и условия, что S целое, подходит только S=12. Осталось проверить, что этому S соответствует натуральное решение полученного квадратного уравнения. Имеем D=100, $n_{1,2}=\frac{2\pm10}{2}$. Следовательно, количество студентов, первоначально участвовавших в закупке равно 6.

Критерии оценивания. Получено квадратное уравнение – 6 баллов. Сделан вывод, что дискриминант является квадратом целого числа +3 балла; если не проверено, что при найденном S получаем натуральное решение – минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (*12 баллов*) Все натуральные числа (в десятичной системе счисления) от 1 до 80 выписали подряд. Вычеркните из полученной последовательности 80 цифр так, чтобы полученное в результате вычеркивания число было наибольшим. Приведите это число.

Ответ: 999974849505152…7980.

Решение. Вычеркнем все цифры, не равные 9, до числа 39 (включительно). Вычеркнули 8+19+19+19=65 цифр. Осталось вычеркнуть 15 цифр. Среди следующих после числа 39 первых 15 цифр нет цифр 7, 8, 9. Поэтому вычеркиваем все цифры до цифры 7 в числе 47. Итак, вычёркиваем ровно 65+15=80 цифр. Полученное число наибольшее.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если правильно найдено количество 9 в начале числа, а затем неверно, то ставим 5 баллов.

3. (*13 баллов*) Существует ли многоугольник (не обязательно выпуклый) а) с 100 сторонами; б) с 99 сторонами, – такой, что все его стороны можно перечеркнуть одной прямой, не проходящей через его вершины. Ответ обоснуйте.

Ответ. а) да; б) нет.

Решение. а) Пример очевиден. б) Допустим, такие прямая и многоугольник существуют. Посадим букашку на прямую вне многоугольника и направим ее в сторону многоугольника с тем, чтобы она пересекла многоугольник и оказалась снова снаружи его. После пересечения первой стороны букашка окажется внутри многоугольника, после пересечения второй стороны – вне многоугольника, потом снова внутри, и т.д. После пересечения нечетной по счету стороны букашка окажется внутри многоугольника, в том числе после пересечения 99-й, последней стороны. Чтобы оказаться снаружи, ей надо пересечь еще одну сторону. Противоречие.

Критерии оценивания. Приведён пример в пункте а) – 5 баллов; получено противоречие в пункте б) – 8 баллов.

4. (*13 баллов*) Первый член числовой последовательности равен 4^{2024}, а каждый следующий равен сумме цифр предыдущего члена (в десятичной системе счисления). Чему равен пятый член этой последовательности?

Ответ. 7.

Решение. Все члены этой последовательности имеют одинаковый остаток при делении на 9. Заметим, что при делении на 9: 4^0 имеет одинаковый остаток с 1, 4^1 с 4, 4^2 с 7, 4^3 с 1, 4^4 с 4, и т.д. Происходит зацикливание, причём 4 в степени, делящейся на 3, имеет остаток 1 при делении на 9. Поэтому $4^{2024}=16\cdot4^{2022}$ имеет остаток 7 при делении на 9. Следовательно, все члены данной последовательности имеют остаток 7 при делении на 9.

Так как $4^{2024} < 10^{2024}$, то сумма цифр числа 4^{2024} меньше, чем $9\cdot2024$, т.е. меньше пятизначного числа, а сумма цифр пятизначного числа меньше, чем $9\cdot5=45$. Четвертый член последовательности меньше, чем сумма цифр двузначного числа, т.е. числа 18. Пятый член последовательности – однозначное число, имеющее остаток 7 при делении на 9.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов. Участник отметил, что остатки от деления на 9 одинаковые – 3 балла; найден остаток при делении на 9 числа 4^{2024} – ставим + 5 баллов. Доказано, что 5-й член последовательности однозначен +5 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Имеется два материала с плотностями ρ_1=2000 кг/м^3 и ρ_2=4000 кг/м^3. Из этих материалов было изготовлено два одинаковых по размерам цилиндрических провода. Радиусы проводов R=R_1=R_2=2 см. При этом внутренняя часть одного провода радиусом r=1 см сделана из менее плотного материала, а внешняя из более плотного. У второго провода – наоборот, при таком же размере внутренней части. Определите отношения масс m_1/m_2 этих проводов.

Ответ: 1,4.

Решение. Масса провода $m = \rho V$. **(2 балла)**

Объём внутренней части: $V_{\text{внут}} = S_{\text{внут}} h = \pi r^2 h$. **(2 балла)**

Объём внешней части: $V_{\text{внеш}} = S_{\text{внеш}} h = \pi(R^2 - r^2)h$. **(2 балла)**

Отношение масс проводов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1 V_{\text{внут}} + \rho_2 V_{\text{внеш}}}{\rho_2 V_{\text{внут}} + \rho_1 V_{\text{внеш}}} = \frac{\rho_1 \pi r^2 h + \rho_2 \pi (R^2 - r^2) h}{\rho_2 \pi r^2 h + \rho_1 \pi (R^2 - r^2) h} = \frac{\rho_1 r^2 + \rho_2 (R^2 - r^2)}{\rho_2 r^2 + \rho_1 (R^2 - r^2)}.$$ **(3 балла)**

В итоге получаем $\frac{m_1}{m_2}$ =1,4. **(1 балл)**

6. (*10 баллов*) В кастрюлю налили 2 л воды, взятой при температуре t=0^{0}С, и довели её до кипения за 10 мин. После этого, не снимая кастрюлю с плиты, добавили лёд при температуре t=0^{0}С. И в следующий раз вода начала кипеть только через 15 мин. Определите массу добавленного льда. Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{В}}$=4200 Дж/кг·^{0}С, удельная теплота плавления льда λ=3,3·10^5 Дж/кг, плотность воды ρ=1000 кг/м^3.

Ответ: 1,68 кг.

Решение: Масса исходной воды: $m_{\text{В}} = \rho V = 2$ кг. **(2 балла)**

Мощность плиты в первом случае: $P = \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} \Delta T}{t_1}$. **(2 балла)**

А во втором: $P = \frac{\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} \Delta T}{t_2}$. **(2 балла)**

Получаем: $\frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} \Delta T}{t_1} = \frac{\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} \Delta T}{t_2}$. **(1 балл)**

Откуда: $m_л = \frac{c_в m_в \Delta T t_2}{t_1(\lambda + c_в \Delta T)} = \frac{4200 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 15}{10 \cdot (330000 + 4200 \cdot 100)} = 1{,}68$ кг. **(3 балла)**

7. (*15 баллов*) Для того чтобы тело, полностью погруженное в жидкость, находилось в равновесии, к нему прикладывают силу F=2 Н. Определите плотность тела, если его объем V=1 л, а плотность жидкости $\rho_Ж$=1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения g=10 Н/кг.

Ответ: 800 кг/м^3 или 1200 кг/м^3.

Решение. Необходимо рассматривать две ситуации: **(1 балл)**

Первая – тело пытается всплыть. В этом случае условие равновесия:

$F_a = mg + F.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_ж gV = \rho_т Vg + F$,

$\rho_т = \frac{\rho_ж gV - F}{gV} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}001 - 2}{10 \cdot 0{,}001} = 800\ \frac{кг}{м^3}.$ **(3 балла)**

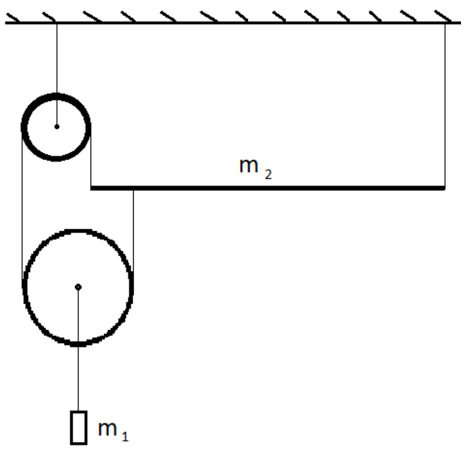
Вторая – тело пытается утонуть. В этом случае условие равновесия:

$F_a + F = mg.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_ж gV + F = \rho_т Vg$,

$\rho_т = \frac{\rho_ж gV + F}{gV} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0{,}001 + 2}{10 \cdot 0{,}001} = 1200\ \frac{кг}{м^3}.$ **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) Конструкция, изображённая на рисунке, находится в равновесии. Известно, что масса груза m_1=1 кг, длина однородного стержня l=50 см. Расстояние между точками крепления левой нити к стержню S=10 см. Определите массу m_2 стержня. Все нити невесомые и нерастяжимые. Блоки – невесомые.



Ответ: 0,2 кг.

Решение. Из условия равновесия для большого блока следует, что сила натяжения левой нити: $T_л = \frac{m_1 g}{2}$. **(5 баллов)**

Условие равновесия для стержня относительно точки крепления правой нити: $T_л \cdot l = T_л \cdot (l - S) + m_2 g \cdot \frac{1}{2} l$. **(5 баллов)**

В результате, получаем: $m_2 = \frac{m_1 S}{l} = \frac{1 \cdot 10}{50} = 0{,}2$ кг. **(5 баллов)**

8 класс **Заключительный тур** **2023-2024**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Несколько студентов, живущих в общежитии, решили в складчину купить «умную» колонку. Однако, в последний момент двое отказались участвовать и забрали свою долю денег, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести дополнительно по одной тысяче рублей, чтобы восстановить прежнюю сумму. Сколько стоит колонка, если известно, что она стоит целое число тысяч рублей и её цена заключена в промежутке от 3000 до 10000?

Ответ: 4000.

Решение. Пусть S тыс. рублей – стоимость колонки, а n – количество студентов, участвовавших в закупке первоначально. Тогда $\frac{S}{n}$ тыс. рублей – сумма, которую внёс каждый студент первоначально. Приравнивая сумму, которую забрали два студента к сумме, которую внесли оставшиеся, получаем уравнение $\frac{2S}{n} = n - 2$ или $n^2 - 2n - 2S = 0$. Чтобы уравнение имело только натуральные корни необходимо, чтобы дискриминант $D = 4 + 8S = k^2$, где k – целое число. Для этого $1 + 2S$ должно быть квадратом целого числа. Для заданного в условии промежутка и условия, что S целое, подходит только S=4. Осталось проверить, что этому S соответствует натуральное решение полученного квадратного уравнения. Имеем D=36, n=4. Следовательно, количество студентов, первоначально участвовавших в закупке, равно 4.

Критерии оценивания. Получено квадратное уравнение – 6 баллов. Сделан вывод, что дискриминант является квадратом целого числа +3 балла; если не проверено, что при найденном S получаем натуральное решение – минус 2 балла. Ответ угадан – 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (*12 баллов*) Все натуральные числа (в десятичной системе счисления) от 1 до 81 выписали подряд. Вычеркните из полученной последовательности 81 цифру так, чтобы полученное в результате вычеркивания число было наибольшим. Приведите это число.

Ответ: 99997849505152…798081.

Решение. Вычеркнем все цифры, не равные 9, до числа 39 (включительно). Вычеркнули 8+19+19+19=65 цифр. Осталось вычеркнуть 16 цифр. Среди следующих после числа 39 первых 15 цифр нет цифр 7, 8, 9. Поэтому вычеркиваем все цифры до цифры 7 в числе 47. Их 15 цифр. Осталось вычеркнуть одну цифру – цифру 4 в числе 48. Полученное число наибольшее.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если правильно найдено количество 9 в начале числа и следующая 7, а затем неверно, то ставим 5 баллов.

3. (*13 баллов*) Существует ли многоугольник (не обязательно выпуклый) а) с 80 сторонами; б) с 81 стороной, – такой, что все его стороны можно перечеркнуть одной прямой, не проходящей через его вершины. Ответ обоснуйте.

Ответ. а) да; б) нет.

Решение. а) Пример очевиден. б) Допустим, такие прямая и многоугольник существуют. Посадим букашку на прямую вне многоугольника и направим ее в сторону многоугольника с тем, чтобы она пересекла многоугольник и оказалась снова снаружи его. После пересечения первой стороны букашка окажется внутри многоугольника, после пересечения второй стороны – вне многоугольника, потом снова внутри, и т.д. После пересечения нечетной по счету стороны букашка окажется внутри многоугольника, в том числе после пересечения 99-й, последней стороны. Чтобы оказаться снаружи, ей надо пересечь еще одну сторону. Противоречие.

Критерии оценивания. Приведён пример в пункте а) – 5 баллов; получено противоречие в пункте б) – 8 баллов.

4. (*13 баллов*) Первый член числовой последовательности равен 7^{2024}, а каждый следующий равен сумме цифр предыдущего члена (в десятичной системе счисления). Чему равен пятый член этой последовательности?

Ответ. 4.

Решение. Все члены этой последовательности имеют одинаковый остаток при делении на 9. Заметим, что при делении на 9: 7^0 имеет одинаковый остаток с 1, 7^1 с 7, 7^2 с 4, 7^3 с 1, 7^4 с 7, и т.д. Происходит зацикливание, причем 7 в степени, делящейся на 3, имеет остаток 1 при делении на 9. Поэтому $7^{2024}=49\cdot7^{2022}$ имеет остаток 4 при делении на 9. Следовательно, все члены данной последовательности имеют остаток 4 при делении на 9.

Так как $7^{2024} < 10^{2024}$, то сумма цифр числа 7^{2024} меньше, чем $9\cdot2024$, т.е. меньше пятизначного числа, а сумма цифр пятизначного числа меньше, чем $9\cdot5=45$. Четвертый член последовательности меньше, чем сумма цифр двузначного числа, т.е. числа 18. Пятый член последовательности – однозначное число, имеющее остаток 4 при делении на 9.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов. Участник отметил, что остатки от деления на 9 одинаковые – 3 балла; найден остаток при делении на 9 числа 7^{2024} – ставим + 5 баллов. Доказано, что 5-й член последовательности однозначен +5 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Имеется два материала с плотностями ρ_1=1500 кг/м^3 и ρ_2=6000 кг/м^3. Из этих материалов было изготовлено два одинаковых по размерам цилиндрических провода. Радиусы проводов R=R_1=R_2=1 см. При этом внутренняя часть одного провода радиусом r=0,25 см сделана из менее плотного материала, а внешняя из более плотного. У второго провода – наоборот, при таком же размере внутренней части. Определите отношения масс m_1/m_2 этих проводов.

Ответ: 3,2.

Решение. Масса провода $m = \rho V$. **(2 балла)**

Объём внутренней части: $V_{\text{внут}} = S_{\text{внут}} h = \pi r^2 h$. **(2 балла)**

Объём внешней части: $V_{\text{внеш}} = S_{\text{внеш}} h = \pi (R^2 - r^2) h$. **(2 балла)**

Отношение масс проводов:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1 V_{\text{внут}} + \rho_2 V_{\text{внеш}}}{\rho_2 V_{\text{внут}} + \rho_1 V_{\text{внеш}}} = \frac{\rho_1 \pi r^2 h + \rho_2 \pi (R^2 - r^2) h}{\rho_2 \pi r^2 h + \rho_1 \pi (R^2 - r^2) h} = \frac{\rho_1 r^2 + \rho_2 (R^2 - r^2)}{\rho_2 r^2 + \rho_1 (R^2 - r^2)},$$ **(3 балла)**

В итоге получаем: $\frac{m_1}{m_2}$ =3,2. **(1 балл)**

6. (*10 баллов*) В кастрюлю налили 3 л воды, взятой при температуре t=0^{0}С, и довели её до кипения за 12 мин. После этого, не снимая кастрюлю с плиты, добавили лёд при температуре t=0^{0}С. И в следующий раз вода начала кипеть только через 15 мин. Определите массу добавленного льда. Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{В}}$=4200 Дж/кг·^{0}С, удельная теплота плавления льда λ=3,3·10^5 Дж/кг, плотность воды ρ=1000 кг/м^3.

Ответ: 2,1 кг.

Решение. Масса исходной воды: $m_{\text{В}} = \rho V = 3$ кг. **(2 балла)**

Мощность плиты в первом случае: $P = \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} \Delta T}{t_1}$. **(2 балла)**

А во втором: $P = \frac{\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} \Delta T}{t_2}$. **(2 балла)**

Получаем: $\frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} \Delta T}{t_1} = \frac{\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} \Delta T}{t_2}$. **(1 балл)**

Откуда: $m_{\text{л}} = \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} \Delta T t_2}{t_1 (\lambda + c_{\text{в}} \Delta T)} = \frac{4200 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 15}{12 \cdot (330000 + 4200 \cdot 100)} = 2,1$ кг. **(3 балла)**

7. (*15 баллов*) Для того чтобы тело, полностью погруженное в жидкость, находилось в равновесии, к нему прикладывают силу F=5 Н. Определите плотность тела, если его объём V=1 л, а плотность жидкости $\rho_Ж$=1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения g=10 Н/кг.

Ответ: 500 кг/м^3 или 1500 кг/м^3.

Решение. Необходимо рассматривать две ситуации: **(1 балл)**

Первая – тело пытается всплыть. В этом случае условие равновесия:

$F_a = mg + F.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_ж gV = \rho_т Vg + F,$

$\rho_т = \frac{\rho_ж gV - F}{gV} = \frac{1000\cdot10\cdot0{,}001-5}{10\cdot0{,}001} = 500\ \frac{кг}{м^3}.$ **(3 балла)**

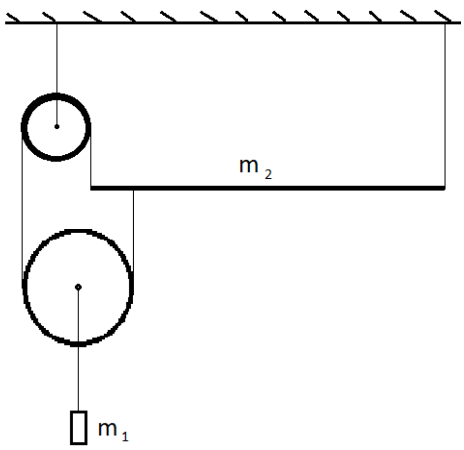
Вторая – тело пытается утонуть. В этом случае условие равновесия:

$F_a + F = mg.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_ж gV + F = \rho_т Vg,$

$\rho_т = \frac{\rho_ж gV + F}{gV} = \frac{1000\cdot10\cdot0{,}001+5}{10\cdot0{,}001} = 1500\ \frac{кг}{м^3}.$ **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) Конструкция, изображённая на рисунке, находится в равновесии. Известно, что масса однородного стержня m_2=2 кг, а его длина l=50 см. Расстояние между точками крепления левой нити к стержню S=10 см. Определите массу m_1 груза. Все нити невесомые и нерастяжимые. Блоки – невесомые.



Ответ: 10 кг.

Решение. Из условия равновесия для большого блока следует, что сила натяжения левой нити: $T_л = \frac{m_1 g}{2}.$ **(5 баллов)**

Условие равновесия для стержня относительно точки крепления правой нити: $T_л \cdot l = T_л \cdot (l - S) + m_2 g \cdot \frac{1}{2} l$. **(5 баллов)**

В результате, получаем: $m_1 = \frac{m_2 l}{S} = \frac{2 \cdot 50}{10} = 10$ кг. **(5 баллов)**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Все натуральные числа (в десятичной системе счисления) от 1 до 80 выписали подряд. Вычеркните из полученной последовательности 80 цифр так, чтобы полученное в результате вычеркивания число было наибольшим. Приведите это число.

Ответ: 999974849505152…7980.

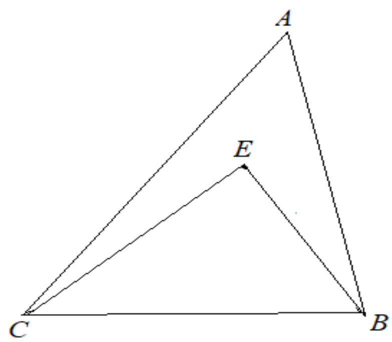
Решение. Вычеркнем все цифры, не равные 9, до числа 39 (включительно). Вычеркнули 8+19+19+19=65 цифр. Осталось вычеркнуть 15 цифр. Среди следующих после числа 39 первых 15 цифр нет цифр 7, 8, 9. Поэтому вычеркиваем все цифры до цифры 7 в числе 47. Итак, вычёркиваем ровно 65+15=80 цифр. Полученное число наибольшее.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если правильно найдено количество 9 в начале числа, а затем неверно, то ставим 5 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике *ABC* угол при вершине *A* равен 75°. Внутри *ABC* взята точка *E* так, что $\angle BCE = 2\angle ACE$ и $\angle CBE = 2\angle ABE$. Чему равен угол *BEC*?

Ответ. 110°.

Решение.



$$\angle BEC = 180^o - (\angle EBC + \angle ECB) = 180^o - \frac{2}{3}(\angle ABC + \angle ACB) =$$

$$180^o - \frac{2}{3}(180^o - \angle CAB) = 60^\circ + \frac{2}{3}\angle CAB = 60^\circ + \frac{2}{3}75^\circ = 110^\circ.$$

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Первый член последовательности равен трём. Каждый следующий член получен из предыдущего числа по правилу: число возводится в квадрат, у результата находится сумма цифр и к ней прибавляется 4. Например, на втором месте стоит число 13, так как сумма цифр числа 3^2 равна 9, а 9+4=13. Какое число этой последовательности находится на 2024-м месте?

Ответ. 14.

Решение. Последовательность имеет вид: 3; 13; 20; 8; 14; 20;…, то есть содержит цикл длины 3. Номер 2024 при делении на 3 имеет остаток 2. Число 14 имеет номер 5, который при делении на 3 тоже имеет остаток 2.

Критерии оценивания. Верно найдены несколько первых членов последовательности – 3 балла; замечено, что последовательность цикличная +3 балла, найдена длина цикла +1 балл. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Найдите знаменатель дроби, полученной после максимально возможного сокращения дроби

$$\frac{80!}{10^{80}},$$

где 80!=1·2·3·…·79·80.

Ответ. $2^2 \cdot 5^{61}$.

Решение. Имеем $80! = 2^{40+20+10+5+2+1} \cdot 5^{16+3} \cdot ... = 2^{78} \cdot 5^{19} \cdot ...$ Поэтому

$$\frac{80!}{10^{80}} = \frac{2^{78} \cdot 5^{19} \cdot ...}{2^{80} \cdot 5^{80}} = \frac{...}{2^2 \cdot 5^{61}}.$$

Критерии оценивания. Правильно найдено разложение знаменателя – 2 балла; верно найдены степень 2 в числителе + 6 баллов, степень 5 в числителе +4 балла; арифметические ошибки – минус 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Фокусник проделывает фокус: в стеклянный куб со стороной 3 м помещается герметичный ящик с параметрами 40×70×190 см. В стеклянном кубе имеется отверстие, в которое подается вода со скоростью 1650 л/мин. Фокуснику необходимо выбраться из ящика до момента, когда стеклянный куб заполнится водой полностью. Определите максимальное время, за которое фокуснику необходимо выполнить фокус. Полученное значение запишите в минутах, округлив до целого.

Ответ: 16 мин.

Решение. $V_{куба} = a^3 = (3м)^3 = 27\ м^3$; **(2 балла)**

$V_{ящика} = a_я \cdot b_я \cdot c_я = 40 \cdot 70 \cdot 190\ см^3 = 532000\ см^3$; **(2 балла)**

$532000\ см^3 = 0{,}532\ м^3$.

$V_{воды} = V_{куба} - V_{ящика} = (27 - 0{,}532)м^3 = 26{,}468\ м^3$; **(3 балла)**

$t = \frac{V_{воды}}{v} = \frac{26{,}468м^3}{1650\frac{л}{мин}} = \frac{26468\ л}{1650\frac{л}{мин}} \approx 16\ мин.$ **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Для съёмок документального исторического фильма строят русский терем. В летописях сказано: «Древний терем невелик, но крепок: длина терема всего 10 саженей, ширина – 12 аршинов, а высота – 12 локтей. На каждой стене терема имеется по 2 одинаковых окна размером 2 локтя на 3 локтя». Сколько пятилитровых банок краски понадобится, чтобы покрасить стены терема, если известно, что одного литра краски хватает на 5 $м^2$?

Примечание: 1 сажень = 1,8 м; 1 аршин =0,7 м; 1 локоть = 45 см.

Ответ: 12 банок.

Решение. Найдём длину терема в метрах: L = 10 саженей ·по 1,8 м = 18 м. **(1 балл)**

Найдём ширину терема в метрах: W = 12 аршинов по· 0,7 м = 8,4 м. **(1 балл)**

Найдём высоту терема в метрах: H = 12 локтей по 0,45 м = 5,4 м . **(1 балл)**

Найдём общую площадь стен: $S_{общ} = 2 \cdot L \cdot H + 2 \cdot W \cdot H = 285{,}12\ м^2$. **(1 балл)**

Найдём длину окна в метрах: a = 3 локтя·по 0,45 м = 1,35 м. **(1 балл)**

Найдём высоту окна в метрах: b = 2 локтя·по 0,45 м = 0,9 м **(1 балл)**

Найдём площадь окна: $S_{окна}$ = 0,9 м×1,35 м =1,215 $м^2$ **(1 балл)**

Найдём площадь покраски: $S_{покраски} = S_{общ} - 2 \cdot 4 \cdot S_{окна} = 275{,}4м^2$ **(1 балл)**

Найдём необходимый объём краски: $V_{краски} = 275{,}4м^2 / 5\ м^2 = 55{,}08л$ **(1 балл)**

Вычислим количество необходимых пятилитровых банок:

55,08л / 5 л = 11,016 банок, то есть 12 банок. **(1 балл)**

7. (*15 баллов*) Когда Петя прошёл ¼ тоннеля, то услышал, как ему сзади просигналил друг на велосипеде. В тоннеле нельзя было останавливаться, поэтому Петя решил дойти до края тоннеля, чтобы встретиться с другом. Если Петя пойдёт назад, то встретится с велосипедом у начала тоннеля. Если пойдёт вперед, то встретится с велосипедом у конца тоннеля. Во сколько раз скорость Пети меньше скорости велосипеда?

Ответ: в 2 раза.

Решение. Пусть S расстояние велосипеда до тоннеля, а L – длина тоннеля. Тогда $0{,}25L$ – расстояние, пройденное Петей от начала тоннеля, и $0{,}75L$ – расстояние, которое ему осталось пройти до конца тоннеля. Пусть v_1 – скорость Пети, v_2 – скорость велосипеда.

Если Петя пойдёт к началу тоннеля, тогда его пройденный путь будет равен: $S_1 = 0{,}25L = v_1t_1$, **(1 балл)**

а автомобиль за это же время проедет $S_2 = S = v_2t_2$. **(1 балл)**

Разделим первое уравнение на второе: $\frac{0{,}25L}{S} = \frac{v_1}{v_2}$. **(2 балла)**

Если Петя пойдёт к концу тоннеля, тогда его пройденный путь будет равен: $S_3 = 0{,}75L = v_1t_2$, **(1 балл)**

а автомобиль за это же время проедет $S_4 = S + L = v_2t_2$. **(1 балл)**

Получаем: $\frac{0{,}75L}{S+L} = \frac{v_1}{v_2}$. **(2 балла)**

В результате: $\frac{0{,}25L}{S} = \frac{0{,}75L}{S+L}$. Откуда $L = 2S$. **(4 балла)**

Окончательный ответ: $\frac{v_2}{v_1} = 2$. **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) На трубопрокатном заводе делают стальные трубы с добавлением титана. По стандарту титан должен составлять 30% от общей массы трубы, однако при изготовлении произошёл сбой, и была изготовлена труба с 30% содержанием титана от общего объёма. Во сколько раз плотность изготовленной трубы отличается от трубы, изготовленной по стандарту? Плотность стали $\rho_{ст}$ = 7,8 г/см^3, плотность титана $\rho_т$ = 4,5 г/см^3.

Ответ: 1,065.

Решение. Найдём среднюю плотность (ρ_1) стандартной трубы: $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$, где m_1 – общая масса сплава из стали и титана (то есть $m_1 = m_{ст} + m_т$), V_1 – общий объём сплава из стали и титана (то есть $V_1 = V_{ст} + V_т$).

Получаем $\rho_1 = \frac{m_1}{V_{ст} + V_т} = \frac{m_1}{\frac{m_{ст}}{\rho_{ст}} + \frac{m_т}{\rho_т}}$. **(1 балл)**

По условию известно, что в стандартной трубе $m_т = 0{,}3\ m_1$, **(1 балл)** то есть $m_1 = m_{cm} + 0{,}3\, m_1$, $m_{cm} = m_1 - 0{,}3\, m_1 = 0{,}7\, m_1$. **(1 балл)**

Таким образом $\rho_1 = \frac{m_1}{\frac{0{,}7\, m_1}{\rho_{\text{ст}}} + \frac{0{,}3\, m_1}{\rho_{\text{т}}}}$.

После преобразований получаем $\rho_1 = \frac{\rho_{\text{ст}}\rho_{\text{т}}}{0{,}7\rho_{\text{т}} + 0{,}3\rho_{\text{ст}}}$. **(3 балла)**

Найдём среднюю плотность (ρ_2) изготовленной трубы: $\rho_2 = \frac{m_2}{V_2}$, где m_2 – общая масса сплава из стали и титана (то есть $m_2 = m'_{\text{ст}} + m'_{\text{т}}$), V_1 – общий объём сплава из стали и титана (то есть $V_2 = V'_{\text{ст}} + V'_{\text{т}}$).

Получаем $\rho_2 = \frac{m'_{\text{ст}} + m'_{\text{т}}}{V_2} = \frac{\rho_{\text{ст}}V'_{\text{ст}} + \rho_{\text{т}}V'_{\text{т}}}{V_2}$. **(1 балл)**

По условию известно, что в изготовленной трубе $V'_{\text{т}} = 0{,}3V_2$, **(1 балл)**

то есть $V_2 = V'_{\text{ст}} + 0{,}3V_2$, $V'_{\text{ст}} = V_2 - 0{,}3V_2 = 0{,}7V_2$. **(1 балл)**

Таким образом, $\rho_2 = \frac{\rho_{\text{ст}}0{,}7V_2 + \rho_{\text{т}}0{,}3V_2}{V_2}$.

После преобразований получаем $\rho_2 = 0{,}7\rho_{\text{ст}} + 0{,}3\rho_{\text{т}}$. **(3 балла)**

Найдём отношение $\frac{\rho_2}{\rho_1}$: $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{0{,}7\rho_{\text{ст}} + 0{,}3\rho_{\text{т}}}{\frac{\rho_{\text{ст}}\rho_{\text{т}}}{0{,}7\rho_{\text{т}} + 0{,}3\rho_{\text{ст}}}} = \frac{(0{,}7\rho_{\text{ст}} + 0{,}3\rho_{\text{т}})(0{,}7\rho_{\text{т}} + 0{,}3\rho_{\text{ст}})}{\rho_{\text{ст}}\rho_{\text{т}}} = 1{,}065.$

(3 балла)

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Все натуральные числа (в десятичной системе счисления) от 1 до 81 выписали подряд. Вычеркните из полученной последовательности 81 цифру так, чтобы полученное в результате вычеркивания число было наибольшим. Приведите это число.

Ответ: 99997849505152…798081.

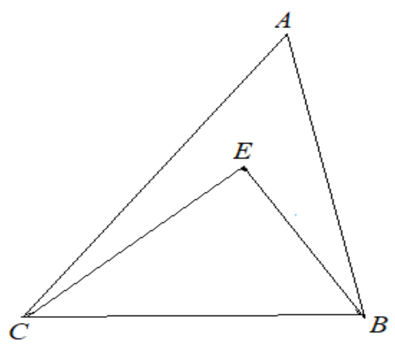
Решение. Вычеркнем все цифры, не равные 9, до числа 39 (включительно). Вычеркнули 8+19+19+19=65 цифр. Осталось вычеркнуть 16 цифр. Среди следующих после числа 39 первых 15 цифр нет цифр 7, 8, 9. Поэтому вычеркиваем все цифры до цифры 7 в числе 47. Их 15 цифр. Осталось вычеркнуть одну цифру – цифру 4 в числе 48. Полученное число будет наибольшим.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если найдено правильно количество 9 в начале числа и следующая 7, а затем неверно, то ставим 5 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике *ABC* угол при вершине *A* равен 60°. Внутри *ABC* взята точка *E* так, что $\angle BCE = 2\angle ACE$ и $\angle CBE = 2\angle ABE$. Чему равен угол *BCE*?

Ответ. 100°.

Решение.



$$\angle BEC = 180^o - (\angle EBC + \angle ECB) = 180^o - \frac{2}{3}(\angle ABC + \angle ACB) =$$

$$180^o - \frac{2}{3}(180^o - \angle CAB) = 60^\circ + \frac{2}{3}\angle CAB = 60^\circ + \frac{2}{3}60^\circ = 100^\circ.$$

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Первый член последовательности равен четырём. Каждый следующий член получен из предыдущего числа по правилу: число возводится в квадрат, у результата находится сумма цифр и к ней прибавляется 4. Например, на втором месте стоит число 11, так как сумма цифр числа 4^2 равна 7, а 7+4=11. Какое число этой последовательности находится на 2024-м месте?

Ответ. 20.

Решение. Последовательность имеет вид: 4; 11; 8; 14; 20; 8;…, то есть содержит цикл длины 3. Номер 2024 при делении на 3 имеет остаток 2. Число 20 имеет номер 5, который при делении на 3 тоже имеет остаток 2.

Критерии оценивания. Верно найдены несколько первых членов последовательности – 3 балла; замечено, что последовательность цикличная +3 балла, найдена длина цикла +1 балл. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Найдите знаменатель дроби, полученной после максимально возможного сокращения дроби

$$\frac{81!}{10^{81}},$$

где 81!=1·2·3·…·80·81.

Ответ. $2^3 \cdot 5^{62}$.

Решение. Имеем $81! = 2^{40+20+10+5+2+1} \cdot 5^{16+3} \cdot ... = 2^{78} \cdot 5^{19} \cdot ...$ Поэтому

$$\frac{80!}{10^{81}} = \frac{2^{78} \cdot 5^{19} \cdot ...}{2^{81} \cdot 5^{81}} = \frac{...}{2^3 \cdot 5^{62}}.$$

Критерии оценивания. Правильно найдено разложение знаменателя – 2 балла; верно найдены степень 2 в числителе + 6 баллов, степень 5 в числителе +4 баллов; арифметические ошибки – минус 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) Фокусник проделывает фокус: в стеклянный куб со стороной 2 м помещается герметичный ящик с параметрами 45×80×180 см. В стеклянном кубе имеется отверстие, в которое подается вода со скоростью 1050 л/мин. Фокуснику необходимо выбраться из ящика до момента, когда стеклянный куб заполнится водой полностью. Определите максимальное время, за которое фокуснику необходимо выполнить фокус. Полученное значение запишите в минутах, округлив до целого.

Ответ: 7 мин.

Решение. $V_{куба} = a^3 = (2м)^3 = 8\ м^3$; **(2 балла)**

$V_{ящика} = a_я \cdot b_я \cdot c_я = 45 \cdot 80 \cdot 180\ см^3 = 648000\ см^3$, **(2 балла)**

$648000\ см^3 = 0{,}648\ м^3$.

$V_{воды} = V_{куба} - V_{ящика} = (8 - 0{,}648)м^3 = 7{,}352\ м^3$; **(3 балла)**

$t = \frac{V_{воды}}{v} = \frac{7{,}352 м^3}{1050 \frac{л}{мин}} = \frac{7352\ л}{1050 \frac{л}{мин}} \approx 7$ мин. **(3 балла)**

6. (*10 баллов*) Для съёмок документального исторического фильма строят русский терем. В летописях сказано: «Древний терем невелик, но крепок: длина терема всего 10 саженей, ширина – 15 аршинов, а высота – 10 локтей. На стенах терема имеются одинаковые окна размером 4 локтя на 3 локтя». Сколько окон в тереме, если для покраски стен израсходовали 51 литр краски? Одного литра краски хватает на 5 м^2.

Примечание: 1 сажень = 1,8 м; 1 аршин =0,7 м; 1 локоть = 50 см.

Ответ: 10 окон.

Решение. Найдём длину терема в метрах: L = 10 саженей по· 1,8 м = 18 м. **(1 балл)**

Найдём ширину терема в метрах: W = 15 аршинов ·по 0,7 м = 10,5 м. **(1 балл)**

Найдём высоту терема в метрах: H = 10 локтей по 0,5 м = 5 м. **(1 балл)**

Найдём общую площадь стен: $S_{общ} = 2 \cdot L \cdot H + 2 \cdot W \cdot H = 285$ м^2. **(1 балл)**

Найдём длину окна в метрах: a = 3 локтя по·0,5 м = 1,5 м. **(1 балл)**

Найдём высоту окна в метрах: b = 4 по·0,5 м = 2 м. **(1 балл)**

Найдём площадь окна: $S_{окна}$ = 2 м ×·1,5 м = 3 м^2. **(1 балл)**

Найдём, на сколько м^2 хватило 51 л краски (то есть найдём площадь покраски): $S_{покраски}$ = $V_{краски}$·×5 м^2 = 51 л × 5 м^2 = 255 м^2. **(1 балл)**

Найдём разность между общей площадью стен и площадью покраски: $S_{покраски} = S_{общ} - n \cdot S_{окна}$, где n – количество окон. **(1 балл)**

Вычислим n: $n = (S_{общ} - S_{покраски})/S_{окна}$ = (285 м^2 – 255 м^2)/3 м^2 = 10. **(1 балл)**

7. (*15 баллов*) Когда Вова шёл по тоннелю, то услышал, как ему сзади сигналит отец на автомобиле. В тоннеле нельзя останавливаться, поэтому Вова решил дойти до края тоннеля, чтобы сесть в автомобиль. Если Вова пойдёт назад, то встретится с автомобилем у начала тоннеля. Если пойдёт вперед, то встретится с автомобилем у конца тоннеля. Какую часть тоннеля прошёл Вова до того, как услышал сигнал автомобиля? Известно, что его скорость в 4 раза меньше скорости автомобиля.

Ответ: 0,375.

Решение. По условию известно, что $v_2 = 4v_1$.Если Вова пойдёт к началу тоннеля, тогда его пройденный путь будет равен $S_1 = nL = V_1 \cdot t_1$ (1), **(1 балл)**

где n – искомая часть моста. За это же время автомобиль проедет $S_2 = S = V_2 \cdot\cdot\ t_1$. (2) **(2 балла)**

Разделим первое уравнение на второе $nL/S = V_1/V_2$. (3) **(2 балла)**

Если Вова пойдёт к концу моста, тогда его пройденный путь будет равен $S_3 = (1–n) \cdot\cdot L = V_1 \cdot t_2$.(4) **(2 балла)**

За это время автомобиль проедет $S_4 = S + L = V_2 – t_2$.(5) **(2 балла)**

Разделим четвёртое уравнение на пятое: $(1–n)L/(S + L) = V_1/V_2$.(6) **(2 балла)**

Приравняем левые части третьего и шестого уравнений: $nL/S=(1–n)L/(S + L)$. **(2 балла)**

$nS + nL = S – nS$, $nL = S(1–2n)$, $S(1–2n)/S = V_1/V_2$, $1–2n = V_1/V_2 = 0{,}25$,

$2n = 0{,}75$. В итоге получаем $n = 0{,}375$. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) На трубопрокатном заводе делают титановые трубы с добавлением алюминия. По стандарту алюминий должен составлять 25% от общей массы трубы, однако при изготовлении произошёл сбой, и была изготовлена труба с 25% содержанием алюминия от общего объёма. Во сколько раз плотность изготовленной трубы отличается от трубы, изготовленной по стандарту? Плотность алюминия $\rho_{ал}$ = 2,7 г/см^3, плотность титана $\rho_т$ = 4,5 г/см^3.

Ответ: 1,05.

Решение. Найдём среднюю плотность (ρ_1) стандартной трубы: $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$, где m_1 – общая масса сплава из алюминия и титана (то есть $m_1 = m_{ал} + m_т$), V_1 – общий объём сплава из алюминия и титана (то есть $V_1 = V_{ал} + V_т$).

Получаем $\rho_1 = \frac{m_1}{V_{ал} + V_т} = \frac{m_1}{\frac{m_{ал}}{\rho_{ал}} + \frac{m_т}{\rho_т}}$. **(1 балл)**

По условию известно, что в стандартной трубе $m_{ал} = 0{,}25\ m_1$, **(1 балл)**

то есть $m_1 = m_Т + 0{,}25\ m_1$, $m_Т = m_1 – 0{,}25\ m_1 = 0{,}75\ m_1$. **(1 балл)**

Таким образом, $\rho_1 = \frac{m_1}{\frac{0{,}75\ m_1}{\rho_т} + \frac{0{,}25\ m_1}{\rho_{ал}}}$. После преобразований получаем $\rho_1 = \frac{\rho_т \rho_{ал}}{0{,}75\rho_{ал} + 0{,}25\rho_т}$. **(3 балла)**

Найдём среднюю плотность (ρ_2) изготовленной трубы: $\rho_2 = \frac{m_2}{V_2}$, где m_2 – общая масса сплава из стали и титана (то есть $m_2 = m'_{ал} + m'_{т}$), V_1 – общий объём сплава из стали и титана (то есть $V_2 = V'_{ал} + V'_{т}$).

Получаем $\rho_2 = \frac{m'_{ал} + m'_{т}}{V_2} = \frac{\rho_{ал}V'_{ал} + \rho_{т}V'_{т}}{V_2}$. **(1 балл)**

По условию известно, что в изготовленной трубе $V'_{ал} = 0{,}25V_2$, **(1 балл)**

то есть $V_2 = V'_{т} + 0{,}25V_2$, $V'_{т} = V_2 - 0{,}25V_2 = 0{,}75V_2$. **(1 балл)**

Таким образом, $\rho_2 = \frac{\rho_{т}0{,}75V_2 + \rho_{ал}0{,}25V_2}{V_2}$. После преобразований получаем $\rho_2 = 0{,}75\rho_{т} + 0{,}25\rho_{ал}$. **(3 балла)**

Найдём отношение $\frac{\rho_2}{\rho_1}$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{0{,}75\rho_{т} + 0{,}25\rho_{ал}}{\frac{\rho_{т}\rho_{ал}}{0{,}75\rho_{ал} + 0{,}25\rho_{т}}} = \frac{(0{,}75\rho_{т} + 0{,}25\rho_{ал})(0{,}75\rho_{ал} + 0{,}25\rho_{т})}{\rho_{т}\rho_{ал}} = 1{,}05.$$ **(3 балла)**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

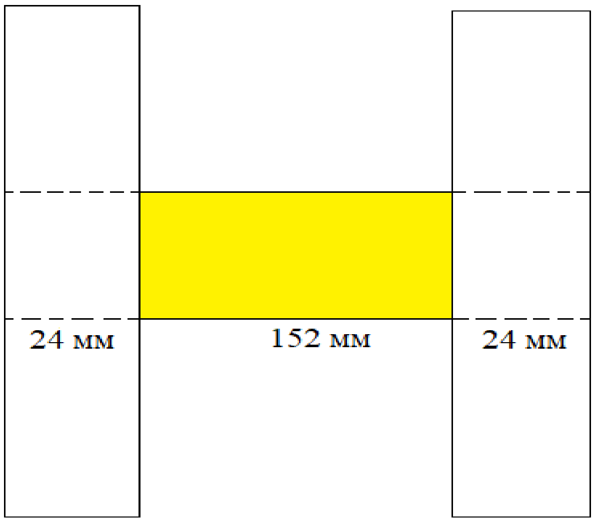
1. (*12 баллов*) Можно ли число 133 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже равнялось бы числу 133? Ответ объясните.

Решение. Пример: 1+1+1+…+1+7+19=133. Здесь 107 единиц. Произведение всех этих чисел равно 133.

Критерии оценивания. Найдено разложение числа 133 на множители – 3 балла. Приведён верный пример – 12 баллов. Если не сказано, сколько единиц в сумме, то минус 4 балла.

2. (*13 баллов*) Стальную плитку размером $200\,мм \times 24\,мм$ обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, используя только эту плитку и карандаш. (Центром прямоугольника является точка пересечения его диагоналей).

Решение. На каждой из больших сторон прямоугольника отложим от концов по 24 *мм*, используя ширину прямоугольника.



Получим новый прямоугольник $152\,мм \times 24\,мм$, центр которого совпадает с центром исходного. Длина его диагонали меньше суммы длин его двух разных сторон, то есть числа 176, а значит, меньше стороны данной плитки. Поэтому можно провести диагонали в новом прямоугольнике с помощью данной плитки и получить искомую точку.

Критерии оценивания. Предложен верный алгоритм нахождения центра прямоугольника – 13 баллов. Доказательства, что центр не изменится, не требуем. Баллы за отсутствие формального обоснования (неравенство треугольника и т.д.) не снимаем.

3. (*12 баллов*) Туристическое агентство составляет 6 маршрутов по городам России. В каждый маршрут должны войти семь городов, причём только четыре города не встречаются ни в одном другом маршруте. Какое максимальное число городов можно включить во все 6 маршрутов?

Ответ: 33.

Решение. Для того чтобы число городов было максимальным, повторяющиеся города должны встречаться минимальное число раз. Число неповторяющихся городов $6 \cdot 4 = 24$. Оставшиеся три города будут встречаться еще в каком-нибудь маршруте, чтобы число городов было максимальным, города должны повторяться только в двух маршрутах, поэтому число повторяющихся городов равно $6 \cdot 3 : 2 = 9$, тогда городов $24 + 9 = 33$.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Верно найдено количество неповторяющихся городов – 6 баллов. Отмечено, что повторяющиеся города только в двух маршрутах – ещё + 2 балла, найдено верно их количество +2 балла, есть арифметическая ошибка минус 2 балла.

4. (*13 баллов*) Докажите, что если в последовательности

$$1*9*4*3*6*8*6*2*0*2*4$$

вместо звёздочек поставить цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу в любом порядке, получится число, делящееся, на 198. Верно ли, что любое такое число делится на 396? Ответ объясните.

Ответ: Нет.

Решение. Сумма цифр, стоящих на нечетных местах у полученного числа, равна 45. Сумма цифр, стоящих на четных местах у полученного числа, то есть на местах звездочек, тоже равна 45. По признаку делимости на 11, полученное число делится на 11. Сумма всех цифр полученного числа равна 90, поэтому число делится на 9 по признаку делимости на 9. Отсюда данное число делится на $2 \cdot 9 \cdot 11 = 198$. Если вместо последней звездочки поставить нечетное число, то полученное число не будет делиться на 4 и, следовательно, на 396.

Критерии оценивания. Верное доказательство делимости числа на 198 – 8 баллов. Приведён контрпример для второго вопроса – 5 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) В Древней Руси мерой массы воска при продаже в другие страны являлся берковец (1 берковец равен 164 кг), продажа производилась в бочках (1 бочка=0,492 м^3). Известно, что плотность воска ρ=810 кг/м^3 (плотность – это величина равная отношению массы тела m, к его объему V). Запишите плотность воска в берковец на бочку.

Ответ: $2{,}43\ \frac{\text{берковец}}{\text{бочка}}$.

Решение. 1 кг=1/164 берковец ; **(3 балла)**

1м^3=1/0,492 бочки ; **(3 балла)**

$810\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 810 \cdot \frac{\frac{1}{164}\text{берковец}}{\frac{1}{0{,}492}\text{бочки}} = 2{,}43\ \frac{\text{берковец}}{\text{бочка}}$. **(4 балла)**

6. (*10 баллов*) При нагреве воды на электроплите изменение температуры ΔT прямо пропорционально времени нагрева, мощности плитки и обратно пропорционально её массе. Если время нагрева увеличить на 50%, мощность плитки увеличить на 25% и массу воды уменьшить на 50%, то на сколько процентов будет отличаться изменение температуры воды по сравнению с первоначальной ситуацией? Считайте, что температура кипения не достигается в обоих случаях.

Ответ: на 275%.

Решение. По условию: $\Delta T = \frac{cPt}{m}$, где c=const. **(3 балла)**

Во втором случае: $\Delta T_2 = \frac{c\cdot 1{,}25P\cdot 1{,}5t}{0{,}5m} = 3{,}75\frac{cPt}{m} = 3{,}75\Delta T$. **(3 балла)**

То есть изменение температуры во втором случае будет больше на 275%.

(4 балла)

7. (*15 баллов*) Автомобиль выехал из города X в 17:46 со скоростью 20 м/с в город Y. В 17:56 в том же направлении выехал второй автомобиль. Через 17 мин расстояние между автомобилями оказалось равным 600 м. Определите скорость второго автомобиля. Полученное значение запишите в метрах на секунду, округлив до целого.

Ответ: 31 м/с; 32 м/с.

Решение. $t_1 = 10\ \text{мин} = 600\ \text{с}$ – время движения первого автомобиля до момента, когда выехал второй автомобиль. **(2 балла)**

$t = 17\ \text{мин} = 17 \cdot 60\ \text{с} = 1020\ \text{с}$, $t_2 = t_1 + t = 600 + 1020 = 1620\ \text{с}$ – время движения первого автомобиля. **(2 балла)**

$S_1 = v_1 \cdot t_2 = 20\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1620\text{с} = 32400\text{м}$ – путь, пройденный первым автомобилем.

(3 балла)

Случай 1: $S_2 = S_1 - S = 32400 - 600 = 31800\ \text{м}$, $v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{31800\ \text{м}}{1020\ \text{с}} \approx 31\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

(4 балла)

Случай 2: $S_2 = S_1 + S = 32400 + 600 = 33000$ м, $v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{33000 \text{ м}}{1020 \text{ с}} \approx 32 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

(4 балла)

8. (*15 баллов*) Лыжник, готовясь к старту зимних соревнований, занимался на лыжной трассе, состоящей из двух участков, длины которых отличаются в два раза. После прохождения всей дистанции оказалось, что средняя скорость лыжника составляет 27 км/ч, при этом на втором участке он развил скорость в 1,5 раза больше, чем на первом. Определите скорость лыжника на первом участке трассы.

Ответ: 21 км/ч.

Решение. $v_{\text{ср}} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}$; **(2 балла)**

$t_1 = \frac{S_1}{v_1}$; $t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{2S_1}{1{,}5v_1}$; **(4 балла)**

$v_{\text{ср}} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2} = \frac{S_1+2S_1}{\frac{S_1}{v_1}+\frac{2S_1}{1{,}5v_1}} = \frac{3S_1}{\frac{3{,}5S_1}{1{,}5v_1}} = \frac{4{,}5v_1}{3{,}5} = \frac{9}{7}v_1$; **(5 баллов)**

$v_1 = \frac{7}{9}v_{\text{ср}} = \frac{7}{9} \cdot 27 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **(4 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

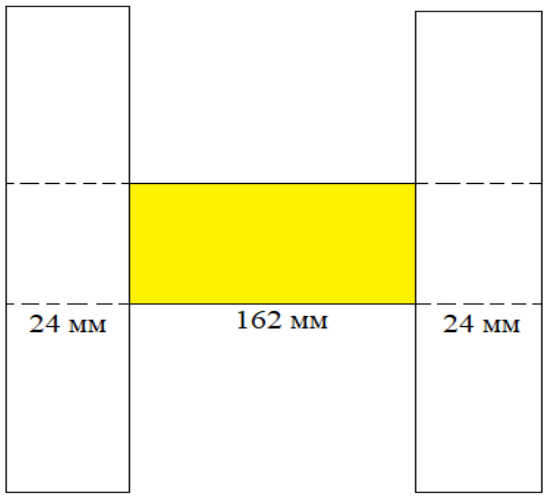
1. (*12 баллов*) Можно ли число 187 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже равнялось бы числу 187? Ответ объясните.

Решение. Пример: 1+1+1+…+1+11+17=187. Здесь 159 единиц. Произведение всех этих чисел равно 187.

Критерии оценивания. Найдено разложение числа 187 на множители – 3 балла. Приведён верный пример – 12 баллов. Если не сказано, сколько единиц в сумме, то минус 4 балла.

2. (*13 баллов*) Стальную плитку размером $210\,мм \times 24\,мм$ обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, используя только эту плитку и карандаш.

Решение. На каждой из больших сторон прямоугольника отложим от концов по 24 *мм*, используя ширину прямоугольника.



Получим новый прямоугольник $162\,мм \times 24\,мм$, центр которого совпадает с центром исходного. Длина его диагонали меньше суммы длин его двух разных сторон, то есть числа 186, а значит, меньше стороны данной плитки. Поэтому можно провести диагонали в новом прямоугольнике с помощью плитки и получить искомую точку.

Критерии оценивания. Предложен верный, обоснованный алгоритм нахождения центра прямоугольника – 13 баллов. Доказательства, что центр не изменится, не требуем. Баллы за отсутствие формального обоснования (неравенство треугольника и т.д.) не снимаем.

3. (*12 баллов*) Туристическое агентство составляет 8 маршрутов по городам России. В каждый маршрут должны войти семь городов, причём только четыре города не встречаются ни в одном другом маршруте. Какое максимальное число городов можно включить во все 8 маршрутов?

Ответ: 44.

Решение. Для того чтобы число городов было максимальным, повторяющиеся города должны встречаться минимальное число раз. Число неповторяющихся городов 8·4=32. Оставшиеся три города будут встречаться еще в каком-нибудь маршруте, чтобы число городов было максимальным, города должны повторяться только в двух маршрутах, поэтому число повторяющихся городов равно 8·3:2=12, тогда городов 32+12=44.

4. (*13 баллов*) Докажите, что если в последовательности

$$1*9*4*3*7*6*7*2*0*2*4$$

вместо звёздочек поставить цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу в любом порядке, получится число, делящееся, на 198. Верно ли, что любое такое число делится на 396? Ответ объясните.

Ответ: Нет.

Решение. Сумма цифр, стоящих на нечетных местах у полученного числа, равна 45. Сумма цифр, стоящих на четных местах у полученного числа, то есть на местах звездочек, тоже равна 45. По признаку делимости на 11, полученное число делится на 11. Сумма всех цифр полученного числа равна 90, поэтому число делится на 9 по признаку делимости на 9. Отсюда данное число делится на $2\cdot 9\cdot 11=198$. Если вместо последней звездочки поставить нечетное число, то полученное число не будет делиться на 4 и, следовательно, на 396.

Критерии оценивания. Верное доказательство делимости числа на 198 – 8 баллов. Приведён контрпример для второго вопроса – 5 баллов.

Уважаемые коллеги! При проверке работ, не забывайте учитывать, что у участников олимпиады не было калькулятора. При сложных расчетах допускается разумное отклонение от авторского ответа.

5. (*10 баллов*) В Древней Руси мерой массы мёда при продаже в другие страны являлся берковец (1 берковец равен 164 кг), продажа производилась в бочках (1 бочка=0,492 м^3). Известно, что плотность мёда ρ=1450 кг/м^3 (плотность – это величина равная отношению массы тела m, к его объему V). Запишите плотность мёда в берковец на бочку.

Ответ: $4,35\ \frac{\text{берковец}}{\text{бочка}}$.

Решение. 1 кг=1/164 берковец; **(3 балла)**

1м^3=1/0,492 бочки ; **(3 балла)**

$1450\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1450 \cdot \frac{\frac{1}{164}\text{берковец}}{\frac{1}{0,492}\text{бочки}} = 4,35\ \frac{\text{берковец}}{\text{бочка}}$ **(4 балла)**

6. (*10 баллов*) При нагреве воды на электроплите изменение температуры ΔT прямо пропорционально времени нагрева, мощности плитки и обратно пропорционально её массе. Если время нагрева увеличить на 40%, мощность плитки увеличить на 30% и массу воды уменьшить на 20%, то на сколько процентов будет отличаться изменение температуры воды по сравнению с первоначальной ситуацией? Считайте, что температура кипения не достигается в обоих случаях.

Ответ: на 127,5%.

Решение. По условию: $\Delta T = \frac{cPt}{m}$, где c=const. **(3 балла)**

Во втором случае: $\Delta T_2 = \frac{c \cdot 1,3P \cdot 1,4t}{0,8m} = 2,275\frac{cPt}{m} = 2,275\Delta T$. **(3 балла)**

То есть изменение температуры во втором случае будет больше на 127,5%.

(4 балла)

7. (*15 баллов*) Автомобиль выехал из города *X* в 13:23 со скоростью 25 м/с в город *Y*. В 13:29 в том же направлении выехал второй автомобиль. Через 15 мин расстояние между автомобилями оказалось равным 1500 м. Определите скорость второго автомобиля. Полученное значение запишите в метрах на секунду, округлив до целого.

Ответ: 33 м/с; 37 м/с.

Решение. $t_1 = 6\ \text{мин} = 360\ \text{с}$ – время движения первого автомобиля до момента, когда выехал второй автомобиль; **(2 балла)**

$t = 15\ \text{мин} = 15 \cdot 60\ \text{с} = 900\ \text{с}$, $t_2 = t_1 + t = 360 + 900 = 1260\ \text{с}$ – время движения первого автомобиля; **(2 балла)**

$S_1 = v_1 \cdot t_2 = 25\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1260\text{с} = 31500\text{м}$ – путь, пройденный первым автомобилем.

(3 балла)

Случай 1: $S_2 = S_1 - S = 31500 - 1500 = 30000\ \text{м}$, $v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{30000\ \text{м}}{900\ \text{с}} \approx 33\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

(4 балла)

Случай 2: $S_2 = S_1 + S = 31500 + 1500 = 33000\ \text{м}$, $v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{33000\ \text{м}}{900\ \text{с}} \approx 37\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

(4 балла)

8. (*15 баллов*) Лыжник, готовясь к старту зимних соревнований, занимался на лыжной трассе, состоящей из двух участков, длины которых отличаются в три раза. После прохождения всей дистанции оказалось, что средняя скорость лыжника составляет 32 км/ч, при этом на втором участке он развил скорость в 1,2 раза больше, чем на первом. Определите скорость лыжника на первом участке трассы.

Ответ: 28 км/ч.

Решение. $v_{\text{ср}} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}$; **(2 балла)**

$t_1 = \frac{S_1}{v_1}$; $t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{3S_1}{1{,}2v_1}$; **(4 балла)**

$v_{\text{ср}} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2} = \frac{S_1+3S_1}{\frac{S_1}{v_1}+\frac{3S_1}{1{,}2v_1}} = \frac{4S_1}{\frac{4{,}2S_1}{1{,}2v_1}} = \frac{4{,}8v_1}{4{,}2} = \frac{8}{7}v_1$; **(5 баллов)**

$v_1 = \frac{7}{8}v_{\text{ср}} = \frac{7}{8}\cdot 32\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 28\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **(4 балла)**