Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (11 баллов) Решите неравенство

$$9\sqrt{2-\log_2 x}-2|4\log_2 x-7|\le 9\log_2 x-2\left|4\sqrt{2-\log_2 x}-7\right|.$$

Ответ: $[2;4]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$9\sqrt{2-\log_2 x}+2\left|4\sqrt{2-\log_2 x}-7\right|\le 9\log_2 x+2|4\log_2 x-7|.$$

Пусть $f(t)=9t+2|4t-7|$. Тогда неравенство принимает вид:

$f\left(\sqrt{2-\log_2 x}\right)\le f(\log_2 x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрывании модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-\log_2 x}\le \log_2 x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему $\begin{cases}2-\log_2 x\ge 0,\\ \log_2 x\ge 0,\\ 2-\log_2 x\le \log_2^2 x.\end{cases}$ Получаем $x\in[2;4]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 11 баллов.

2. (13 баллов) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 8×12. У него 3 краски: белая, серая, черная. Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании клеток, он раскрасит прямоугольник так, что соседние клетки в нём будут разного цвета, но при этом не будет резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не будут соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона).

Ответ: $\frac{2^{49}}{3^{96}}$.

Решение. Применим формулу классической вероятности $p=\frac{m}{n}$, где общее число возможных исходов $n=3^{96}$, так как всего в прямоугольнике 96 клеток, и каждую клетку можно окрасить в 3 цвета. Найдём количество благоприятных исходов – m. Для этого перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 48 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{48}, а всего $m=2^{49}$.

Критерии оценивания. Верно найдено n – 3 балла. Для нахождения m белые и чёрные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 6 баллов. Найдено верно m, а n – неверно, это 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (13 баллов) Известно, что функция $f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$ принимает неотрицательные значения для всех x. Найдите наименьшее значение выражения $2a + b + 1$.

Ответ: 3.

Решение. Так как $f(x)$ принимает неотрицательные значения для всех x, то $(a+1)^2 \leq 4ab, a > 0$. Получаем $b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$, построим оценку:

$$2a + b + 1 \geq 2a + \frac{(a+1)^2}{4a} + 1 = \frac{8a^2 + (a+1)^2 + 4a}{4a} = \frac{9a^2 + 6a + 1}{4a} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{9a^2+1}{4a} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9a^2}}{2a} = 3,$$

причём равенство достигается, при $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$.

Критерии оценивания. Отмечено, что должны выполняться неравенства $D \leq 0, a > 0$ – по 1 баллу за каждое неравенство. Ответ угадан – 2 балла, найдена верная оценка значений данного выражения – 9 баллов. Приведены верные значения для a, b без оценки – 4 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (13 баллов) Прямоугольный параллелепипед размером 6×7×11, разбитый на единичные кубики, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков проткнула игла?

Ответ: 22.

Решение. Параллелепипед разрезан на единичные кубики плоскостями трёх семейств, в каждое из которых входят все плоскости, параллельные какой-то грани. Количество этих плоскостей – 5, 6 и 10 соответственно. Заметим, что игла не прокалывает две плоскости из разных семейств в одной точке, пусть в M. Действительно, в таком случае проекция иглы на грань α третьего семейства была бы её диагональю, на которой есть целочисленная точка P – проекция точки M на α. Но очевидно, что если целочисленная точка лежит на диагонали целочисленного прямоугольника внутри его, то стороны прямоугольника не взаимно просты. Итак, игла прокалывает 5, 6 и 11 плоскостей в разных точках, поэтому на игле $5 + 6 + 10 = 21$ следов её пересечения с гранями кубиков, поэтому количество прокалываемых кубиков равно $21 + 1 = 22$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Отмечено, но не показано, что игла пересекает грани кубиков в разных точках, 10 балов. Если это даже не упомянуто, но приведена схема решения и получен правильный ответ, то 8 баллов.

5. (10 баллов) Положительно заряженная частица, масса которой m и заряд q, двигаясь вертикально вверх со скоростью v, в момент времени t=0 на высоте h попала в однородное горизонтальное магнитное поле, индукция которого B. В тот момент, когда частица достигла наивысшей точки своего полёта, она вылетела из магнитного поля, и, тут же оказалась в однородном электрическом поле. Напряженность электрического поля равна E, и его силовые линии направлены вертикально вниз. Определите, в какой момент времени частица снова окажется на высоте h. Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Частица двигается в магнитном поле:

$F_л = ma_ц$, **(1 балл)**

$Bqv = m\frac{v^2}{R}$. **(1 балл)**

Получаем:

$R = \frac{mv}{Bq}$. **(1 балл)**

Время движения в магнитном поле:

$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi R}{2v} = \frac{\pi m}{2Bq}$. **(1 балл)**

Частица двигается в электрическом поле:

$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}$, **(1 балл)**

$R = \frac{at_2^2}{2}$. **(1 балл)**

Время движения в электрическом поле:

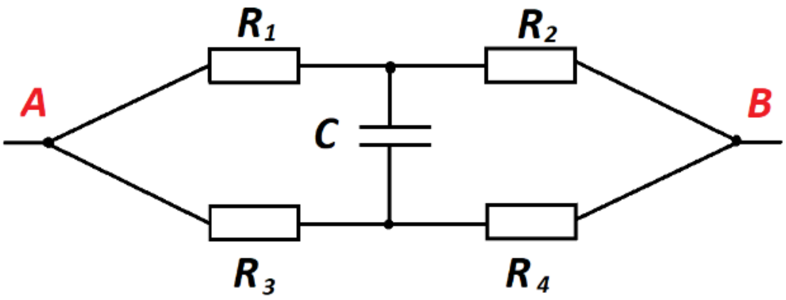
$t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2mvm}{BqEq}}$. **(2 балла)**

Получаем:

$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}$. **(2 балла)**

Ответ: $\frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}$

6. (10 баллов) Электрическая цепь состоит из конденсатора ёмкости C=200 мкФ и четырех резисторов сопротивлениями R_1=10 Ом, R_2=20 Ом, R_3=30 Ом и R_4=40 Ом. К точкам A и B схемы присоединили источник постоянного напряжения U_0=210 В. Определите заряд конденсатора через достаточно большой время после подсоединения источника.



Решение:

Падение напряжения на резисторе R_1 составляет:

$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1+R_2} = 210 \cdot \frac{10}{10+20} = 70$ В. **(2 балла)**

Падение напряжения на резисторе R_3 составляет:

$U_3 = U_0 \frac{R_3}{R_3+R_4} = 210 \cdot \frac{30}{30+40} = 90$ В. **(2 балла)**

Разность потенциалов на обкладках конденсатора:

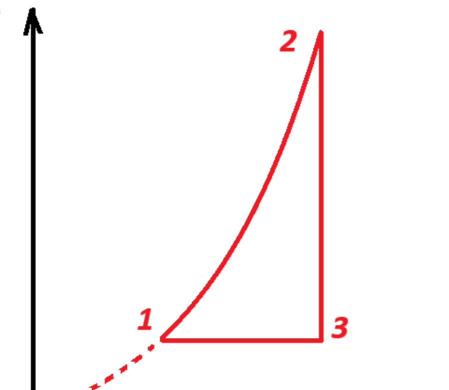
$U_C = U_3 - U_1 = 90 - 70 = 20$ В. **(2 балла)**

Заряд конденсатора:

$q = CU_C = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 4 \cdot 10^{-3}$ Кл $= 4$ мКл. **(4 балла)**

Ответ: 4 мКл

7. (15 баллов) В основе работы тепловой машины лежит цикл, изображенный на рисунке. Процесс 1-2 представляет собой квадратичную зависимость температуры от объёма ($T=kV^2$), процесс 2-3 – изохорный, 3-1 – изотермический. Известно, что максимальный и минимальный объёмы в цикле отличаются в 2 раза. Кроме того, модули работ в процессах 1-2 и 3-1 связаны соотношением $A_{12}=2{,}16A_{31}$. Определите максимальный КПД данной тепловой машины.



Решение:

Процесс 1-2 в координатах p-V представляет прямую зависимость. **(2 балла)**

Работа в процессе 1-2:

$A_{12} = \frac{1}{2}\vartheta R(T_2 - T_1).$ **(2 балла)**

Работа в процессе 2-3:

$A_{23} = 0.$ **(2 балла)**

Работа в процессе 3-1:

$A_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta R(T_1 - T_2)}{2{,}16}.$ **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$Q_{\text{Н}} = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{i}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_2 - T_1).$ **(2 балла)**

КПД тепловой машины:

$\eta = \frac{A_{12}+A_{23}+A_{31}}{Q_{\text{Н}}} = \frac{\frac{1}{2}\vartheta R(T_2-T_1)+0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta R(T_1-T_2)}{2{,}16}}{\frac{i}{2}\vartheta R(T_2-T_1)+\frac{1}{2}\vartheta R(T_2-T_1)} = \frac{1-\frac{1}{2{,}16}}{i+1} = \frac{1{,}16}{2{,}16\cdot(i+1)}.$ **(3 балла)**

Так как речь идет о максимальном КПД, то берем одноатомный газ i=3:

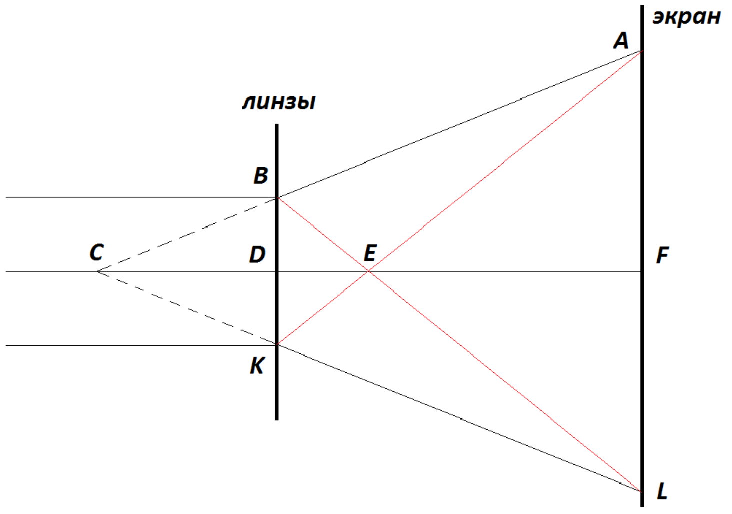
$\eta = 0{,}134.$ **(2 балла)**

Ответ: 0,134

8. (15 баллов) На тонкую рассеивающую линзу, оптическая сила которой D_P=-4 Дптр, нормально падает пучок света диаметром d_1=5 см. На экране расположенном параллельно линзе наблюдается светлое пятно диаметром d_2=20 см. После замены тонкой рассеивающей линзы на тонкую собирающую размер пятна на экране не изменился. Определите оптическую силу D_C собирающей линзы.

Решение:

Оптическая схема, соответствующая условию: **(2 балла)**



Черным цветом – ход лучей после рассеивающей линзы, красным – после собирающей.

$$CD = \left|\frac{1}{D_{\text{р}}}\right| = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ м.}$$ **(2 балла)**

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{CD}{CF} = \frac{BK}{AL} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$ **(2 балла)**

т.е. получаем, что:

$$DF = CF - CD = 4CD - CD = 3CD = 0{,}75 \text{ м.}$$ **(2 балла)**

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{DE}{FE} = \frac{BK}{AL} = \frac{1}{4}.$$ **(2 балла)**

Получаем, что:

$$DE = \frac{1}{5}DF = \frac{0{,}75}{5}.$$ **(2 балла)**

В результате оптическая сила собирающей линзы:

$$D_C = \frac{1}{DE} = \frac{5}{0{,}75} = 6{,}7 \text{ Дптр.}$$ **(3 балла)**

Ответ: 6,7 Дптр

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (11 баллов) Решите неравенство

$$7\sqrt{2-\log_3 x}-3|2\log_3 x-5|\le 7\log_3 x-3\left|2\sqrt{2-\log_3 x}-5\right|.$$

Ответ: $[3;9]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$7\sqrt{2-\log_3 x}+3\left|2\sqrt{2-\log_3 x}-5\right|\le 7\log_3 x+3|2\log_3 x-5|.$$

Пусть $f(t)=7t+3|2t-5|$. Тогда неравенство принимает вид: $f\left(\sqrt{2-\log_3 x}\right)\le f(\log_3 x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрывании модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-\log_3 x}\le \log_3 x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему $\begin{cases}2-\log_3 x\ge 0,\\ \log_3 x\ge 0,\\ 2-\log_3 x\le \log_3^2 x.\end{cases}$ Получаем $x\in[3;9]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 11 баллов.

2. (13 баллов) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 6×14. У него 3 краски: белая, серая, черная. Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании клеток, он раскрасит прямоугольник так, что соседние клетки в нём будут разного цвета, но при этом не будет резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не будут соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона).

Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$.

Решение. Применим формулу классической вероятности $p=\frac{m}{n}$, где общее число возможных исходов $n=3^{84}$, так как всего в прямоугольнике 84 клетки, и каждую клетку можно окрасить в 3 цвета. Найдём количество благоприятных исходов – m. Для этого перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 42 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{42}, а всего $m=2^{43}$.

Критерии оценивания. Верно найдено n – 3 балла. Для нахождения m белые и чёрные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 6 баллов. Найдено верно m, а n – неверно, это 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (13 баллов) Известно, что функция $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$ принимает неотрицательные значения для всех x. Найдите наименьшее значение выражения $4a + b$.

Ответ: 4.

Решение. Так как $f(x)$ принимает неотрицательные значения для всех x, то $(3a+1)^2 \leq 4ab, a > 0$. Получаем $b \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$, построим оценку:

$$4a + b \geq 4a + \frac{(3a+1)^2}{4a} = \frac{16a^2 + 9a^2 + 6a + 1}{4a} = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{25a^2+1}{4a} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{25a^2}}{2a} = 4,$$

причём равенство достигается, при $a = \frac{1}{5}, b = \frac{16}{5}$.

Критерии оценивания. Отмечено, что должны выполняться неравенства $D \leq 0, a > 0$ – по 1 баллу за каждое неравенство. Ответ угадан – 2 балла, найдена верная оценка значений данного выражения – 9 баллов. Приведены верные значения для a, b без оценки – 4 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (13 баллов) Прямоугольный параллелепипед размером $7 \times 8 \times 13$, разбитый плоскостями, параллельными граням, на единичные кубики, проткнули иглой по его большой диагонали. Сколько единичных кубиков проткнула игла?

Ответ: 26.

Решение. Параллелепипед разрезан на единичные кубики плоскостями трёх семейств, в каждое из которых входят все плоскости, параллельные какой-то грани. Количество этих плоскостей – 6, 7 и 12 соответственно. Заметим, что игла не прокалывает две плоскости из разных семейств в одной точке, пусть в M. Действительно, в таком случае проекция иглы на грань α третьего семейства была бы её диагональю, на которой есть целочисленная точка P – проекция точки M на α. Но очевидно, что если целочисленная точка лежит на диагонали целочисленного прямоугольника внутри его, то стороны прямоугольника не взаимно просты. Итак, игла прокалывает 6, 7 и 12 плоскостей в разных точках, поэтому на игле $6+7+12=25$ следов её пересечения с гранями кубиков, поэтому количество прокалываемых кубиков равно $25+1=26$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Отмечено, но не показано, что игла пересекает грани кубиков в разных точках, 10 балов. Если это даже не упомянуто, но приведена схема решения и получен правильный ответ, то 8 баллов.

5. (10 баллов) Положительно заряженная частица, масса которой m и заряд q, двигаясь вертикально вверх со скоростью v, в момент времени t=0 на высоте h попала в однородное горизонтальное магнитное поле, индукция которого B. В тот момент, когда частица достигла наивысшей точки своего полёта, она вылетела из магнитного поля, и, тут же оказалась в однородном электрическом поле. Напряженность электрического поля равна E, и его силовые линии направлены вертикально вниз. Определите, в какой момент времени частица снова окажется на высоте h. Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Частица двигается в магнитном поле:

$F_л = ma_ц,$ **(1 балл)**

$Bqv = m\frac{v^2}{R}.$ **(1 балл)**

Получаем:

$R = \frac{mv}{Bq}.$ **(1 балл)**

Время движения в магнитном поле:

$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi R}{2v} = \frac{\pi m}{2Bq}.$ **(1 балл)**

Частица двигается в электрическом поле:

$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m},$ **(1 балл)**

$R = \frac{at_2^2}{2}.$ **(1 балл)**

Время движения в электрическом поле:

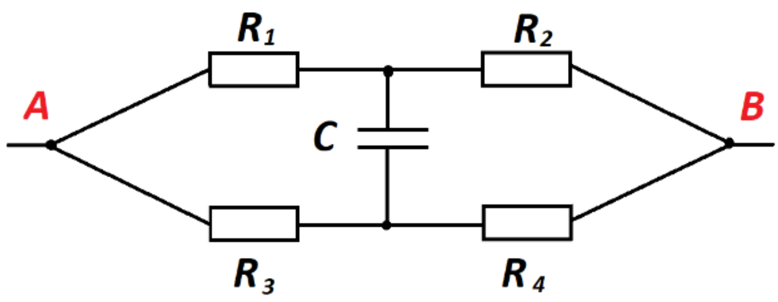
$t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2mvm}{BqEq}}.$ **(2 балла)**

Получаем:

$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}.$ **(2 балла)**

Ответ: $\frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}$

6. (10 баллов) Электрическая цепь состоит из конденсатора ёмкости C=500 мкФ и четырех резисторов сопротивлениями R1=20 Ом, R2=10 Ом, R3=40 Ом и R4=30 Ом. К точкам A и B схемы присоединили источник постоянного напряжения U0=420 В. Определите заряд конденсатора через достаточно большой время после подсоединения источника.



Решение:

Падение напряжения на резисторе R_1 составляет:

$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1+R_2} = 420 \cdot \frac{20}{20+10} = 280$ В. **(2 балла)**

Падение напряжения на резисторе R3 составляет:

$U_3 = U_0 \frac{R_3}{R_3+R_4} = 420 \cdot \frac{40}{40+30} = 240$ В. **(2 балла)**

Разность потенциалов на обкладках конденсатора:

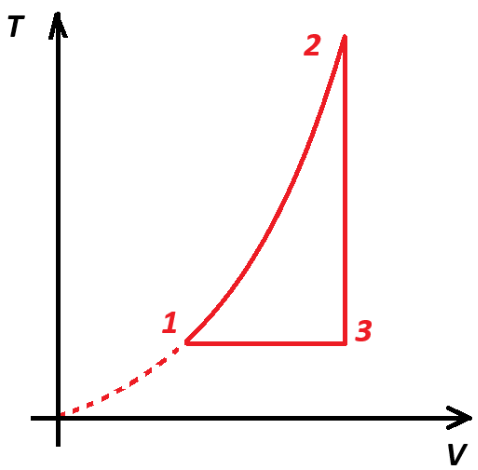
$U_C = U_1 - U_3 = 280 - 240 = 40$ В. **(2 балла)**

Заряд конденсатора:

$q = CU_C = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3}$ Кл $= 20$ мКл. **(4 балла)**

Ответ: 20 мКл

7. (15 баллов) В основе работы тепловой машины лежит цикл, изображенный на рисунке. Процесс 1-2 представляет собой квадратичную зависимость температуры от объёма ($T=kV^2$), процесс 2-3 – изохорный, 3-1 – изотермический. Известно, что максимальный и минимальный объёмы в цикле отличаются в 3 раза. Кроме того, модули работ в процессах 1-2 и 3-1 связаны соотношением $A_{12}=3{,}64\cdot A_{31}$. Определите максимальный КПД данной тепловой машины.



Решение:

Процесс 1-2 в координатах p-V представляет прямую зависимость. **(2 балла)**

Работа в процессе 1-2:

$A_{12} = \frac{1}{2}\vartheta R(T_2 - T_1).$ **(2 балла)**

Работа в процессе 2-3:

$A_{23} = 0.$ **(2 балла)**

Работа в процессе 3-1:

$A_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta R(T_1 - T_2)}{3,64}.$ **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q_{\text{Н}} = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{i}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_2 - T_1).$$ **(2 балла)**

КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{A_{12}+A_{23}+A_{31}}{Q_{\text{Н}}} = \frac{\frac{1}{2}\vartheta R(T_2-T_1)+0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta R(T_1-T_2)}{3,64}}{\frac{i}{2}\vartheta R(T_2-T_1)+\frac{1}{2}\vartheta R(T_2-T_1)} = \frac{1-\frac{1}{3,64}}{i+1} = \frac{2,64}{3,64\cdot(i+1)}.$$ **(3 балла)**

Так как речь идет о максимальном КПД, то берем одноатомный газ i=3:

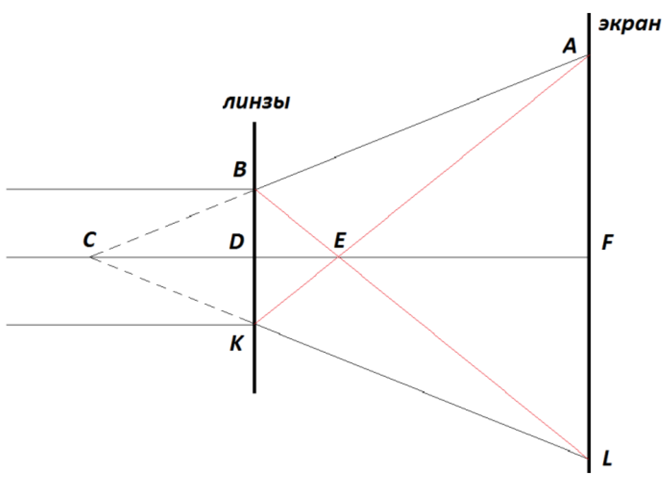
$\eta = 0,181.$ **(2 балла)**

Ответ: 0,181

8. (15 баллов) На тонкую рассеивающую линзу, оптическая сила которой D_P=-5 Дптр, нормально падает пучок света диаметром d_1=6 см. На экране расположенном параллельно линзе наблюдается светлое пятно диаметром d_2=12 см. После замены тонкой рассеивающей линзы на тонкую собирающую размер пятна на экране не изменился. Определите оптическую силу DC собирающей линзы.

Решение:

Оптическая схема, соответствующая условию: **(2 балла)**



Черным цветом – ход лучей после рассеивающей линзы, красным – после собирающей.

$$CD = \left|\frac{1}{D_{\text{р}}}\right| = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ м.}$$ **(2 балла)**

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{CD}{CF} = \frac{BK}{AL} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$ **(2 балла)**

т.е. получаем, что:

$$DF = CF - CD = 2CD - CD = CD = 0{,}2 \text{ м.}$$ **(2 балла)**

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{DE}{FE} = \frac{BK}{AL} = \frac{1}{2}.$$ **(2 балла)**

Получаем, что:

$$DE = \frac{1}{3}DF = \frac{0{,}2}{3}.$$ **(2 балла)**

В результате оптическая сила собирающей линзы:

$$D_C = \frac{1}{DE} = \frac{3}{0{,}2} = 15 \text{ Дптр.}$$ **(3 балла)**

Ответ: 15 Дптр

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 баллов) Решите неравенство

$$9\sqrt{8-7x}-2|4x-7| \le 9x-2\left|4\sqrt{8-7x}-7\right|.$$

Ответ: $\left[1;\frac{8}{7}\right]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$9\sqrt{8-7x}+2\left|4\sqrt{8-7x}-7\right| \le 9x+2|4x-7|.$$

Пусть $f(t)=9t+2|4t-7|$. Тогда неравенство принимает вид:

$f\left(\sqrt{8-7x}\right) \le f(x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрывании модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{8-7x} \le x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему $\begin{cases} 8-7x \ge 0, \\ x \ge 0, \\ 8-7x \le x^2. \end{cases}$ Получаем $x \in \left[1;\frac{8}{7}\right]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (12 баллов) О треугольнике ABC известно, что длины сторон AB, BC, AC и диаметр вписанной окружности являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите периметр треугольника, если диаметр вписанной окружности равен 6.

Ответ: 36.

Решение. В любом треугольнике диаметр вписанной окружности меньше каждой из сторон треугольника. Пусть 6, AB, BC, AC образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью $d>0$, тогда $AB=6+d$, $BC=6+2d$, $AC=6+3d$. Полупериметр треугольника $p=9+3d$. Используя формулы площади треугольника

$$S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

получаем уравнение $27+9d=\sqrt{(9+3d)(3+2d)(3+d)3}$.

Тогда $9^2(3+d)^2=9(3+d)(3+2d)(3+d)$, $(3+d)(2d^2-18)=0$. Откуда $d=3$, $p=18$. В итоге периметр треугольника равен 36.

Критерии оценивания: Отмечен факт, что диаметр вписанной окружности меньше каждой стороны треугольника – 2 балла. Выписаны элементы прогрессии – ещё 1 балл, записано верное уравнение для площадей – 7 баллов. Верный ход решения, но присутствует арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

3. (13 баллов) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} a+\dfrac{1}{b}=1, \\ b+\dfrac{1}{c}=4, \\ c+\dfrac{1}{d}=1, \\ d+\dfrac{1}{a}=4, \end{cases}$$

если $a>0, b>0, c>0, d>0$.

Ответ: $a=\frac{1}{2}, b=2, c=\frac{1}{2}, d=2$.

Решение. Используем неравенства:

$$a+\frac{1}{b}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}},\quad b+\frac{1}{c}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{b}{c}},\quad c+\frac{1}{d}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{c}{d}},\quad d+\frac{1}{a}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}.$$

Перемножим неравенства: $\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(c+\frac{1}{d}\right)\cdot\left(d+\frac{1}{a}\right)\geq 2^4=4^2$, следовательно, все неравенства превращаются в равенства:

$$\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2=0, \left(\sqrt{b}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=0, \left(\sqrt{c}-\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2=0, \left(\sqrt{d}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=0 \text{ или}$$

$$a=\frac{1}{b},\ b=\frac{1}{c},\ c=\frac{1}{d},\ d=\frac{1}{a}.$$

2-ой способ. Вычтем из первого уравнение третье, а из второго четвертое.

$$\begin{cases} a-c+\frac{d-b}{bd}=0, \\ b-d+\frac{a-c}{ac}=0, \\ a+\frac{1}{b}=1, \\ b+\frac{1}{c}=4, \end{cases} \quad \begin{cases} a-c+\frac{a-c}{abcd}=0, \\ d-b=\frac{a-c}{ac}, \\ a+\frac{1}{b}=1, \\ b+\frac{1}{c}=4, \end{cases} \quad \begin{cases} (a-c)\left(1+\frac{1}{abcd}\right)=0, \\ d-b=\frac{a-c}{ac}, \\ a+\frac{1}{b}=1, \\ b+\frac{1}{c}=4, \end{cases}$$

при условии $a>0, b>0, c>0, d>0$ получаем систему $\begin{cases} a=c, \\ d=b, \\ a+\frac{1}{b}=1, \\ b+\frac{1}{c}=4, \end{cases} \begin{cases} a=c, \\ d=b, \\ a=\frac{b-1}{b}, \\ b+\frac{b}{b-1}=4, \end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases} b=2, \\ d=2, \\ a=\frac{1}{2}, \\ c=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Критерии оценивания: Ответ угадан – 2 балла. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 баллов) Какое наибольшее количество квадратиков 2×2 можно поместить, располагая стороны квадратиков по линиям сетки, в клеточный прямоугольник 25×27, если любым двум квадратикам можно иметь либо одну общую клеточку, либо ни одной?

Ответ: 312.

Решение. Для любой клеточки существует не более чем два квадратика 2×2, пресекающихся только по этой клеточке, так как если взять хотя бы 3 квадратика, содержащих общую клеточку, то какие-то два из них будут пересекаться по двум клеточкам. Закрасим клеточки во втором, четвертом, шестом и так далее горизонтальном ряду, например, снизу вверх, причем закрашиваем в каждом ряду вторую, четвертую, шестую и так далее клеточки, например, слева направо. Закрашенных клеточек получится $12\cdot13=156$. Очевидно, что любой квадратик 2×2, помещенный в данный прямоугольник, содержит ровно одну закрашенную клеточку. На неё может быть наложено, как было замечено, не более двух квадратиков 2×2, поэтому всего, по данным правилам, квадратиков можно поместить не более 312. *Пример*: укладываем у стороны длиной 25 вплотную друг к другу слева направо ряд из 12 квадратиков; следующий ряд из 12 квадратиков выкладываем со сдвигом на 1 клетку вверх и вправо, следующий ряд – со сдвигом вверх и влево, и так далее.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Приведён пример с правильным ответом 5 баллов.

5. (10 баллов) Мальчик Андрей очень любит играть в футбол и договорился со своим другом Талгатом потренироваться накануне школьного матча. Андрей стоит на расстоянии S=20 м от ворот высотой H=3 м и бьет по мячу со скоростью v=20 м/с. Талгат стоит на воротах и держит руки на расстоянии h=2,15 м от земли. Талгат не может менять положение рук относительно тела, но зато может прыгать вверх не более, чем на d=35 см. Под каким углом к горизонту Андрей должен пнуть мяч, чтобы Талгат не поймал его, и при этом Андрей забил гол? Считать, что движение мяча происходит в плоскости рисунка. Мяч считать точечным. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Решение:

Запишем уравнения движения по параболе для тела, брошенного под углом α к горизонту, и выразим α через координаты тела (x, y) и его скорость v:

$x = v\cos\alpha\, t$ **(1 балл)**

$y = v\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$. **(1 балл)**

Тогда:

$$y = x\,\mathrm{t}g\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2} - \frac{gx^2}{2v^2}\mathrm{tg}^2\,\alpha.$$ **(1 балл)**

$$\frac{gx^2}{2v^2}\mathrm{tg}^2\,\alpha - x\,\mathrm{tg}\,\alpha + y + \frac{gx^2}{2v^2} = 0$$

$$\mathrm{t}g\,\alpha = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g(2yv^2 + gx^2)}}{gx}.$$ **(1 балл)**

По условию $h + d < y < H$.

Найдем все α, для которых $y = H$ и $y = h + d$.

$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$, **(1 балл)**

$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{4+\sqrt{10}}{2}$. **(1 балл)**

$\mathrm{tg}\,\alpha_3 = \frac{10-2\sqrt{15}}{5}$, **(1 балл)**

$\mathrm{tg}\,\alpha_4 = \frac{10+2\sqrt{15}}{5}$. **(1 балл)**

Так как $\alpha \in [0°, 90°]$, то на данном промежутке $\mathrm{tg}\,\alpha$ монотонно возрастает.

Расположим α в порядке возрастания угла (или же, что то же самое, в порядке возрастания тангенсов):

$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2$

Так как до $\alpha = 45°$ координата y возрастает, а потом убывает, то справедливо будет сказать, что $\alpha \in (\alpha_1;\ \alpha_3) \cup (\alpha_4;\ \alpha_2)$.

Получаем:

$\arctan\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}\right) < \alpha < \mathrm{acrtan}(\frac{10-2\sqrt{15}}{5});\ \arctan\left(\frac{10+2\sqrt{15}}{5}\right) < \alpha < \mathrm{acrtan}(\frac{4+\sqrt{10}}{2})$. **(2 балла)**

Ответ: $22{,}3^{O} < \alpha < 24{,}3^{O}$ и $74{,}34^{O} < \alpha < 74{,}4^{O}$

6. (10 баллов) Тепловую машину, КПД которой η=0,4, запустили в обратном направлении. С её помощью m=2 кг воды, взятой при температуре t_0=0 ^{O}C, заморозили, получив лёд с такой же температурой. На сколько градусов нагрелся в результате воздух в комнате? Теплоёмкость воздуха C=150 кДж/К, удельная теплота плавления льда λ=330 кДж/кг.

Решение:

КПД тепловой машины $\eta = \frac{Q_+ - |Q_-|}{Q_+} = 1 - \frac{|Q_-|}{Q_+}$, где: **(3 балла)**

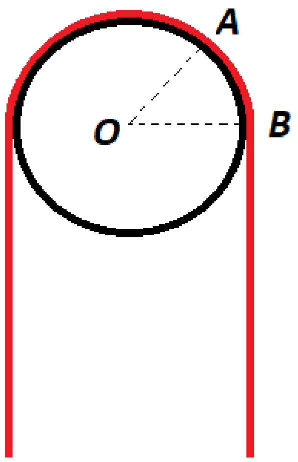
$Q_- = \lambda m$ (энергия, полученная холодильником за счет замораживания воды), **(3 балла)**

$Q_+ = C\Delta t$ (энергия, отданная холодильником на нагрев воздуха в комнате на Δt) **(3 балла)**

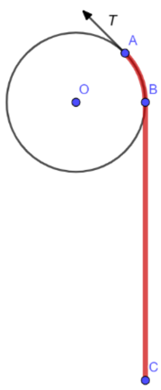
Тогда $\Delta t = \frac{\lambda m}{(1-\eta)C} = \frac{330000\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}*2\text{ кг}}{(1-0,4)*150000\frac{\text{Дж}}{°\text{С}}} \approx 7,33°\text{C}$. **(1 балл)**

Ответ: ≈7,33°С

7. (15 баллов) Канат массой m=2 кг и длиной l=1,5 м лежит на гладком закрепленном блоке, ось O которого горизонтальна. Определите силу натяжения каната в точке A. Известно, что угол AOB равен 45°. Радиус блока R=8 см.



Решение:



Применим метод виртуальных перемещений.

Возьмем отрезок каната AC (см. рисунок) и сместим его на малую величину Δx.

Тогда совершенная работа $A = T\Delta x$, где T – сила натяжения каната в точке A.

Такое перемещение эквивалентно тому, как если бы мы взяли кусочек Δx, отрезали его от каната снизу и переставили бы его к верхней части.

Работа по такому перемещению Δx может быть записана:

$A = T\Delta x = \Delta mgh.$ **(3 балла)**

$h = BC + OA\sin\angle AOB = \left(\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2}\right) + R\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(3 балла)**

$\Delta m = \Delta x\frac{m}{l}$ **(3 балла)**

Тогда:

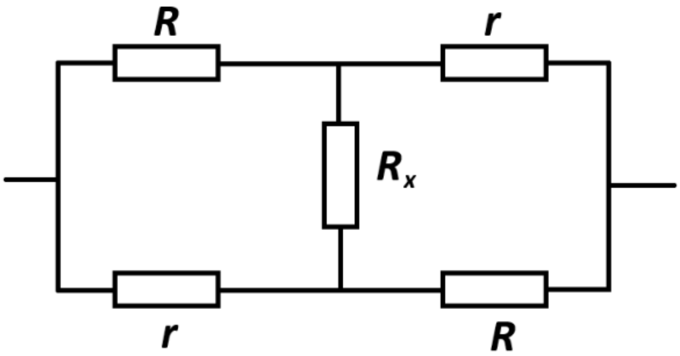
$T = \frac{m}{l}gh = \frac{m}{2l}g(l + R(\sqrt{2} - \pi)).$ **(3 балла)**

Получаем:

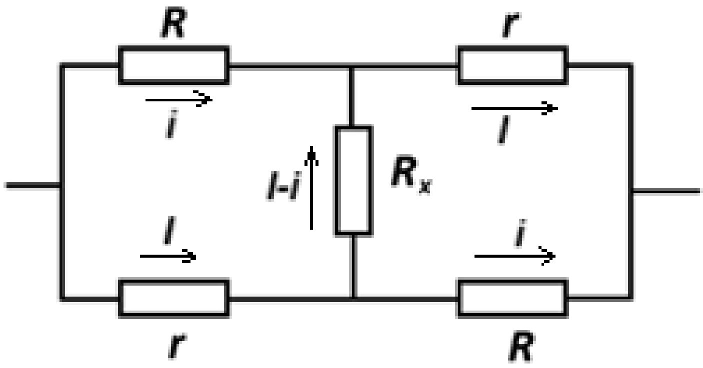
$$T = \frac{2}{2\cdot 1,5} \cdot 10 \cdot \left(1,5 + 0,08\left(\sqrt{2} - 3,14\right)\right) \approx 9\ \text{Н}.$$ **(3 балла)**

Ответ: ≈9 Н

8. (15 баллов) В предложенной схеме известны значения сопротивлений R=4,5 Ом и r=2 Ом. Кроме того, известно, что сопротивление всей схемы равно сопротивлению среднего резистора R_X. Определите значение R_X.



Решение:



Расставим токи в цепи, обратив внимание на симметрию: **(2 балла)**

Составим и решим систему уравнений (запишем правило Кирхгофа для цепи):

(1) $iR + Ir = u \Rightarrow i = \frac{u}{R} - \frac{Ir}{R}$ (4) **(2 балла)**

(2) $(I + i)R_x = u$ **(2 балла)**

(3) $2Ir + R_x(I - i) = u$ **(2 балла)**

Подставим (4) в (2):

$\left(I + \frac{u - Ir}{R}\right) R_x = u \Rightarrow I = \frac{u}{R_x}\frac{R - R_x}{R - r}$ (5) – значение I через известные величины и R_x.

Подставим (5) в (4):

$i = \frac{u}{R} - \frac{r}{R}\frac{u}{R_x}\frac{(R - R_x)}{R - r}$ (6) – значение i через известные величины и R_x

Подставим (5) и (6) в (3) и решим получившееся уравнение относительно R_x:

$$2\frac{u}{R_x}\frac{R-R_x}{R-r}r + R_x\left(\frac{u}{R_x}\frac{R-R_x}{R-r} - \left(\frac{u}{R} - \frac{r}{R}\frac{u}{R_x}\frac{(R-R_x)}{R-r}\right)\right) = u \quad | * \frac{R_x}{u}$$

$$2\frac{R-R_x}{R-r}r + R_x\left(\frac{R-R_x}{R-r} - \left(\frac{R_x}{R} - \frac{r}{R}\frac{(R-R_x)}{R-r}\right)\right) = R_x$$

$$2\frac{Rr}{R-r} - 2\frac{R_x r}{R-r} + \frac{RR_x}{R-r} - \frac{R_x{}^2}{R-r} - \left(\frac{R_x{}^2}{R} - \frac{R_x r}{R-r} + \frac{rR_x{}^2}{R(R-r)}\right) = R_x$$

$$R_x{}^2\left(\frac{1}{R-r} + \frac{1}{R} + \frac{r}{R(R-r\,)}\right) + R_x\left(1 + 2\frac{r}{R-r} - \frac{R}{R-r} - \frac{r}{R-r}\right) - 2\frac{Rr}{R-r} = 0$$

$$R_x{}^2\frac{R+(R-r)+r}{(R-r)R} + R_x\left(1 + \frac{r-R}{R-r}\right) - 2\frac{Rr}{R-r} = 0 \quad | * \frac{2}{R-r}$$

$$R_x{}^2 - Rr = 0$$

Получили:

$R_x = \sqrt{Rr}$ **(5 баллов)**

Окончательно:

$R_x = \sqrt{4{,}5\ \text{Ом} \cdot 2\ \text{Ом}} = 3\ \text{Ом}.$ **(2 балла)**

Ответ: 3 Ом

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 баллов) Решите неравенство

$$7\sqrt{4-3x}-3|2x-5|\le 7x-3\left|2\sqrt{4-3x}-5\right|.$$

Ответ: $\left[1;\frac{4}{3}\right]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$7\sqrt{4-3x}+3\left|2\sqrt{4-3x}-5\right|\le 7x+3|2x-5|.$$

Пусть $f(t)=7t+3|2t-5|$. Тогда неравенство принимает вид:

$f\left(\sqrt{4-3x}\right)\le f(x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрывании модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{4-3x}\le x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему $\begin{cases}4-3x\ge 0,\\ x\ge 0,\\ 4-3x\le x^2.\end{cases}$ Получаем $x\in\left[1;\frac{4}{3}\right]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

2. (12 баллов) О треугольнике ABC известно, что длины сторон AB, BC, AC и диаметр вписанной окружности являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите периметр треугольника, если диаметр вписанной окружности равен 8.

Ответ: 48.

Решение. В любом треугольнике диаметр вписанной окружности меньше каждой из сторон треугольника. Пусть 8, AB, BC, AC образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью $d>0$, тогда $AB=8+d$, $BC=8+2d$, $AC=8+3d$. Полупериметр треугольника $p=12+3d$. Используя формулы площади треугольника

$$S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

получаем уравнение $48+12d=\sqrt{(12+3d)(4+2d)(4+d)4}$.

Тогда $12^2(4+d)^2=12(4+d)(4+2d)(4+d)$, $(4+d)(2d^2-32)=0$, откуда $d=4$, $p=24$. В итоге периметр треугольника равен 48.

Критерии оценивания: Отмечен факт, что диаметр вписанной окружности меньше каждой стороны треугольника – 2 балла. Выписаны элементы прогрессии – ещё 1 балл, записано верное уравнение для площадей – 7 баллов. Верный ход решения, но присутствует арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 12 баллов.

3. (13 баллов) Решите систему уравнений $\begin{cases} a+\frac{1}{b}=4, \\ b+\frac{1}{c}=1, \\ c+\frac{1}{d}=4, \\ d+\frac{1}{a}=1, \end{cases}$

если $a>0, b>0, c>0, d>0$.

Ответ: $a=2, b=\frac{1}{2}, c=2, d=\frac{1}{2}$.

Решение. Используем неравенства:

$$a+\frac{1}{b}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}},\quad b+\frac{1}{c}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{b}{c}},\quad c+\frac{1}{d}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{c}{d}},\quad d+\frac{1}{a}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}.$$

Перемножим неравенства: $\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(c+\frac{1}{d}\right)\cdot\left(d+\frac{1}{a}\right)\geq 2^4=4^2$, следовательно, все неравенства превращаются в равенства:

$\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2=0, \left(\sqrt{b}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=0, \left(\sqrt{c}-\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2=0, \left(\sqrt{d}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=0$ или

$a=\frac{1}{b},\ b=\frac{1}{c},\ c=\frac{1}{d},\ d=\frac{1}{a}$.

2-ой способ. Вычтем из первого уравнение третье, а из второго четвертое.

$\begin{cases} a-c+\frac{d-b}{bd}=0, \\ b-d+\frac{a-c}{ac}=0, \\ a+\frac{1}{b}=4, \\ b+\frac{1}{c}=1, \end{cases}$ $\begin{cases} a-c+\frac{a-c}{abcd}=0, \\ d-b=\frac{a-c}{ac}, \\ a+\frac{1}{b}=4, \\ b+\frac{1}{c}=1, \end{cases}$ $\begin{cases} (a-c)\left(1+\frac{1}{abcd}\right)=0, \\ d-b=\frac{a-c}{ac}, \\ a+\frac{1}{b}=4, \\ b+\frac{1}{c}=1, \end{cases}$ при условии

$a>0, b>0, c>0, d>0$ получаем систему $\begin{cases} a=c, \\ d=b, \\ a+\frac{1}{b}=4, \\ b+\frac{1}{c}=1, \end{cases}$ $\begin{cases} a=c, \\ d=b, \\ a=\frac{4b-1}{b}, \\ b+\frac{b}{4b-1}=1, \end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases} b=\frac{1}{2}, \\ d=\frac{1}{2}, \\ a=2, \\ c=2. \end{cases}$

Критерии оценивания: Ответ угадан – 2 балла. Полное решение – 13 баллов.

4. (13 баллов) Какое наибольшее количество квадратиков 2×2 можно поместить, располагая стороны квадратиков по линиям сетки, в клеточный прямоугольник 25×23, если любым двум квадратикам можно иметь либо одну общую клеточку, либо ни одной?

Ответ: 264.

Решение. Для любой клеточки существует не более чем два квадратика 2×2, пресекающихся только по этой клеточке, так как если взять хотя бы 3 квадратика, содержащих общую клеточку, то какие-то два из них будут пересекаться по двум клеточкам. Закрасим клеточки во втором, четвертом, шестом и так далее горизонтальном ряду, например, снизу вверх, причем закрашиваем в каждом ряду вторую, четвертую, шестую и так далее клеточки, например, слева направо. Закрашенных клеточек получится $12\cdot11=132$. Очевидно, что любой квадратик 2×2, помещенный в данный прямоугольник, содержит ровно одну закрашенную клеточку. На неё может быть наложено, как было замечено, не более двух квадратиков 2×2, поэтому всего, по данным правилам, квадратиков можно поместить не более 264. *Пример*: укладываем у стороны длиной 25 вплотную друг к другу слева направо ряд из 12 квадратиков; следующий ряд из 12 квадратиков выкладываем со сдвигом на 1 клетку вверх и вправо, следующий ряд – со сдвигом вверх и влево, и так далее.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Приведён пример с правильным ответом 5 баллов.

5. (10 баллов). Мальчик Андрей очень любит играть в футбол и договорился со своим другом Талгатом потренироваться накануне школьного матча. Андрей стоит на расстоянии S=20 м от ворот высотой H=3 м и бьет по мячу со скоростью v=20 м/с. Талгат стоит на воротах и держит руки на расстоянии h=2,15 м от земли. Талгат не может менять положение рук относительно тела, но зато может прыгать вверх не более, чем на d=35 см. Под каким углом к горизонту Андрей должен пнуть мяч, чтобы Талгат не поймал его, и при этом Андрей забил гол? Считать, что движение мяча происходит в плоскости рисунка. Мяч считать точечным. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Решение:

Запишем уравнения движения по параболе для тела, брошенного под углом α к горизонту, и выразим α через координаты тела (x, y) и его скорость v:

$x = v\cos\alpha\, t$ **(1 балл)**

$y = v\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$. **(1 балл)**

Тогда:

$y = x\,\mathrm{t}g\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2} - \frac{gx^2}{2v^2}\mathrm{tg}^2\,\alpha.$ **(1 балл)**

$\frac{gx^2}{2v^2}\mathrm{tg}^2\,\alpha - x\,\mathrm{tg}\,\alpha + y + \frac{gx^2}{2v^2} = 0$

$\mathrm{t}g\,\alpha = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g(2yv^2 + gx^2)}}{gx}.$ **(1 балл)**

По условию $h + d < y < H.$

Найдем все α, для которых $y = H$ и $y = h + d.$

$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{4-\sqrt{10}}{2},$ **(1 балл)**

$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{4+\sqrt{10}}{2}.$ **(1 балл)**

$\mathrm{tg}\,\alpha_3 = \frac{10-2\sqrt{15}}{2},$ **(1 балл)**

$\mathrm{tg}\,\alpha_4 = \frac{10+\sqrt{15}}{2}.$ **(1 балл)**

Так как $\alpha \in [0°, 90°]$, то на данном промежутке $\mathrm{tg}\,\alpha$ монотонно возрастает.

Расположим α в порядке возрастания угла (или же, что то же самое, в порядке возрастания тангенсов):

$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4$

Так как до $\alpha = 45°$ координата y возрастает, а потом убывает, то справедливо будет сказать, что $\alpha \in (\alpha_1;\ \alpha_3) \cup (\alpha_2;\ \alpha_4)$.

Получаем:

$\arctan\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}\right) < \alpha < \mathrm{acrtan}(\frac{10-2\sqrt{15}}{2});\ \arctan\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2}\right) < \alpha < \mathrm{acrtan}(\frac{10+2\sqrt{15}}{2}).$ **(2 балла)**

Ответ: $22{,}3^{O} < \alpha < 48{,}5^{O}$ и $74{,}4^{O} < \alpha < 83{,}5^{O}$

6. (10 баллов). Тепловую машину, КПД которой η=0,5, запустили в обратном направлении. С её помощью m=3 кг воды, взятой при температуре t_0=0 ^{O}С, заморозили, получив лёд с такой же температурой. На сколько градусов нагрелся в результате воздух в комнате? Теплоёмкость воздуха С=150 кДж/К, удельная теплота плавления льда λ=330 кДж/кг.

Решение:

КПД тепловой машины $\eta = \frac{Q_+ - |Q_-|}{Q_+} = 1 - \frac{|Q_-|}{Q_+}$, где: **(3 балла)**

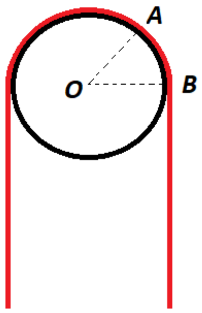
$Q_- = \lambda m$ (энергия, полученная холодильником за счет замораживания воды),**(3 балла)**

$Q_+ = C\Delta t$ (энергия, отданная холодильником на нагрев воздуха в комнате на Δt).**(3 балла)**

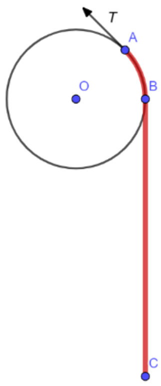
Тогда $\Delta t = \frac{\lambda m}{(1-\eta)C} = \frac{330000\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}*3\text{ кг}}{(1-0{,}5)*150000\frac{\text{Дж}}{^\circ\text{C}}} = 13{,}2^\circ\text{C}.$ **(1 балл)**

Ответ: $13{,}2^{\text{O}}$C

7. (15 баллов). Канат массой m=1 кг и длиной l=2 м лежит на гладком закрепленном блоке, ось O которого горизонтальна. Определите силу натяжения каната в точке A. Известно, что угол AOB равен 45^{O}. Радиус блока R=10 см.



Решение:



Применим метод виртуальных перемещений.

Возьмем отрезок каната AC (см. рисунок) и сместим его на малую величину Δx.

Тогда совершенная работа $A = T\Delta x$, где T – сила натяжения каната в точке A.

Такое перемещение эквивалентно тому, как если бы мы взяли кусочек Δx, отрезали его от каната снизу и переставили бы его к верхней части.

Работа по такому перемещению Δx может быть записана:

$A = T\Delta x = \Delta m g h.$ **(3 балла)**

$h = BC + OA\sin\angle AOB = \left(\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2}\right) + R\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(3 балла)**

$\Delta m = \Delta x\frac{m}{l}$ **(3 балла)**

Тогда:

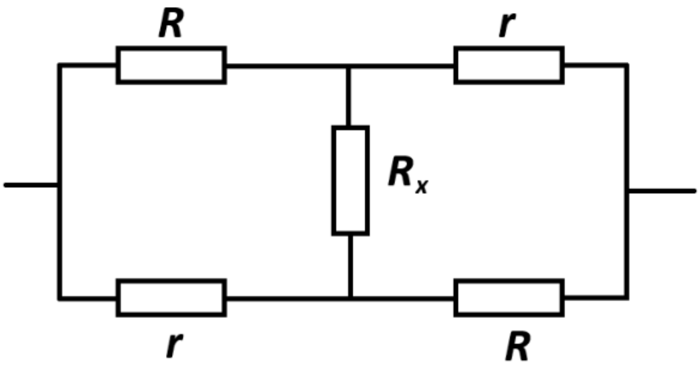
$T = \frac{m}{l}gh = \frac{m}{2l}g(l + R(\sqrt{2} - \pi)).$ **(3 балла)**

Получаем:

$T = \frac{2}{2\cdot 1{,}5}\cdot 10\cdot\left(1{,}5 + 0{,}08(\sqrt{2} - 3{,}14)\right) \approx 4{,}6$ Н. **(3 балла)**

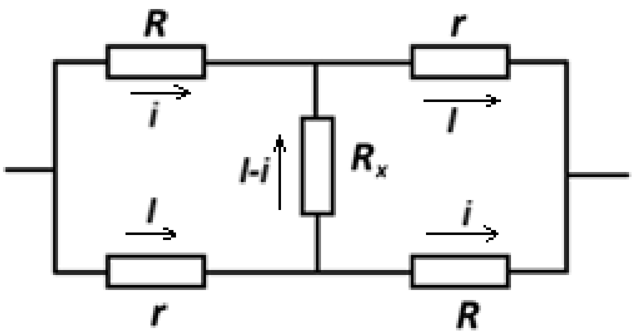
Ответ: ≈4,6 Н

8. (15 баллов). В предложенной схеме известны значения сопротивлений R=16 Ом и r=4 Ом. Кроме того, известно, что сопротивление всей схемы равно сопротивлению среднего резистора R_X. Определите значение R_X.



Решение:

Расставим токи в цепи, обратив внимание на симметрию: **(2 балла)**



Составим и решим систему уравнений (запишем правило Кирхгофа для цепи):

(4) $iR + Ir = u \Rightarrow i = \frac{u}{R} - \frac{Ir}{R}$ (4) **(2 балла)**

(5) $(I+i)R_x = u$ **(2 балла)**

(6) $2Ir + R_x(I-i) = u$ **(2 балла)**

Подставим (4) в (2):

$\left(I + \frac{u-Ir}{R}\right)R_x = u \Rightarrow I = \frac{u}{R_x}\frac{R-R_x}{R-r}$ (5) – значение I через известные величины и R_x.

Подставим (5) в (4):

$i = \frac{u}{R} - \frac{r}{R}\frac{u}{R_x}\frac{(R-R_x)}{R-r}$ (6) – значение i через известные величины и R_x

Подставим (5) и (6) в (3) и решим получившееся уравнение относительно R_x:

$$2\frac{u}{R_x}\frac{R-R_x}{R-r}r + R_x\left(\frac{u}{R_x}\frac{R-R_x}{R-r} - \left(\frac{u}{R} - \frac{r}{R}\frac{u}{R_x}\frac{(R-R_x)}{R-r}\right)\right) = u \quad | * \frac{R_x}{u}$$

$$2\frac{R-R_x}{R-r}r + R_x\left(\frac{R-R_x}{R-r} - \left(\frac{R_x}{R} - \frac{r}{R}\frac{(R-R_x)}{R-r}\right)\right) = R_x$$

$$2\frac{Rr}{R-r} - 2\frac{R_x r}{R-r} + \frac{RR_x}{R-r} - \frac{{R_x}^2}{R-r} - \left(\frac{{R_x}^2}{R} - \frac{R_x r}{R-r} + \frac{r{R_x}^2}{R(R-r)}\right) = R_x$$

$${R_x}^2\left(\frac{1}{R-r} + \frac{1}{R} + \frac{r}{R(R-r)}\right) + R_x\left(1 + 2\frac{r}{R-r} - \frac{R}{R-r} - \frac{r}{R-r}\right) - 2\frac{Rr}{R-r} = 0$$

$${R_x}^2\frac{R+(R-r)+r}{(R-r)R} + R_x\left(1 + \frac{r-R}{R-r}\right) - 2\frac{Rr}{R-r} = 0 \quad | * \frac{2}{R-r}$$

$${R_x}^2 - Rr = 0$$

Получили:

$$R_x = \sqrt{Rr}$$ **(5 баллов)**

Окончательно:

$$R_x = \sqrt{16\ \text{Ом} \cdot 4\ \text{Ом}} = 8\ \text{Ом}.$$ **(2 балла)**

Ответ: 8 Ом

9 класс **Заключительный тур** **2024-2025**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Из посёлка Звёздный со скоростью 20 км/ч выехал велосипедист. Через час в том же направлении со скоростью 40 км/ч выехал мотоциклист, а ещё через час со скоростью 60 км/ч выехал автомобилист. Через некоторое время автомобиль сломался. Какое расстояние он успел проехать, если в момент поломки сумма расстояний от него до мотоциклиста и до велосипедиста не превышала 20 км?

Ответ: 60 км.

Решение. Пусть t ч – время в пути автомобилиста до поломки. Он успел проехать $60t$ км. Тогда как мотоциклист проехал $40(t+1)$ км, а велосипедист $20(t+2)$ км. Расстояния от автомобиля до мотоциклиста и велосипедиста соответственно равны $|60t-40(t+1)|$ и $|60t-20(t+2)|$.

Получаем неравенство $|60t-40(t+1)|+|60t-20(t+2)| \leq 20$. После преобразований неравенство примет вид:

$$|t-2|+2|t-1| \leq 1.$$

1. При $t \leq 1$ неравенство примет вид $t \geq 1$, следовательно, получаем $t=1$;
2. При $t \in (1;2)$ получаем неравенство $t \leq 1$, то есть, решений при данных t нет;
3. При $t \geq 2$ получаем неравенство $t \leq \frac{5}{3}$, то есть, решений при данных t нет.

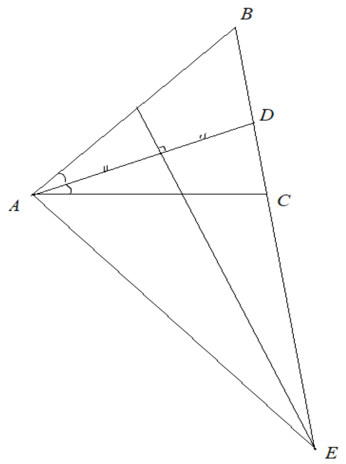
Итак, неравенство имеет единственное решение $t=1$. Таким образом, автомобиль до поломки успел проехать 60 км.

Критерии оценивания. Если участник рассматривает все случаи расположения велосипедиста и мотоциклиста относительно автомобиля, получает правильный ответ, считаем, что решение верное. Если рассмотрен только один вариант расположения, даже при правильном ответе – 6 баллов. Получено верное неравенство с модулем – 8 баллов; при верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла. Полное обоснованное решение 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике ABC со сторонами $AB=8$, $BC=7$, $AC=6$ проведён серединный перпендикуляр к биссектрисе AD, который пересекает прямую BC в точке E. Найдите $BE:CE$.

Ответ: $\frac{16}{9}$.

Решение. Приведём решение в общем виде. Пусть $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$, $AE = x,\ CE = y$. Треугольник ADE равнобедренный. Получаем:



$$\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \frac{1}{2}\angle A;\ \angle CAE = \angle DAE - \frac{1}{2}\angle A = \angle B.$$

Поэтому треугольники ΔABE и ΔCAE подобны. Тогда из подобия следует: $\frac{c}{b} = \frac{a+y}{x} = \frac{x}{y}$. Решая систему двух уравнений, находим: $y = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}$. Отсюда $\frac{BE}{CE} = \frac{a+y}{y} = \frac{c^2}{b^2}$.

Критерии оценивания. Показано равенство углов: $\angle CAE = \angle B$ – тогда 4 балла. Установлено подобие треугольников ΔABE и ΔCAE – это оценивается ещё в 5 баллов. Полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Имеется 9 различных гирек-эталонов весом 200 г, 300 г, …, 900 г, 1000 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь весит легче, чем раньше, на 10 г. Как определить эту гирьку за 2 взвешивания на двухчашечных весах без циферблата, не используя других гирь, кроме данных?

Решение. Рассмотрим 3 группы гирь: первая 200 г, 700 г, 900 г: вторая 400 г, 600 г, 800 г; третья 300 г, 500 г, 1000 г. Каждая группа весила бы 1800 г, если бы не было испорченной гирьки. *Первое взвешивание*. Положим на одну чашу весов первую группу, на другую – вторую. Если одна группа окажется легче, в ней находится испорченная гирька, если же весы будут в равновесии, то испорченная гирька в третьей группе. *Второе взвешивание*. Пусть испорченная гирька в первой группе. На одну чашу весов положим гирьки по 700 и 500 г, на другую 300 и 900 г. При равновесии весов испорчена оставшаяся гирька первой группы – 200 г, так как гирьки по 300 и 500 целые, и будь испорченная 700 г или 900 г, весы бы отклонились от равновесия. Аналогично, если испорченная во второй группе, на одну чашу весов положим гирьки по 400 и 500 г, на другую 300 и 600 г, сразу определив, какая фальшивая из 400 и 600 г, или же фальшивая оставшаяся 800 г. Точно также, если испорченная в третьей группе, опять на одну чашу весов положим гирьки по 400 и 500 г, на другую 300 г и 600 г.

Критерии оценивания. Гирьки поделили на три группы «одинакового» веса – за это 3 балла. Найдена за одно взвешивание группа из трёх гирь, в которой находится испорченная гирька – за это ещё 4 балла, то есть 7 баллов. Полное решение – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Дана функция $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d и e – целые числа. Известно, что $f(17) = f(135) = 2025$, а $f(0) \in (-3000; -2000)$. Найдите $f(0)$.

Ответ: -2565.

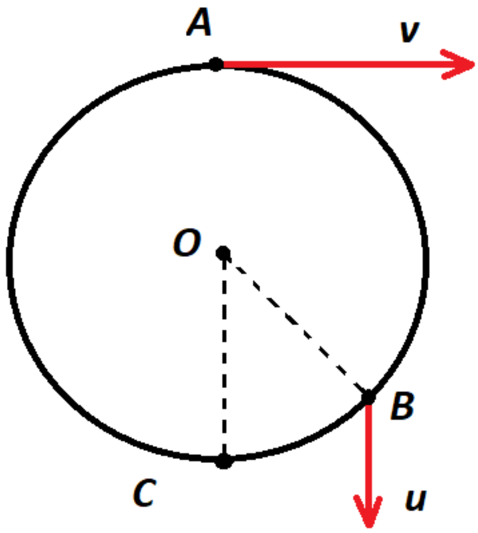
Решение. Имеем $f(x) = x \cdot g(x) + e$, где $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тогда

$f(17) = 17 \cdot n + e$, где $n = g(17)$ – целое число, а $f(135) = 135 \cdot m + e$, где $m = g(135)$ – целое число.

Из условия следует, что $17 \cdot n = 135 \cdot m$. Так как 17 и 135 взаимно простые числа, то $n = 135k$, $m = 17k$ и $2025 = 17 \cdot 135k + e$. Получаем $e = 2025 - 2295k = f(0)$, в интервале $(-3000; -2000)$ лежит число -2565 (при k=2).

Критерии оценивания. Если отмечено, что $f(0)=e$, то ставим 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение – 13 баллов (задача может быть решена и другими способами).

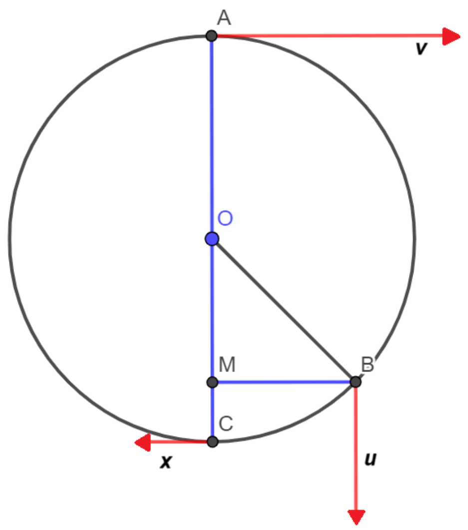
5. *(10 баллов)* У твердого диска, скользящего в гладкой горизонтальной поверхности, в определенный момент времени скорости некоторых точек диска оказались направленными так, как это показано на рисунке. Скорость v точки A направлена по касательной к диску, а скорость u точки B перпендикулярно скорости v. Известно, что v=40 см/с и угол COB равен 45^0. Определите направление и значение скорости точки C.



Ответ: 6,9 см/с

Решение:

Проведем прямую через точку A, перпендикулярную вектору v, и прямую через точку B, перпендикулярную вектору u. Пересечением данных перпендикуляров является мгновенная ось вращения – точка M. (2 балла)



Через точку C проведем перпендикуляр к MC, вдоль данного перпендикуляра направлена скорость x в точке C.

Так как M – мгновенная ось вращения, то угловая скорость $\omega = \frac{v}{AM} = \frac{x}{CM}$.

Отсюда $x = v\frac{CM}{AM}$. (4 балла)

Скорости в точках A и B перпендикулярны, тогда $AM \perp MB$.

В ΔMOB: $OM \perp MB, \angle COB = \angle MOB = 45°$, следовательно, $MB = OM = OB\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, (2 балла)

где R – радиус окружности.

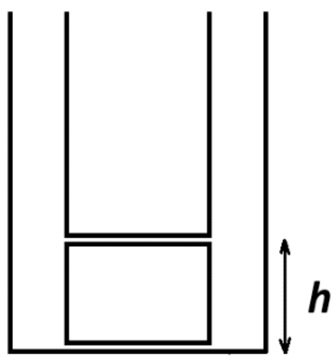
$AM = AO + OM = R + \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{2+\sqrt{2}}{2}R.$ (2 балла)

$\mathrm{CM} = CO - \mathrm{OM} = R - \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R.$ (2 балла)

$$x = v\frac{CM}{AM} = v\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}R}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}R} = v\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = v\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = v\frac{6-4\sqrt{2}}{2} = v(3-2\sqrt{2}).$$

$\mathrm{x} = 40\frac{\text{см}}{\text{с}}\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right) = 6{,}9\frac{\text{см}}{\text{с}}.$ (3 балла)

6. *(10 баллов)* Имеются два одинаковых сообщающихся сосуда, которые соединены тонкими трубками. Одна из трубок соединяет сосуда у самого дна, а вторая располагается на h=40 см выше (см. рис.). Площадь сечения сосудов S=100 см^2. В сосуды налили $V_В$=10 л воды, плотность которой $\rho_В$=1000 кг/м^3. Затем в один из сосудов налили $V_К$=4 л керосина, плотность которого $\rho_к$=800 кг/м^3. Определите конечные уровни жидкости в левом и правом сосуде.



Ответ: 72,5 см; 67,5 см

Решение:

Изначальный уровень воды в каждом сосуде:

$H = \frac{V_в}{2S} = \frac{10\ л}{2 \cdot 100 см^2} = 50$ см (выше верхней трубки на $\Delta h = H - h$). (1 балл)

Пусть в левый сосуд заливают керосин.

Предположим, что после установления равновесия часть керосина окажется в правом сосуде.

Тогда из левого сосуда в правый перешло Δh воды и x керосина. В левом сосуде керосина осталось $L - x$ керосина, где $L = \frac{V_к}{S} = \frac{4\ л}{100 см^2} = 40$ см – суммарный уровень керосина в двух сосудах. (1 балл)

Давление жидкостей на дно в левом сосуде $p_1 = \rho_в g h + \rho_к g(L - x)$; (1 балл)

в правом сосуде $p_2 = \rho_в g(H + \Delta h) + \rho_к g x = \rho_в g(2H - h) + \rho_к g x$. (1 балл)

Так как сосуды сообщающиеся, то $p_1 = p_2$. (1 балл)

$$\rho_в g h + \rho_к g(L - x) = \rho_в g(2H - h) + \rho_к g x$$

$$\rho_в h + \rho_к L - \rho_в(2H - h) = 2\rho_к x$$

$$x = \frac{\rho_к L - 2\rho_в(H - h)}{2\rho_к}$$

$$x = \frac{800\frac{кг}{м^3} * 40\ см - 2 * 1000\frac{кг}{м^3}(50\ см - 40\ см)}{2 * 800\frac{кг}{м^3}} = 7{,}5\ см$$ (1 балл)

Если бы получившееся значение было меньше нуля, то в правый сосуд перетекла бы только часть воды.

$x > 0$, следовательно, наше предположение о том, что керосин перетекает в правый сосуд, верно.

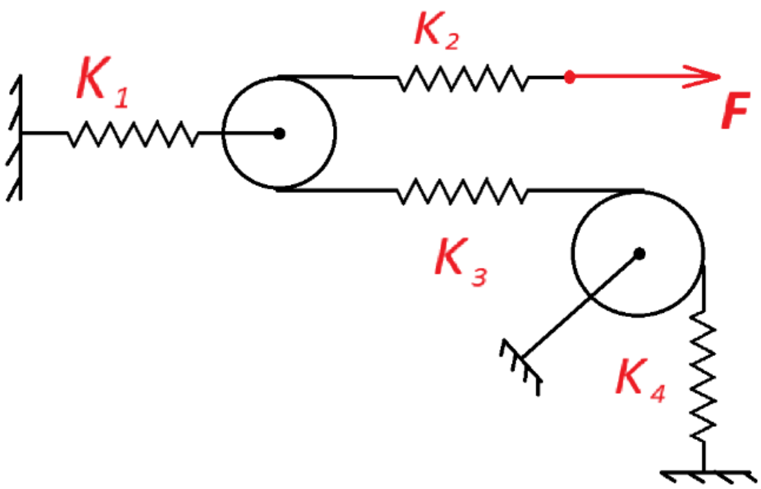
Уровень жидкости в левом сосуде:

$H_1 = h + L - x = 40\ см + 40\ см - 7{,}5\ см = 72{,}5$ см. (2 балла)

Уровень жидкости в правом сосуде:

$H_2 = H + \Delta h + x = 2H - h + x = 2 * 50\ см - 40\ см + 7{,}5\ см = 67{,}5$ см. (2 балла)

7. *(15 баллов)* Имеется конструкция, состоящая из четырех невесомых пружин, одного подвижного и одного неподвижного блоков. Все блоки идеальные. Жесткости пружин: $К_1$=200 Н/м, $К_2$=$К_3$=400 Н/м и $К_4$=100 Н/м. К концу второй пружины приложили силу F=20 Н. Определите эффективную жесткость данной системы, и, на сколько в результате сместится точка приложения силы.



Ответ: 0,7 м; ≈28,57 Н/м

Решение:

Так как пружины 2, 3, 4 соединены одной нитью, то:

$F_{упр2} = F_{упр3} = F_{упр4} = F.$ (1 балл)

Из условия равновесия на подвижный блок $F_{упр1} = 2F.$ (2 балла)

Удлинения пружин:

$\Delta x_1 = \frac{F_{упр1}}{k_1} = \frac{2F}{k_1} = \frac{2 \cdot 20 \text{ Н}}{200 \text{ Н/м}} = 0{,}2 \text{ м}$ (1 балл)

$\Delta x_2 = \frac{F_{упр2}}{k_2} = \frac{F}{k_2} = \frac{20 \text{ Н}}{400 \text{ Н/м}} = 0{,}05 \text{ м}$ (1 балл)

$\Delta x_3 = \frac{F_{упр3}}{k_3} = \frac{F}{k_3} = \frac{20 \text{ Н}}{400 \text{ Н/м}} = 0{,}05 \text{ м}$ (1 балл)

$\Delta x_4 = \frac{F_{упр4}}{k_4} = \frac{F}{k_4} = \frac{20 \text{ Н}}{100 \text{ Н/м}} = 0{,}2 \text{ м}$ (1 балл)

За счет удлинения первой пружины подвижный блок сдвинулся на Δx_1, из-за чего нить вытянулась на $2\Delta x_1$.

Нить с пружинами 2, 3, 4 “удлинилась” на $\Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4$.

Итого точка приложения силы сместилась на:

$\Delta x = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = 2 * 0{,}2 \text{ м} + 0{,}05 \text{ м} + 0{,}05 \text{ м} + 0{,}2 \text{ м} = 0{,}7 \text{ м}.$
(4 балла)

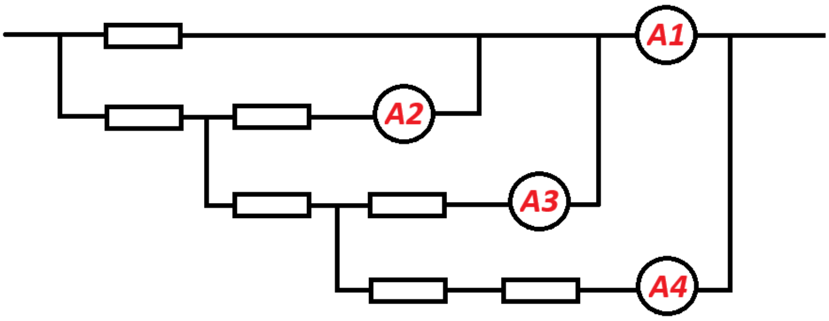
Эффективная жесткость системы $k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{20 \text{ Н}}{0{,}7 \text{ м}} = 28\frac{4}{7}\frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 28{,}57\frac{\text{Н}}{\text{м}}.$ (4 балла)

8. *(15 баллов)* Электрическая схема состоит из семи одинаковых резисторов и четырех одинаковых идеальных амперметров. Известно, что показания первого А1 амперметра I_1=40 мА. Определите показания остальных амперметров.

Ответ: 10 мА; 4 мА; 2 мА

Решение:

Пусть сопротивление резисторов R, а напряжение на всей цепи u. Обозначим узлы схемы так, как показано на рисунке (точки B, B’ и B’’ можно соединить, так как их потенциалы равны).



Найдем эквивалентное сопротивление цепи.

$$R_{DB} = \frac{2R * R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$$

$$R_{CB} = \frac{R(R + R_{DB})}{R + (R + R_{DB})} = \frac{5}{8}R$$

$R_{экв} = R_{AB} = \frac{R(R+R_{CB})}{R+(R+R_{CB})} = \frac{13}{21}R$ (2 балла)

Общий ток в цепи $I = \frac{u}{R_{экв}} = \frac{21u}{13R}$. (1 балл)

$$I_{AB'} = \frac{u}{R}$$

$I_{AC} = I - I_{AB'} = \frac{21u}{13R} - \frac{u}{R} = \frac{8u}{13R}$ (1 балл)

$u_{CB} = u - u_{AC} = u - RI_{AC} = u - \frac{8u}{13} = \frac{5u}{13}$

(1 балл)

$I_2 = I_{CB'} = \frac{u_{CB}}{R} = \frac{5u}{13R}$ (1 балл)

$I_{CD} = I_{AC} - I_{CB'} = \frac{8u}{13R} - \frac{5u}{13R} = \frac{3u}{13R}$ (1 балл)

$u_{DB} = u_{CB} - u_{CD} = u_{CB} - I_{CD}R = \frac{5u}{13} - \frac{3u}{13} = \frac{2u}{13}$ (1 балл)

$I_3 = I_{DB'} = \frac{u_{DB}}{R} = \frac{2u}{13R}$ (1 балл)

$I_4 = I_{DB} = \frac{u_{DB}}{2R} = \frac{u}{13R}$ (1 балл)

$I_1 = I_{B''B} = I - I_{DB} = \frac{21u}{13R} - \frac{u}{13R} = \frac{20u}{13R}$ (1 балл)

$\frac{u}{R} = \frac{13}{20}I_1 = \frac{13}{20} * 40 \text{ мА} = 26 \text{ мА}$ (1 балл)

$I_2 = \frac{5u}{13R} = \frac{5}{13} * 26 \text{ мА} = 10 \text{ мА}$ (1 балл)

$I_3 = \frac{2u}{13R} = \frac{2}{13} * 26 \text{ мА} = 4 \text{ мА}$ (1 балл)

$I_4 = \frac{u}{13R} = \frac{1}{13} * 26 \text{ мА} = 2 \text{ мА}$ (1 балл)

.

9 класс **Заключительный тур** **2024-2025**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*12 баллов*) Из посёлка Звёздный со скоростью 16 км/ч выехал велосипедист. Через час в том же направлении со скоростью 32 км/ч выехал мотоциклист, а ещё через час со скоростью 48 км/ч выехал автомобилист. Через некоторое время автомобиль сломался. Какое расстояние он успел проехать, если в момент поломки сумма расстояний от него до мотоциклиста и до велосипедиста не превышала 16 км?

Ответ: 48 км.

Решение. Пусть t ч – время в пути автомобилиста до поломки. Он успел проехать $48t$ км. Тогда как мотоциклист проехал $32(t+1)$ км, а велосипедист $16(t+2)$ км. Расстояния от автомобиля до мотоциклиста и велосипедиста соответственно равны $|48t-32(t+1)|$ и $|48t-16(t+2)|$.

Получаем неравенство $|48t-32(t+1)|+|48t-16(t+2)|\le 16.$ После преобразований неравенство примет вид:

$$|t-2|+2|t-1|\le 1.$$

1) При $t\le 1$ неравенство примет вид $t\ge 1$, следовательно, получаем $t=1$;
2) При $t\in(1;2)$ получаем неравенство $t\le 1$, то есть, решений при данных t нет;
3) При $t\ge 2$ получаем неравенство $t\le\frac{5}{3}$, то есть, решений при данных t нет.

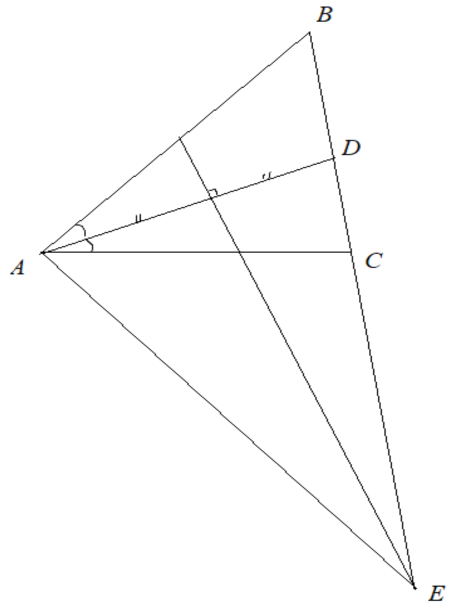
Итак, неравенство имеет единственное решение $t=1$. Таким образом, автомобиль до поломки успел проехать 48 км.

Критерии оценивания. Если участник рассматривает все случаи расположения велосипедиста и мотоциклиста относительно автомобиля, получает правильный ответ, считаем, что решение верное. Если рассмотрен только один вариант расположения, даже при правильном ответе – 6 баллов. Получено верное неравенство с модулем – 8 баллов; при верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла. Полное обоснованное решение 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике ABC со сторонами $AB=6$, $BC=5$, $AC=4$ проведён серединный перпендикуляр к биссектрисе AD, который пересекает прямую BC в точке E. Найдите $BE:CE$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

Решение. Приведём решение в общем виде. Пусть $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$, $AE = x,\ CE = y$. Треугольник ADE равнобедренный. Получаем:



$$\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \frac{1}{2}\angle A;\ \angle CAE = \angle DAE - \frac{1}{2}\angle A = \angle B.$$

Поэтому треугольники ΔABE и ΔCAE подобны. Тогда из подобия следует: $\frac{c}{b} = \frac{a+y}{x} = \frac{x}{y}$. Решая систему двух уравнений, находим: $y = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}$. Отсюда $\frac{BE}{CE} = \frac{a+y}{y} = \frac{c^2}{b^2}$.

Критерии оценивания. Показано равенство углов: $\angle CAE = \angle B$ – тогда 4 балла. Установлено подобие треугольников ΔABE и ΔCAE – это оценивается ещё в 5 баллов. Полное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Имеется 9 различных гирек-эталонов весом 300 г, 400 г, …, 1000 г, 1100 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь весит легче, чем раньше, на 10 г. Как определить эту гирьку за 2 взвешивания на двухчашечных весах без циферблата, не используя других гирь, кроме данных?

Решение. Рассмотрим 3 группы гирь: первая 300 г, 800 г, 1000 г: вторая 500 г, 700 г, 900 г; третья 400 г, 600 г, 1100 г. Каждая группа весила бы 2100 г, если бы не было испорченной гирьки. *Первое взвешивание*. Положим на одну чашу весов первую группу, на другую – вторую. Если одна группа окажется легче, в ней находится испорченная гирька, если же весы будут в равновесии, то испорченная гирька в третьей группе. *Второе взвешивание*. Пусть испорченная гирька в первой группе. На одну чашу весов положим гирьки по 800 и 600 г, на другую 400 и 1000 г. При равновесии весов испорчена оставшаяся гирька первой группы – 300 г, так как гирьки по 400 и 600 целые, и будь испорченная 800 г или 1000 г, весы бы отклонились от равновесия. Аналогично, если испорченная гирька во второй группе, на одну чашу весов положим гирьки по 500 и 600 г, на другую 400 и 700 г, сразу определив, какая фальшивая из 500 и 700 г, или же фальшивая оставшаяся 900 г. Точно также, если испорченная в третьей группе, опять на одну чашу весов положим гирьки по 500 и 600 г, на другую 400 и 700 г,

Критерии оценивания. Гирьки поделили на три группы «одинакового» веса – за это 3 балла. Найдена за одно взвешивание группа из трёх гирь, в которой находится испорченная гирька – за это ещё 4 балла, то есть 7 баллов. Полное решение – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Дана функция $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d и e – целые числа. Известно, что $f(19) = f(135) = 2025$, а $f(0) \in (-4000; -3000)$. Найдите $f(0)$.

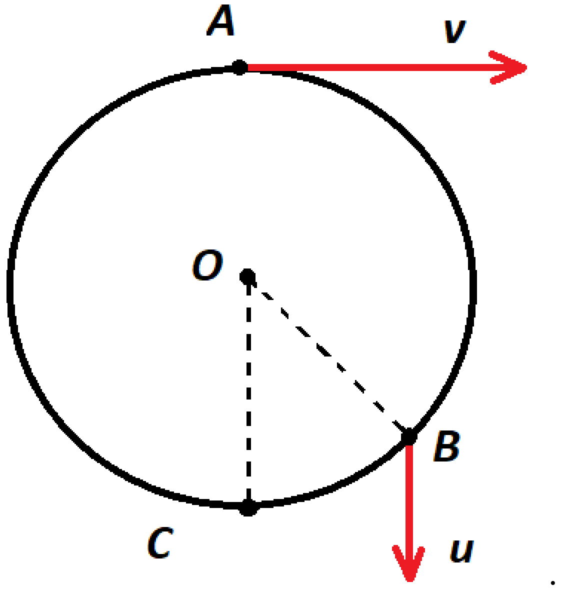
Ответ: -3105.

Решение. Имеем $f(x) = x \cdot g(x) + e$, где $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$ тогда

$f(19) = 19 \cdot n + e$, где $n = g(19)$ – целое число, $f(135) = 135 \cdot m + e$, где $m = g(135)$ – целое число. Из условия следует, что $19 \cdot n = 135 \cdot m$. Так как 19 и 135 взаимно простые числа, то $n = 135k$, $m = 19k$ и $2025 = 19 \cdot 135k + e$. Тогда $e = 2025 - 2565k = f(0)$, и в интервале $(-4000; -3000)$ лежит число -3105 (при k=2).

Критерии оценивания. Если отмечено, что $f(0)=e$, то ставим 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное решение – 13 баллов (задача может быть решена и другими способами).

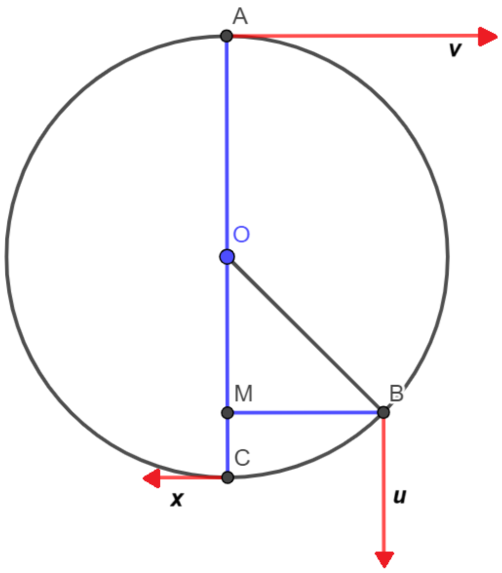
5. *(10 баллов)* У твердого диска, скользящего в гладкой горизонтальной поверхности, в определенный момент времени скорости некоторых точек диска оказались направленными так, как это показано на рисунке. Скорость v точки A направлена по касательной к диску, а скорость u точки B перпендикулярно скорости v. Известно, что v=5 см/с и угол COB равен 45^0. Определите направление и значение скорости точки C.



Ответ: 0,86 см/с

Решение:

Проведем прямую через точку A, перпендикулярную вектору v, и прямую через точку B, перпендикулярную вектору u. Пересечением данных перпендикуляров является мгновенная ось вращения – точка M. (2 балла)



Через точку C проведем перпендикуляр к MC, вдоль данного перпендикуляра направлена скорость x в точке C.

Так как M – мгновенная ось вращения, то угловая скорость $\omega = \frac{v}{AM} = \frac{x}{CM}$.

Отсюда $x = v\frac{CM}{AM}$. (4 балла)

Скорости в точках A и B перпендикулярны, тогда $AM \perp MB$.

В ΔMOB: $OM \perp MB, \angle COB = \angle MOB = 45°$, следовательно, $MB = OM = OB\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, (2 балла)

где R – радиус окружности.

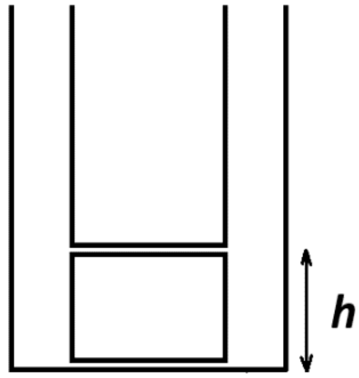
$AM = AO + OM = R + \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{2+\sqrt{2}}{2}R$. (2 балла)

$\mathrm{CM} = CO - \mathrm{OM} = R - \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R$. (2 балла)

$$x = v\frac{CM}{AM} = v\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}R}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}R} = v\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = v\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = v\frac{6-4\sqrt{2}}{2} = v(3-2\sqrt{2}).$$

$\mathrm{x} = 5\frac{\text{см}}{\text{с}}\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right) = 0{,}86\frac{\text{см}}{\text{с}}$. (3 балла)

6. *(10 баллов)* Имеются два одинаковых сообщающихся сосуда, которые соединены тонкими трубками. Одна из трубок соединяет сосуда у самого дна, а вторая располагается на h=40 см выше (см. рис.). Площадь сечения сосудов S=100 см^2. В сосуды налили $V_В$=10 л воды, плотность которой $\rho_В$=1000 кг/м^3. Затем в один из сосудов налили $V_К$=4 л керосина, плотность которого $\rho_к$=800 кг/м^3. Определите конечные уровни жидкости в левом и правом сосуде.



Ответ: 72,5 см; 67,5 см

Решение:

Изначальный уровень воды в каждом сосуде:

$H = \frac{V_в}{2S} = \frac{10\ л}{2 \cdot 100 см^2} = 50$ см (выше верхней трубки на $\Delta h = H - h$). (1 балл)

Пусть в левый сосуд заливают керосин.

Предположим, что после установления равновесия часть керосина окажется в правом сосуде.

Тогда из левого сосуда в правый перешло Δh воды и x керосина. В левом сосуде керосина осталось $L - x$ керосина, где $L = \frac{V_к}{S} = \frac{4\ л}{100 см^2} = 40$ см – суммарный уровень керосина в двух сосудах. (1 балл)

Давление жидкостей на дно в левом сосуде $p_1 = \rho_в g h + \rho_к g(L - x)$; (1 балл)

в правом сосуде $p_2 = \rho_в g(H + \Delta h) + \rho_к g x = \rho_в g(2H - h) + \rho_к g x$. (1 балл)

Так как сосуды сообщающиеся, то $p_1 = p_2$. (1 балл)

$$\rho_в g h + \rho_к g(L - x) = \rho_в g(2H - h) + \rho_к g x$$

$$\rho_в h + \rho_к L - \rho_в(2H - h) = 2\rho_к x$$

$$x = \frac{\rho_к L - 2\rho_в(H - h)}{2\rho_к}$$

$$x = \frac{800\frac{кг}{м^3} * 40 \text{ см} - 2 * 1000\frac{кг}{м^3}(50 \text{ см} - 40 \text{ см})}{2 * 800\frac{кг}{м^3}} = 7{,}5 \text{ см}$$ (1 балл)

Если бы получившееся значение было меньше нуля, то в правый сосуд перетекла бы только часть воды.

$x > 0$, следовательно, наше предположение о том, что керосин перетекает в правый сосуд, верно.

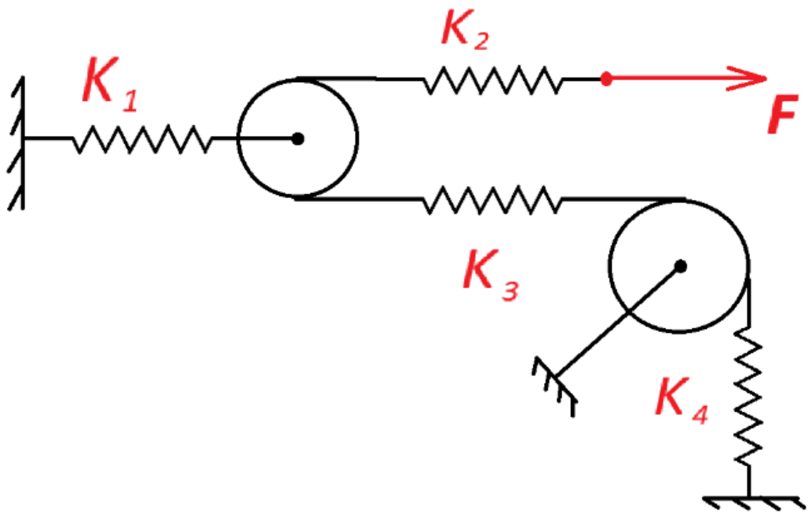
Уровень жидкости в левом сосуде:

$H_1 = h + L - x = 40$ см $+ 40$ см $- 7{,}5$ см $= 72{,}5$ см. (2 балла)

Уровень жидкости в правом сосуде:

$H_2 = H + \Delta h + x = 2H - h + x = 2 * 50$ см $- 40$ см $+ 7{,}5$ см $= 67{,}5$ см. (2 балла)

7. *(15 баллов)* Имеется конструкция, состоящая из четырех невесомых пружин, одного подвижного и одного неподвижного блоков. Все блоки идеальные. Жесткости пружин: $К_1$=300 Н/м, $К_2$=$К_3$=900 Н/м и $К_4$=270 Н/м. К концу второй пружины приложили силу F=27 Н. Определите эффективную жесткость данной системы, и, на сколько в результате сместится точка приложения силы.



Ответ: 0,52 м; ≈51,92 Н/м

Решение:

Так как пружины 2, 3, 4 соединены одной нитью, то:

$F_{упр2} = F_{упр3} = F_{упр4} = F.$ (1 балл)

Из условия равновесия на подвижный блок $F_{упр1} = 2F.$ (2 балла)

Удлинения пружин:

$\Delta x_1 = \frac{F_{упр1}}{k_1} = \frac{2F}{k_1} = \frac{2 \cdot 27 \text{ Н}}{300 \text{ Н/м}} = 0{,}18$ м (1 балл)

$\Delta x_2 = \frac{F_{упр2}}{k_2} = \frac{F}{k_2} = \frac{27 \text{ Н}}{900 \text{ Н/м}} = 0{,}03$ м (1 балл)

$$\Delta x_3 = \frac{F_{упр3}}{k_3} = \frac{F}{k_3} = \frac{27\ \text{Н}}{900\ \text{Н/м}} = 0{,}03\ \text{м} \qquad (1\ \text{балл})$$

$$\Delta x_4 = \frac{F_{упр4}}{k_4} = \frac{F}{k_4} = \frac{27\ \text{Н}}{270\ \text{Н/м}} = 0{,}1\ \text{м} \qquad (1\ \text{балл})$$

За счет удлинения первой пружины подвижный блок сдвинулся на Δx_1, из-за чего нить вытянулась на $2\Delta x_1$.

Нить с пружинами 2, 3, 4 “удлинилась” на $\Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4$.

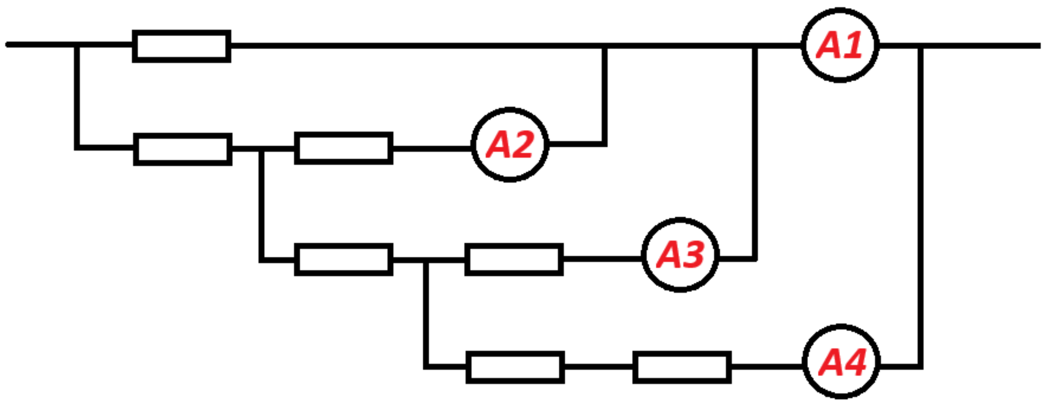
Итого точка приложения силы сместилась на:

$$\Delta x = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = 2 * 0{,}18\ \text{м} + 0{,}03\ \text{м} + 0{,}03\ \text{м} + 0{,}1\ \text{м} = 0{,}52\ \text{м}.$$

(4 балла)

Эффективная жесткость системы $k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{27\ \text{Н}}{0{,}52\ \text{м}} = 51{,}92\frac{\text{Н}}{\text{м}}$. (4 балла)

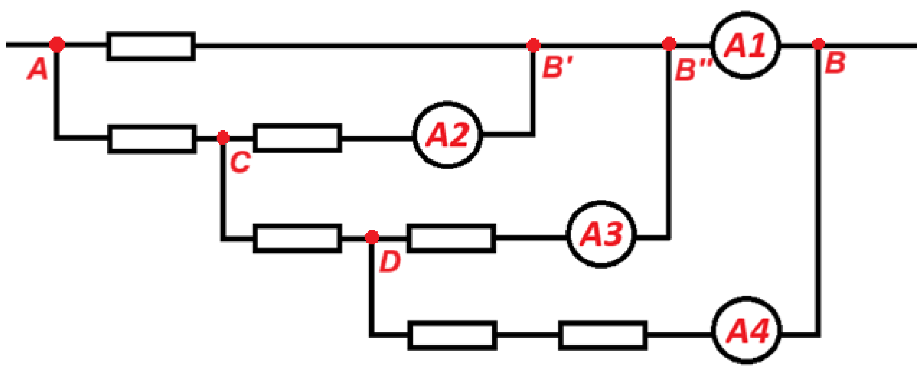
8. *(15 баллов)* Электрическая схема состоит из семи одинаковых резисторов и четырех одинаковых идеальных амперметров. Известно, что показания первого А1 амперметра I_1=600 мА. Определите показания остальных амперметров.



Ответ: 150 мА; 60 мА; 30 мА

Решение:

Пусть сопротивление резисторов R, а напряжение на всей цепи u. Обозначим узлы схемы так, как показано на рисунке (точки B, B’ и B’’ можно соединить, так как их потенциалы равны).



Найдем эквивалентное сопротивление цепи.

$$R_{DB} = \frac{2R * R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$$

$$R_{CB} = \frac{R(R + R_{DB})}{R + (R + R_{DB})} = \frac{5}{8}R$$

$R_{экв} = R_{AB} = \frac{R(R+R_{CB})}{R+(R+R_{CB})} = \frac{13}{21}R$ (2 балла)

Общий ток в цепи $I = \frac{u}{R_{экв}} = \frac{21u}{13R}$. (1 балл)

$$I_{AB\prime} = \frac{u}{R}$$

$I_{AC} = I - I_{AB'} = \frac{21u}{13R} - \frac{u}{R} = \frac{8u}{13R}$ (1 балл)

$u_{CB} = u - u_{AC} = u - RI_{AC} = u - \frac{8u}{13} = \frac{5u}{13}$ (1 балл)

$I_2 = I_{CB\prime} = \frac{u_{CB}}{R} = \frac{5u}{13R}$ (1 балл)

$I_{CD} = I_{AC} - I_{CB'} = \frac{8u}{13R} - \frac{5u}{13R} = \frac{3u}{13R}$ (1 балл)

$u_{DB} = u_{CB} - u_{CD} = u_{CB} - I_{CD}R = \frac{5u}{13} - \frac{3u}{13} = \frac{2u}{13}$ (1 балл)

$I_3 = I_{DB'} = \frac{u_{DB}}{R} = \frac{2u}{13R}$ (1 балл)

$I_4 = I_{DB} = \frac{u_{DB}}{2R} = \frac{u}{13R}$ (1 балл)

$I_1 = I_{B\prime\prime B} = I - I_{DB} = \frac{21u}{13R} - \frac{u}{13R} = \frac{20u}{13R}$ (1 балл)

$\frac{u}{R} = \frac{13}{20}I_1 = \frac{13}{20} * 600 \text{ мА} = 390 \text{ мА}$ (1 балл)

$I_2 = \frac{5u}{13R} = \frac{5}{13} * 390 \text{ мА} = 150 \text{ мА}$ (1 балл)

$I_3 = \frac{2u}{13R} = \frac{2}{13} * 390 \text{ мА} = 60 \text{ мА}$ (1 балл)

$I_4 = \frac{u}{13R} = \frac{1}{13} * 390 \text{ мА} = 30 \text{ мА}$ (1 балл)

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Три бегуна стартуют в одном направлении на одну дистанцию с интервалом в 1 секунду. Скорость, стартовавшего первым, 7 м/сек, вторым – 8 м/сек, третьим – 9 м/сек. Третий бегун финишировал первым, и в момент его финиша сумма расстояний от него до двух остальных бегунов не превышала двух метров. Найдите длину дистанции.

Ответ: 72 м.

Решение. Обозначим S м – длина дистанции. Эту дистанцию третий бегун преодолел за $\frac{S}{9}$ сек. За это время первый бегун пробежал $7\left(\frac{S}{9}+2\right)$ м, и до финиша ему осталось $S-7\left(\frac{S}{9}+2\right)=\frac{2}{9}S-14$ м. Заметим, что $\frac{2S}{9}-14\geq 0$, то есть $S\geq 63$. В момент финиша третьего бегуна второй бегун пробежал $8\left(\frac{S}{9}+1\right)$ м, и до финиша ему осталось $S-8\left(\frac{S}{9}+1\right)=\frac{S}{9}-8$ м. И $S\geq 72$. Сумма расстояний двух первых бегунов до финиша (в момент, когда третий финишировал) равна $\frac{2}{9}S-14+\frac{S}{9}-8=\frac{S}{3}-22$. По условию задачи получаем $\frac{S}{3}-22\leq 2$, или $S\leq 72$. Так как ранее получено неравенство $S\geq 72$, то $S=72$.

Критерии оценивания. Получено верное итоговое неравенство, но нет ограничений на величину дистанции – 8 баллов; при верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла. Полное обоснованное решение 11 баллов.

2. (*13 баллов*) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 8×12. У него 3 краски: белая, серая, черная. Он должен раскрасить клетки так, чтобы соседние клетки были разного цвета, но при этом не было резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не могут быть соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона). Сколько способов у Пети раскрасить доску?

Ответ: 2^{49}.

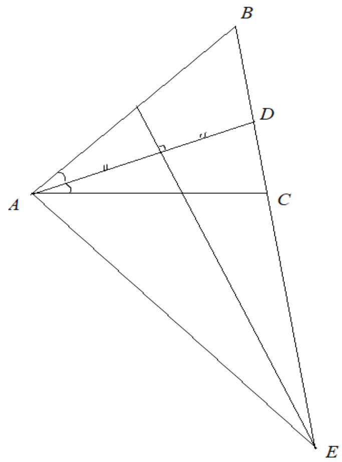
Решение. Перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 48 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{48}, а всего 2^{49}.

Критерии оценивания. Белые и черные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 8 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (*13 баллов*) В треугольнике ABC со сторонами $AB=8,\ BC=7,\ AC=6$ проведён серединный перпендикуляр к биссектрисе AD, который пересекает прямую BC в точке E. Найдите $BE:CE$.

Ответ: $\frac{16}{9}$.

Решение. Приведём решение в общем виде. Пусть $AB=c,\ BC=a,\ AC=b$, $AE=x,\ CE=y$. Треугольник ADE равнобедренный. Получаем:



$$\angle DAE=\angle ADE=\angle B+\frac{1}{2}\angle A;\ \angle CAE=\angle DAE-\frac{1}{2}\angle A=\angle B.$$

Поэтому треугольники ΔABE и ΔCAE подобны. Тогда из подобия следует: $\frac{c}{b}=\frac{a+y}{x}=\frac{x}{y}$. Решая систему двух уравнений, находим: $y=\frac{ab^2}{c^2-b^2}$. Отсюда $\frac{BE}{CE}=\frac{a+y}{y}=\frac{c^2}{b^2}$.

Критерии оценивания. Показано равенство углов: $\angle CAE=\angle B$ – тогда 4 балла. Установлено подобие треугольников ΔABE и ΔCAE – это оценивается ещё в 5 баллов. Полное решение 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Известно, что для некоторого натурального a числа $2a+15$ и $3a+5$ делятся на число pq, где p и q – простые. Найдите все такие p и q.

Ответ: 5 и 7.

Решение. Из условия следует, что $3(2a+15)-2(3a+5)=35$ делится на pq. Поэтому никакие простые, кроме чисел 5 и 7, не подходят, а 5 и 7 подходят, например, при a=10.

Критерии оценивания. Ответ угадан 2 балла. Найдено число 35, но не приведён пример для a – тогда 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

5. (*10 баллов*) В распоряжении лаборанта Максима имеются два сосуда с жидкостями, плотности которых ρ_1=800 кг/м^3 и ρ_2=1000 кг/м^3. Максим обратил внимание, что если один и тот же шарик поочередно полностью опускать в данные жидкости, то для удержания шарика в равновесии, необходимо прикладывать одну и ту же силу. Определите плотность материала шарика.

Ответ: 900 кг/м^3

Решение:

В жидкости 1 шарик утонет, а в жидкости 2 всплывет ($\rho_2 > \rho_1$). (2 балла)

Тогда условие равновесия шарика в обоих случаях следующее:

$F_1 + F_{a1} = mg$ (2 балла)

$F_{a2} = F_2 + mg$ (2 балла)

Сложим уравнения:

$F_1 + F_{a1} + F_{a2} = 2mg + F_2$

Так как $F_1 = F_2$ по условию, то:

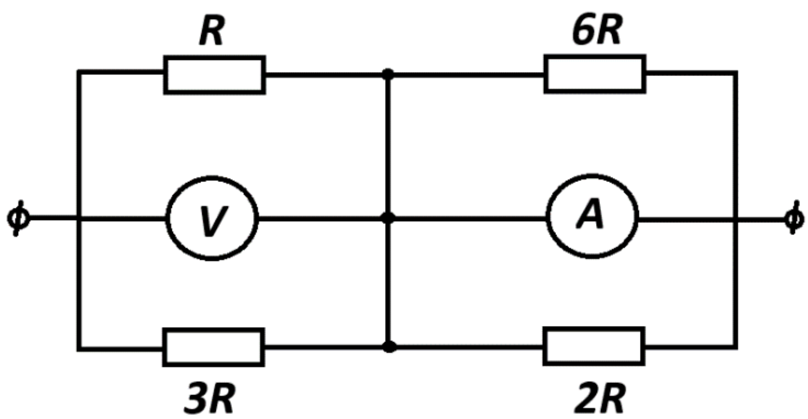
$F_{a1} + F_{a2} = 2mg.$

$\rho_1 gV + \rho_2 gV = 2\rho Vg,$

где ρ – плотность шарика.

Отсюда $\rho = \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = \frac{800\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}+1000\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{2} = 900\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. (4 балла)

6. (*10 баллов*) Цепь, состоящую из вольтметра, амперметра и четырех резисторов с сопротивлениями R, 2R, 3R и 6R подключили к источнику постоянного напряжения. Известно, что R = 2 Ом, а вольтметр показал 4,5 В. Что покажет амперметр? Какой ток потечет через резистор R? Амперметр убрали из цепи. Что после этого покажет вольтметр? Приборы идеальные.



Ответ: 3 А; 2,25 А; 1,5 В

Решение: Так как резисторы 6R, 2R и идеальный амперметр соединены параллельно, то ток потечет только по амперметру, а напряжение на этом участке будет равняться нулю. (1 балл)

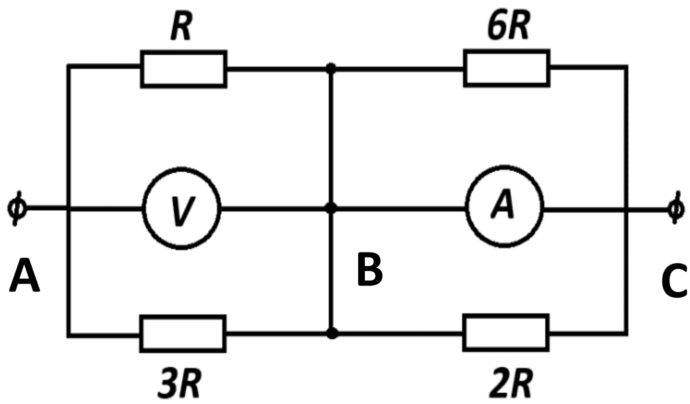
Следовательно, напряжение, которое показал вольтметр, равняется напряжению на всей цепи и напряжению источника ($u_V = u_0 = 4{,}5$ В), а ток, который показал амперметр, равен общему току в цепи $I_A = I_0$. (1 балл)

Так как по резисторам 6R и 2R, а также по идеальному вольтметру ток не потечет, то их можно убрать из цепи. Общее сопротивление цепи R_0.

Из параллельного соединения следует $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R}$. $I_A = I_0 = u_0 \frac{1}{R_0} = u_0 \frac{4}{3R}$.

$I_A = \frac{4{,}5\text{ В}*4}{3*2\text{ Ом}} = 3$ А. (2 балла)

Ток, текущий через резистор R, можно найти через закон Ома: $I = \frac{u_V}{R} = \frac{4{,}5\text{ В}}{2\text{ Ом}} = 2{,}25$ А. (2 балла)



Если амперметр убрать из цепи, то сопротивление между узлами A и B (следует из параллельного соединения резисторов) $R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{3R}} = \frac{3}{4}R$, а между узлами B и C $R_{BC} = \frac{1}{\frac{1}{2R}+\frac{1}{6R}} = \frac{3}{2}R$.

Так как $I_{AB} = I_{BC}$, то: $\frac{u_{AB}}{u_{BC}} = \frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{\frac{3}{4}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{1}{2}$.

(2 балла)

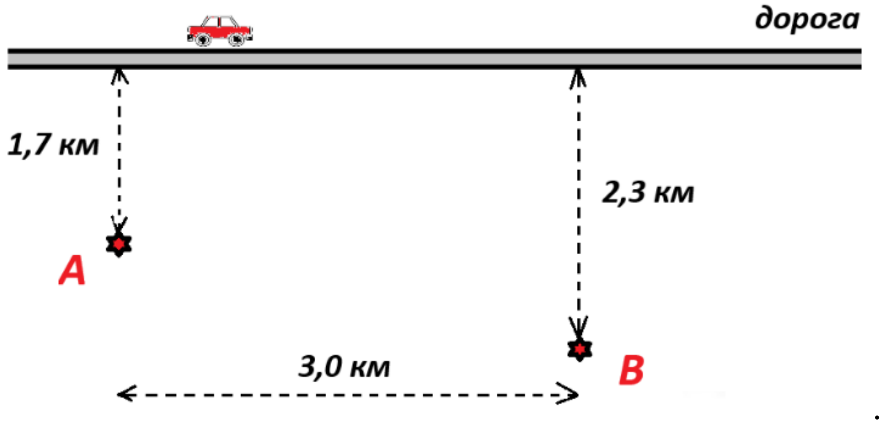
Напряжений на всей цепи: $u_0 = u_{AB} + u_{BC}$.

Напряжение между точками A и B равно напряжению на вольтметре.

Отсюда следует, что $u_V = u_{AB} = \frac{1}{3}u_0 = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5\text{ В} = 1{,}5$ В.

(2 балла)

7. *(15 баллов)* Перед курьером Борисом поставлена следующая задача. Необходимо из пункта А пешком добраться до автомобиля, находящегося на дороге, взять груз и доставить его в пункт В как можно быстрее. Автомобиль может встретить и передать ему груз в любой точке дороги. В автомобиле свободных мест нет, поэтому подвезти Бориса он не сможет, Борис должен передвигаться только пешком, причем его скорость 2,5 км/ч. Кратчайшее расстояние от пункта А до дороги равно 1,7 км, кратчайшее расстояние от пункта В до дороги – 2,3 км, расстояние между пунктами, отсчитываемое вдоль дороги – 3,0 км (см. рисунок). За какое минимальное время Борис справится с поставленной задачей?

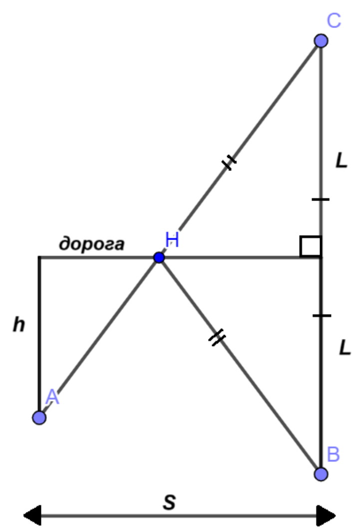


Ответ: 2 ч

Решение:

Отразим пункт В симметрично относительно дороги (точка С на рисунке).

(4 балла)



Выберем на дороге произвольную точку Н, где Борис заберет груз. От А до Н и от Н до В и С Борис должен идти по прямой, так как время должно быть минимальным. Время до пункта В $t_{AB} = \frac{AH+HB}{v}$, а до пункта С - $t_{AC} = \frac{AH+HC}{v}$. Из симметрии следует, что $HC = HB$ (см. рис.), тогда $t_{AB} = t_{AC}$. Решим задачу, когда Борису нужно добраться в пункт С.

Борис доберется из A в C за минимальное время только в том случае, если он идет по прямой AC. (4 балла)

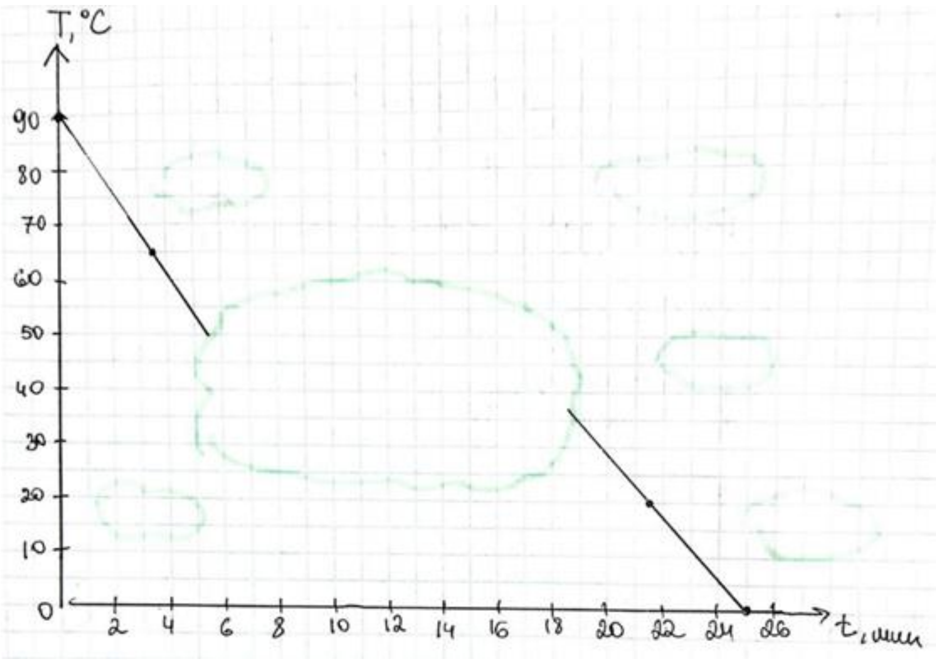
Вдоль дороги придется идти S = 3 км, перпендикулярно ей (h + L) = (1,7 км + 2,3 км) = 4 км.

По теореме Пифагора $AC = \sqrt{S^2 + (h+L)^2} = \sqrt{(3\text{ км})^2 + (4\text{ км})^2} = 5$ км. (4 балла)

$t_{min} = \frac{AC}{v} = \frac{5\text{ км}}{2{,}5\text{ км/ч}} = 2$ ч. (3 балла)

8. *(15 баллов)* В архиве уездного города N обнаружили запачканный лист с графиком зависимости температуры от времени. На обороте было указано, что некий ученый Кирилл взял один литр воды и начал отводить от него тепло с постоянной скоростью. Как только вся вода превратилась в лед, ученый начал отводить от него тепло с другой постоянной скоростью. Обнаружившие график заметили, что ось времени «съехала» вдоль оси температур. Найдите мощности, с которыми ученый отводил тепло, время, когда вся вода замерзла, а также сдвиг оси времени (в градусах Цельсия).

Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды ρ=1000 кг/м^3, удельная теплота плавления льда λ=330 кДж/кг, удельная теплоёмкость воды и льда 4200 Дж/кг·^{0}C и 2100 Дж/кг·^{0}C соответственно.



Ответ: 500 Вт; 200 Вт; 40^{O}C

Решение:

Объем воды один литр, следовательно, ее масса $m = \rho V = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$ кг. (1 балл)

Так как во время остывания воды потерь в среду не было, то для участков графика для остывания справедливо выражение:

$P\Delta t = cm\Delta T$. (2 балла)

$P_1 = \frac{c_1 m \Delta T}{\Delta t} = c_1 m\, k_1$ – мощность на первом участке графика (процесс остывания воды), где c_1 – удельная теплоемкость воды, а k_1 - коэффициент угла наклона данного участка графика.

Аналогично $P_2 = c_2 m\, k_2$, где c_2 – удельная теплоемкость льда.

Определим параметры видимых линейных участков, подставляя по две точки с известными данными (t, T).

$$\begin{cases} k_1 \cdot 0 \text{ мин} + b_1 = 90°C \\ k_1 \cdot 3{,}5 \text{ мин} + b_1 = 65°C \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 90°C \\ k_1 = -\frac{50}{7}\frac{°C}{\text{мин}} = -\frac{5}{42}\frac{°C}{\text{с}} \end{cases}$$ (1 балл)

$$P_1 = 4200\frac{\text{Дж}}{\text{кг}*°C} \cdot 1\text{ кг} \cdot \left(-\frac{5}{42}\frac{°C}{\text{с}}\right) = -500\text{ Вт}.$$

Минус получился из-за того, что вода остывает, поэтому коэффициент угла наклона графика меньше нуля. Мощность отвода тепла берется по модулю, то есть ответ 500 Вт. (2 балла)

$$\begin{cases} k_2 \cdot 21{,}5 \text{ мин} + b_2 = 20°C \\ k_2 \cdot 25 \text{ мин} + b_2 = 0°C \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = \frac{1000}{7}°C \\ k_2 = -\frac{40}{7}\frac{°C}{\text{мин}} = -\frac{2}{21}\frac{°C}{\text{с}} \end{cases}$$ (1 балл)

$$P_2 = 2100\frac{\text{Дж}}{\text{кг}*°C} \cdot 1\text{ кг} \cdot \left(-\frac{2}{21}\frac{°C}{\text{с}}\right) = -200\text{ Вт}$$

Опять же, -200 Вт – это мощность нагрева, а мощность отвода тепла (охлаждения) 200 Вт. (2 балла)

Время, за которое вода полностью превратится в лед:

$$\Delta t = \frac{\lambda m}{P_1} = \frac{330000\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 1\text{ кг}}{500\text{ Вт}} = 660\text{ с} = 11\text{ мин}.$$ (2 балла)

Так как график нашли со сдвинутой осью, то пусть замерзание воды происходит при температуре T, вода начинает замерзать в момент t, а заканчивает в момент $t + \Delta t$.

Справедливы следующие уравнения, так как точки начала и конца замерзания воды принадлежат соответственно первому и второму участку графика:

$$\begin{cases} k_1 t + b_1 = T \\ k_2(t + \Delta t) + b_2 = T \end{cases}$$

$$t = \frac{b_2 - b_1 + k_2 \Delta t}{k_1 - k_2} = \frac{\frac{1000}{7}°C - 90°C + \left(-\frac{40}{7}\frac{°C}{\text{мин}}\right) * 11\text{ мин}}{-\frac{50}{7}\frac{°C}{\text{мин}} - \left(-\frac{40}{7}\frac{°C}{\text{мин}}\right)} = 7\text{ мин}$$ (2 балла)

$$T = k_1 t + b_1 = -\frac{50}{7}\frac{°C}{\text{мин}} * 7\text{ мин} + 90°C = 40°C$$

Так как получилось, что вода замерзает при $40°C$, то сдвиг оси времени произошел на $40°C$ в положительном направлении оси температур. (2 балла)

8 класс **Заключительный тур** **2024-2025**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Три бегуна стартуют в одном направлении на одну дистанцию с интервалом в 1 секунду. Скорость, стартовавшего первым, 6 м/сек, вторым – 7 м/сек, третьим – 8 м/сек. Третий бегун финишировал первым, и в момент его финиша сумма расстояний от него до двух остальных бегунов не превышала двух метров. Найдите длину дистанции.

Ответ: 56 м.

Решение. Обозначим S м – длина дистанции. Эту дистанцию третий бегун преодолел за $\frac{S}{8}$ сек. За это время первый бегун пробежал $6\left(\frac{S}{8}+2\right)$ м, и до финиша ему осталось $S-6\left(\frac{S}{8}+2\right)=\frac{S}{4}-12$ м. Заметим, что $\frac{S}{4}-12\geq 0$, то есть $S\geq 48$. В момент финиша третьего бегуна второй бегун пробежал $7\left(\frac{S}{8}+1\right)$ м, и до финиша ему осталось $S-7\left(\frac{S}{8}+1\right)=\frac{S}{8}-7$ м. И $S\geq 56$. Сумма расстояний двух первых бегунов до финиша (в момент, когда третий финишировал) равна $\frac{S}{4}-12+\frac{S}{8}-7=\frac{3S}{8}-19$. По условию задачи получаем $\frac{3S}{8}-19\leq 2$, или $S\leq 56$. Так как ранее получено неравенство $S\geq 56$, то $S=56$.

Критерии оценивания. Получено верное итоговое неравенство, но нет ограничений на величину дистанции – 8 баллов; при верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла. Полное обоснованное решение 11 баллов.

2. (*13 баллов*) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 6×14. У него 3 краски: белая, серая, черная. Он должен раскрасить клетки так, чтобы соседние клетки были разного цвета, но при этом не было резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не могут быть соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона). Сколько способов у Пети раскрасить доску?

Ответ: 2^{43}.

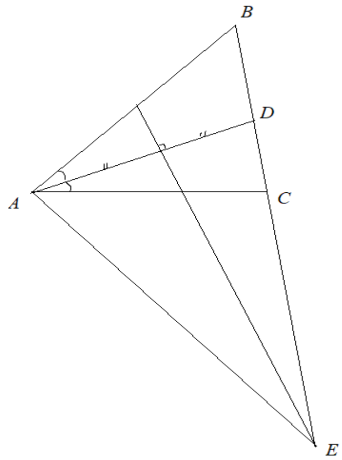
Решение. Перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 42 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{42}, а всего 2^{43}.

Критерии оценивания. Белые и черные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 8 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (*13 баллов*) В треугольнике ABC со сторонами $AB=6,\ BC=5,\ AC=4$ проведён серединный перпендикуляр к биссектрисе AD, который пересекает прямую BC в точке E. Найдите $BE:CE$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

Решение. Приведём решение в общем виде. Пусть $AB=c,\ BC=a,\ AC=b$, $AE=x,\ CE=y$. Треугольник ADE равнобедренный. Получаем:



$$\angle DAE=\angle ADE=\angle B+\frac{1}{2}\angle A;\ \angle CAE=\angle DAE-\frac{1}{2}\angle A=\angle B.$$

Поэтому треугольники ΔABE и ΔCAE подобны. Тогда из подобия следует: $\frac{c}{b}=\frac{a+y}{x}=\frac{x}{y}$. Решая систему двух уравнений, находим: $y=\frac{ab^2}{c^2-b^2}$. Отсюда $\frac{BE}{CE}=\frac{a+y}{y}=\frac{c^2}{b^2}$.

Критерии оценивания. Показано равенство углов: $\angle CAE=\angle B$ – тогда 4 балла. Установлено подобие треугольников ΔABE и ΔCAE – это оценивается ещё в 5 баллов. Полное решение 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Известно, что для некоторого натурального a числа $4a+5$ и $3a-10$ делятся на число pq, где p и q – простые. Найдите все такие p и q.

Ответ: 5 и 11.

Решение. Из условия следует, что $3(4a+5)-4(3a-10)=55$ делится на pq. Поэтому никакие простые, кроме чисел 5 и 11, не подходят, а 5 и 11 подходят, например, при a=40.

Критерии оценивания. Ответ угадан 2 балла. Найдено число 55, но не приведён пример для a – тогда 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

5. *(10 баллов)* В распоряжении лаборанта Максима имеются два сосуда с жидкостями, плотности которых ρ_1=600 кг/м^3 и ρ_2=800 кг/м^3. Максим обратил внимание, что если один и тот же шарик поочередно полностью опускать в данные жидкости, то для удержания шарика в равновесии, необходимо прикладывать одну и ту же силу. Определите плотность материала шарика.

Ответ: 700 кг/м^3

Решение: В жидкости 1 шарик утонет, а в жидкости 2 всплывет ($\rho_2 > \rho_1$). (2 балла)

Тогда условие равновесия шарика в обоих случаях следующее:

$F_1 + F_{a1} = mg$ (2 балла)

$F_{a2} = F_2 + mg$ (2 балла)

Сложим уравнения:

$F_1 + F_{a1} + F_{a2} = 2mg + F_2$

Так как $F_1 = F_2$ по условию, то:

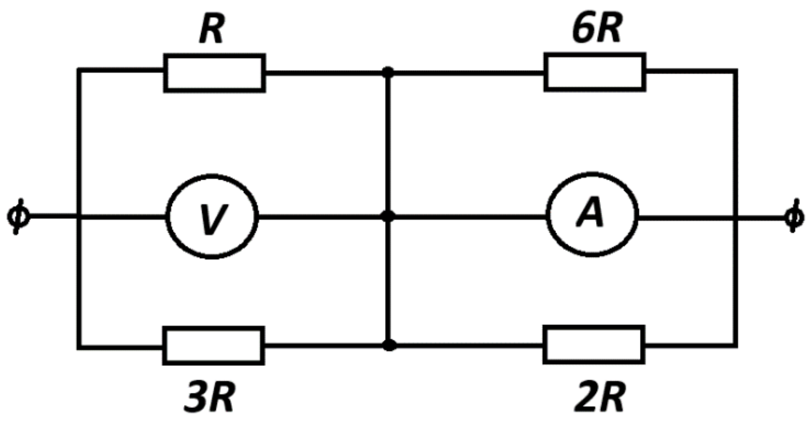
$F_{a1} + F_{a2} = 2mg.$

$\rho_1 gV + \rho_2 gV = 2\rho Vg,$

где ρ – плотность шарика.

Отсюда $\rho = \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = \frac{600\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}+800\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{2} = 700\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. (4 балла)

6. *(10 баллов)* Цепь, состоящую из вольтметра, амперметра и четырех резисторов с сопротивлениями R, 2R, 3R и 6R подключили к источнику постоянного напряжения. Известно, что R = 4 Ом, а вольтметр показал 4 В. Что покажет амперметр? Какой ток потечет через резистор R? Амперметр убрали из цепи. Что после этого покажет вольтметр? Приборы идеальные.



Ответ: 4/3 А; 1 А; 4/3 В

Решение: Так как резисторы 6R, 2R и идеальный амперметр соединены параллельно, то ток потечет только по амперметру, а напряжение на этом участке будет равняться нулю. (1 балл)

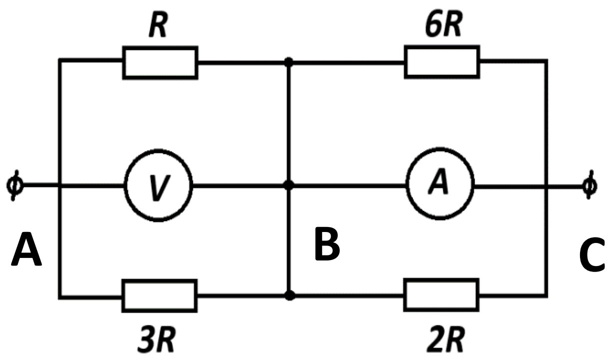
Следовательно, напряжение, которое показал вольтметр, равняется напряжению на всей цепи и напряжению источника ($u_V = u_0 = 4$ В), а ток, который показал амперметр, равен общему току в цепи $I_A = I_0$. (1 балл)

Так как по резисторам 6R и 2R, а также по идеальному вольтметру ток не потечет, то их можно убрать из цепи. Общее сопротивление цепи R_0.

Из параллельного соединения следует $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R}$. $I_A = I_0 = u_0 \frac{1}{R_0} = u_0 \frac{4}{3R}$.

$I_A = \frac{4\text{ В}*4}{3*4\text{ Ом}} = \frac{4}{3}$ А. (2 балла)

Ток, текущий через резистор R, можно найти через закон Ома: $I = \frac{u_V}{R} = \frac{4\text{ В}}{4\text{ Ом}} = 1$ А. (2 балла)



Если амперметр убрать из цепи, то сопротивление между узлами A и B (следует из параллельного соединения резисторов) $R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{3R}} = \frac{3}{4}R$, а между узлами B и C $R_{BC} = \frac{1}{\frac{1}{2R}+\frac{1}{6R}} = \frac{3}{2}R$.

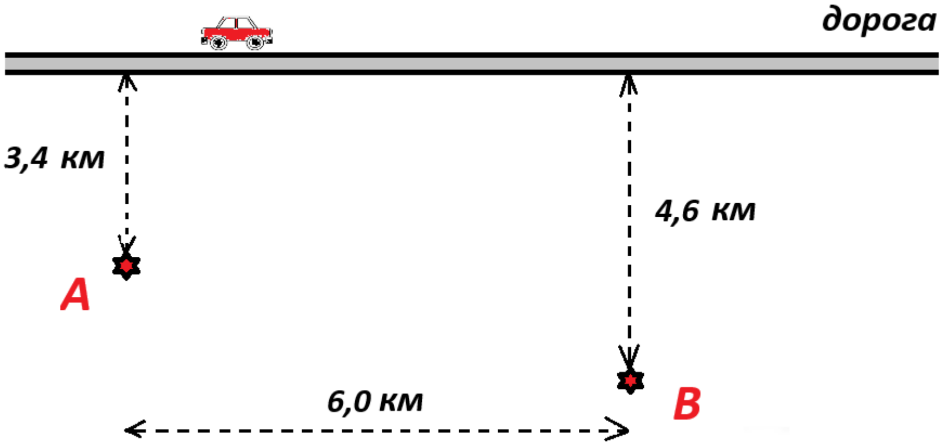
так как $I_{AB} = I_{BC}$, то: $\frac{u_{AB}}{u_{BC}} = \frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{\frac{3}{4}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{1}{2}$. (2 балла)

Напряжений на всей цепи: $u_0 = u_{AB} + u_{BC}$.

Напряжение между точками A и B равно напряжению на вольтметре.

Отсюда следует, что $u_V = u_{AB} = \frac{1}{3}u_0 = \frac{1}{3} \cdot 4\text{ В} = \frac{4}{3}$ В. (2 балла)

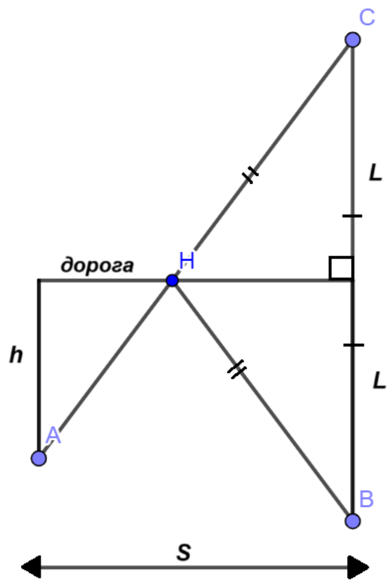
7. *(15 баллов)* Перед курьером Борисом поставлена следующая задача. Необходимо из пункта А пешком добраться до автомобиля, находящегося на дороге, взять груз и доставить его в пункт В как можно быстрее. Автомобиль может встретить и передать ему груз в любой точке дороги. В автомобиле свободных мест нет, поэтому подвезти Бориса он не сможет, Борис должен передвигаться только пешком, причем его скорость 2 км/ч. Кратчайшее расстояние от пункта А до дороги равно 3,4 км, кратчайшее расстояние от пункта B до дороги – 4,6 км, расстояние между пунктами, отсчитываемое вдоль дороги – 6,0 км (см. рисунок). За какое минимальное время Борис справится с поставленной задачей?



Ответ: 5 ч

Решение:

Отразим пункт B симметрично относительно дороги (точка C на рисунке). (4 балла)



Выберем на дороге произвольную точку H, где Борис заберет груз. От A до H и от H до B и C Борис должен идти по прямой, так как время должно быть минимальным. Время до пункта B $t_{AB} = \frac{AH+HB}{v}$, а до пункта C - $t_{AC} = \frac{AH+HC}{v}$. Из симметрии следует, что $HC = HB$ (см. рис.), тогда $t_{AB} = t_{AC}$. Решим задачу, когда Борису нужно добраться в пункт C.

Борис доберется из A в C за минимальное время только в том случае, если он идет по прямой AC. (4 балла)

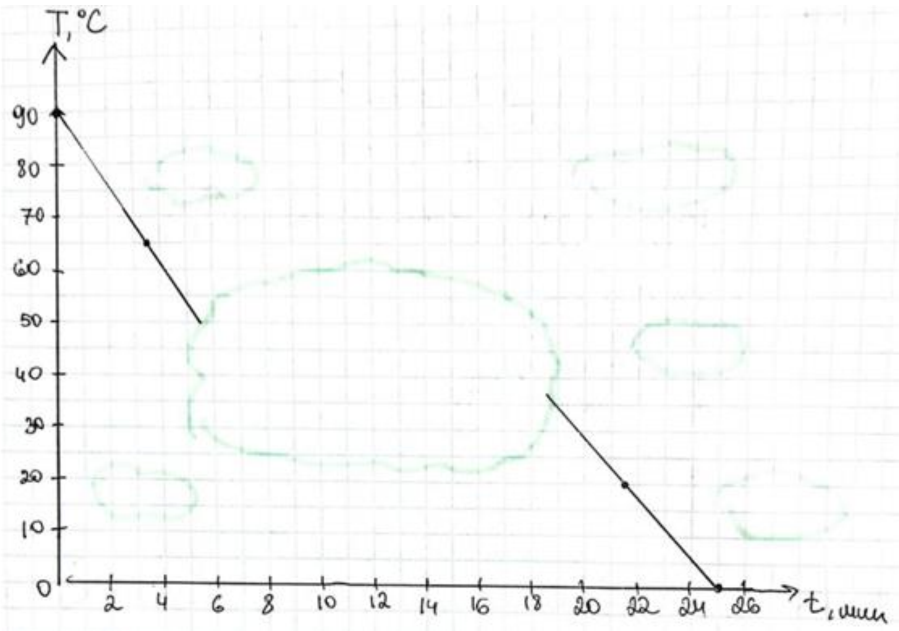
Вдоль дороги придется идти S = 6 км, перпендикулярно ей (h + L) = (3,4 км + 4,6 км) = 8 км.

По теореме Пифагора $AC = \sqrt{S^2 + (h+L)^2} = \sqrt{(6\text{ км})^2 + (8\text{ км})^2} = 10\text{ км}.$ (4 балла)

$t_{min} = \frac{AC}{v} = \frac{10\text{ км}}{2\text{ км/ч}} = 5\text{ ч}.$ (3 балла)

8. (15 баллов) В архиве уездного города N обнаружили запачканный лист с графиком зависимости температуры от времени. На обороте было указано, что некий ученый Кирилл взял один литр воды и начал отводить от него тепло с постоянной скоростью. Как только вся вода превратилась в лед, ученый начал отводить от него тепло с другой постоянной скоростью. Обнаружившие график заметили, что ось времени «съехала» вдоль оси температур. Найдите мощности, с которыми ученый отводил тепло, время, когда вся вода замерзла, а также сдвиг оси времени (в градусах Цельсия).

Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды ρ=1000 кг/м^3, удельная теплота плавления льда λ=330 кДж/кг, удельная теплоёмкость воды и льда 4200 Дж/кг·^{0}С и 2100 Дж/кг·^{0}С соответственно.



Ответ: 500 Вт; 200 Вт; 40ОС

Решение:

Объем воды один литр, следовательно, ее масса $m = \rho V = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$ кг. (1 балл)

Так как во время остывания воды потерь в среду не было, то для участков графика для остывания справедливо выражение:

$P\Delta t = cm\Delta T.$ (2 балла)

$P_1 = \frac{c_1 m \Delta T}{\Delta t} = c_1 m\, k_1$ – мощность на первом участке графика (процесс остывания воды), где c_1 – удельная теплоемкость воды, а k_1 - коэффициент угла наклона данного участка графика.

Аналогично $P_2 = c_2 m\, k_2$, где c_2 – удельная теплоемкость льда.

Определим параметры видимых линейных участков, подставляя по две точки с известными данными (t, T).

$$\begin{cases} k_1 \cdot 0\text{ мин} + b_1 = 90°C \\ k_1 \cdot 3{,}5\text{ мин} + b_1 = 65°C \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 90°C \\ k_1 = -\frac{50}{7}\frac{°C}{\text{мин}} = -\frac{5}{42}\frac{°C}{\text{с}} \end{cases}$$ (1 балл)

$$P_1 = 4200\frac{\text{Дж}}{\text{кг}*°C} \cdot 1\text{ кг} \cdot \left(-\frac{5}{42}\frac{°C}{\text{с}}\right) = -500\text{ Вт}.$$

Минус получился из-за того, что вода остывает, поэтому коэффициент угла наклона графика меньше нуля. Мощность отвода тепла берется по модулю, то есть ответ 500 Вт. (2 балла)

$$\begin{cases} k_2 \cdot 21{,}5\text{ мин} + b_2 = 20°C \\ k_2 \cdot 25\text{ мин} + b_2 = 0°C \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = \frac{1000}{7}°C \\ k_2 = -\frac{40}{7}\frac{°C}{\text{мин}} = -\frac{2}{21}\frac{°C}{\text{с}} \end{cases}$$ (1 балл)

$$P_2 = 2100\frac{\text{Дж}}{\text{кг}*°C} \cdot 1\text{ кг} \cdot \left(-\frac{2}{21}\frac{°C}{\text{с}}\right) = -200\text{ Вт}$$

Опять же, -200 Вт – это мощность нагрева, а мощность отвода тепла (охлаждения) 200 Вт. (2 балла)

Время, за которое вода полностью превратится в лед:

$$\Delta t = \frac{\lambda m}{P_1} = \frac{330000\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 1\text{ кг}}{500\text{ Вт}} = 660\text{ с} = 11\text{ мин}.$$ (2 балла)

Так как график нашли со сдвинутой осью, то пусть замерзание воды происходит при температуре T, вода начинает замерзать в момент t, а заканчивает в момент $t + \Delta t$.

Справедливы следующие уравнения, так как точки начала и конца замерзания воды принадлежат соответственно первому и второму участку графика:

$$\begin{cases} k_1 t + b_1 = T \\ k_2(t + \Delta t) + b_2 = T \end{cases}$$

$$t = \frac{b_2 - b_1 + k_2\Delta t}{k_1 - k_2} = \frac{\frac{1000}{7}°C - 90°C + \left(-\frac{40}{7}\frac{°C}{\text{мин}}\right) * 11\text{ мин}}{-\frac{50}{7}\frac{°C}{\text{мин}} - \left(-\frac{40}{7}\frac{°C}{\text{мин}}\right)} = 7\text{ мин}$$

(2 балла)

$$T = k_1 t + b_1 = -\frac{50}{7}\frac{°C}{\text{мин}} * 7\text{ мин} + 90°C = 40°C$$

Так как получилось, что вода замерзает при $40°C$, то сдвиг оси времени произошел на $40°C$ в положительном направлении оси температур. (2 балла)

7 класс **Заключительный тур** **2024-2025**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Общественный транспорт города Златоуста представлен автобусами и трамваями. Автобусов в начале года было 60% от общего количества единиц общественного транспорта. Весной городской транспорт пополнился новыми трамваями и после этого, автобусов стало 20% от всего количества общественного транспорта. А осенью пришли новые автобусы, и после этого количество автобусов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество единиц общественного транспорта за год в городе Златоусте?

Ответ: в 6 раз.

Решение. Пусть a – единиц транспорта было в начале года, тогда автобусов было $0{,}6a$. Пусть b трамваев пришло весной, тогда $(a+b)\cdot 0{,}2 = 0{,}6\,a$, $b = 2a$. Пусть c автобусов пришло осенью, тогда $(a+2a+c)\cdot 0{,}6 = 0{,}6a + c$, $c = 3a$. В конце года стало $a + b + c = 6a$ единиц транспорта. Следовательно, за год количество единиц общественного транспорта увеличилось в 6 раз.

Критерии оценивания. Полное решение 11 баллов. Если решение содержит арифметическую ошибку, но ход решения верный, то снимаем 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла.

2. (*13 баллов*) Известно, что для некоторого натурального a числа $2a-1$ и $3a-5$ делятся на простое число p. Найдите все такие p.

Ответ: 7.

Решение. Из условия следует, что $3(2a-1)-2(3a-5)=7$ делится на p. Поэтому никакое простое число, кроме числа 7, не подходит, а 7 получится, например, при $a=4$.

Критерии оценивания. Ответ угадан, ставим 3 балла. Найдено число 7, но не приведён пример для a – это 11 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (*13 баллов*) Миша выписал на доску в строку **2025** букв, причём, количество букв между любыми двумя гласными буквами не равно 3. Какое наибольшее количество гласных букв могло быть выписано?

Ответ: 1013.

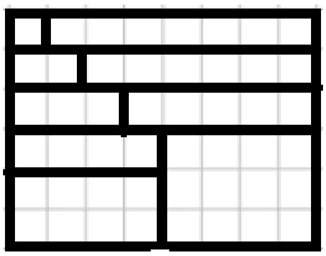
Решение. Рассмотрим любые восемь букв подряд и разобьём их на 4 пары, объединяя в пары: первую – с пятой, вторую – с шестой, третью – с седьмой, четвертую – с восьмой буквой. В каждой паре не более одной гласной. Значит, в восьми подряд не более 4 гласных. Тогда в первых 2024 буквах не более, чем $\frac{2024}{8}\cdot 4$ гласных, то есть 1012, а вместе с 2025-й буквой, 1013. Пример – ааааббббааааббббб … ааааббббa.

Критерии оценивания. Приведён пример (не обязательно данный) – 5 баллов. Доказано, что среди каждых восьми, идущих подряд букв, не более четырёх гласных – 8 баллов. Если ответ угадан – 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Из клетчатого листа 8×8 Миша вырезал (по границам клеток) прямоугольник, а Оля разрезала (тоже по линиям сетки) этот прямоугольник на 9 разных по площади прямоугольников. Какой наименьшей площади может быть Мишин прямоугольник? Покажите, как Оля его разрезала.

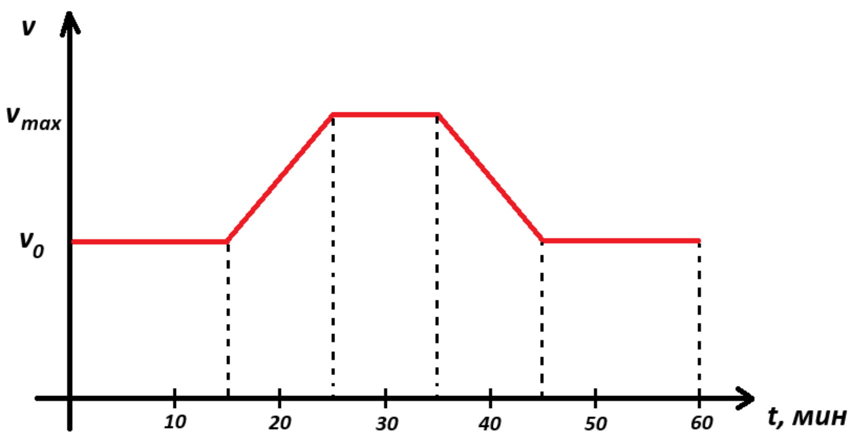
Ответ: $48=6\times8$.

Решение. Так как все 9 прямоугольников разной площади, то их общая площадь не меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Так как $45=1\times45=3\times15=5\times9$, прямоугольник любых таких размеров не поместится в данном квадрате 8×8. То же самое с $46=2\times23$ и $47=1\times47$. Поэтому меньше $6\times8=48$ быть не может. Как Оля его разрезала, показано на рисунке (приведённый пример не единственный).



Критерии оценивания. Доказано, что наименьшая площадь вырезанного прямоугольника 48 – ставим 7 баллов; приведен любой верный пример его разрезания – ещё 6 баллов. Верное решение – 13 баллов.

5. *(10 баллов)* Мальчик Феликс занимается легкой атлетикой, поэтому каждый день бегает по стадиону, длина беговой дорожки которого L=2000 м, в течение одного часа. В начале и в конце тренировки Феликс делает разминку и заминку (бег трусцой по 15 минут со скоростью V_0=2,5 м/с). После разминки Феликс постепенно разгоняется до своей максимальной скорости, бежит так 10 минут, после чего также постепенно сбрасывает скорость. Выяснилось, что Феликс пробежал ровно N=6 кругов. Чему равна максимальная скорость Феликса?



Ответ: 5 м/с

Решение: За время разминки и заминки Феликс пробежал по:

$$S_1 = S_2 = 15\text{ мин}\cdot 2{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 15\text{ мин}\cdot 150\,\frac{\text{м}}{\text{мин}} = 2250\text{ м}. \qquad \text{(2 балла)}$$

Скорость на участках, где Феликс разгоняется и тормозит, линейно увеличивается и уменьшается, поэтому средняя скорость на этих участках – среднее арифметическое из v_0 и $v_{\text{мах}}$.

$t = 10\text{ мин} = 600\text{ с}$ – время на втором, третьем и четвёртом участке графика (время разгона, бега с максимальной скоростью и время торможения).

$S_2 = S_4 = \frac{v_0+v_{\text{мах}}}{2}t$ - расстояние, которое пробежал Феликс за разгон и за торможение.

(2 балла)

$S_3 = v_{\text{мах}}t$ – расстояние, которое пробежал Феликс с максимальной скоростью. (2 балла)

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = S_1 + \frac{v_0+v_{\text{мах}}}{2}t + v_{\text{мах}}t + \frac{v_0+v_{\text{мах}}}{2}t + S_5 = 2S_1 + v_0 t + 2v_{\text{мах}}t = NL,$$

(2 балла)

L – длина беговой дорожки.

$$v_{\text{мах}} = \frac{NL-2S_1-v_0 t}{2t}$$

$$v_{\text{мах}} = \frac{6\cdot 2\text{ км}-2\cdot 2250\text{м}-2{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 10\text{ мин}}{2\cdot 10\text{ мин}} = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \qquad \text{(2 балла)}$$

6. *(10 баллов)* Сложная деталь состоит из трех простых элементов равных объёмов. Известно, что плотности первого и второго элементов отличаются в два раза ($\rho_1=2\rho_2$), кроме того, плотность ρ_3 третьего элемента на 0,5 г/см^3 меньше плотности ρ_2 второго. Определите плотность ρ_3 третьего элемента, если общая плотность сложной детали $\rho=3000$ кг/м^3.

Ответ: 1,875 г/см^3

Решение:

$\rho = 3000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 3\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ – средняя плотность.

$\rho_2 = \rho_3 + \Delta\rho$, где $\Delta\rho = 0{,}5\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

$\rho_1 = 2\rho_2$.

$V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V}{3}$, где V – объем детали. (3 балла)

$$M = \rho V = \rho_1\frac{V}{3} + \rho_2\frac{V}{3} + \rho_3\frac{V}{3} \quad \Big|\cdot\frac{3}{V} \qquad \text{(3 балла)}$$

$$3\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 2\rho_2 + \rho_2 + \rho_3 = 3(\rho_3 + \Delta\rho) + \rho_3 = 4\rho_3 + 3\Delta\rho \qquad \text{(3 балла)}$$

$\rho_3 = \frac{3}{4}(\rho - \Delta\rho) = \frac{3}{4}\left(3\frac{г}{см^3} - 0{,}5\frac{г}{см^3}\right) = 1{,}875\frac{г}{см^3}$ (1 балл)

7. *(15 баллов)* Муравьишка решил бегать по клетчатому листку бумаги размером 5 см на 7 см. Изначально муравьишка находился в точке А (см. рис. 1). Затем он добежал до края листа и побежал по другой стороне с постоянной скоростью v=1 м/с, и остановился лишь когда достиг точки В. Мальчик Миша внимательно следил за муравьем и отметил точки А и В, но так как они находятся с разных сторон, то Миша поднес листок к свету и место, где просвечивает точка В, для удобства отметил точкой С. Также Миша заметил, что муравьишка добрался из А в В за минимально возможное время. Определите расстояние, которое пробежал муравьишка. Имейте ввиду, что если отрезки a, b и c расположены так, как это показано на рисунке 2, то их длины связаны соотношением $a^2+b^2=c^2$.

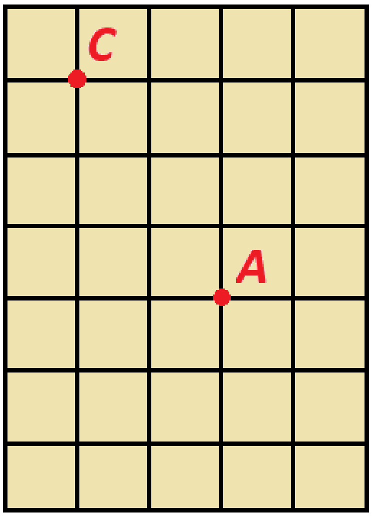


Рис. 1

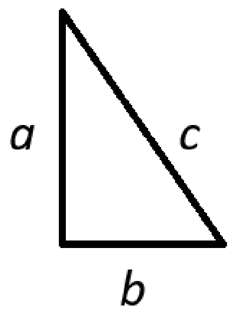


Рис. 2

Ответ: 5 см

Решение:

Найдем сначала минимальный путь муравьишки.

Возьмем листок 10 см на 7 см и согнем пополам так, чтобы получился листок 5 см на 7 см. Если Миша отметит на нем точки А, В и С, как в условии, а потом разогнет листок, то получит картинку как на рисунке 1 или как на рисунке 2. Еще Миша может взять листок 5 см на 14 см и согнуть его. При разгибании получится картина как на рисунке 3 или на рисунке 4. (5 баллов)

Минимальный путь для муравьишки – длина отрезка АВ, так как в этом случае муравьишка двигался по прямой.

Рисунок 1

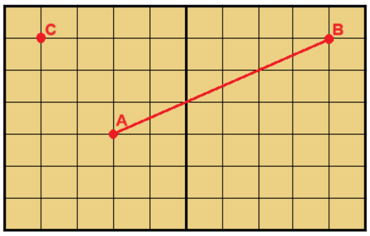


Рисунок 2

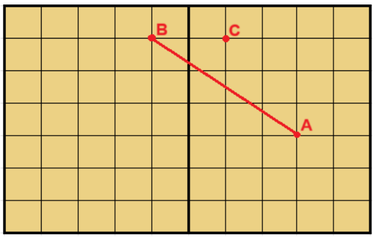


Рисунок 3

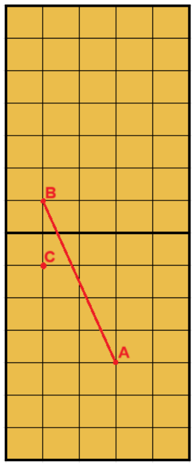
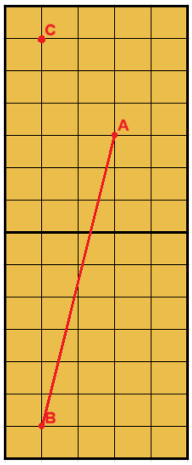


Рисунок 4



Сравним длины отрезков АВ в четырех случаях.

С помощью соотношения из условия вычислим длины и сравним. (5 баллов)

$AB_1 = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ см

$AB_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$ см

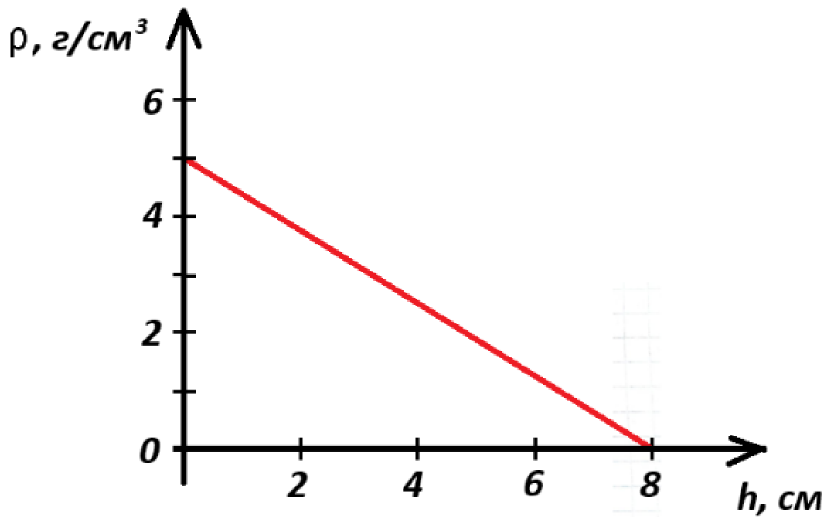
$AB_3 = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85}$ см

$AB_4 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ см

Минимальная длина отрезка АВ и минимальное время получается в случае 2:

$AB_2 = \sqrt{25}$ см $= 5$ см. (5 баллов)

8. *(15 баллов)* В широком сосуде находится необычная жидкость, для которой зависимость плотности от глубины ρ(h) линейна и представлена на графике. В сосуд аккуратно помещают небольшой однородный цилиндр высотой H=10 см. Известно, что объём погруженной части цилиндра равен α=0,6 от всего его объёма. Найдите плотность погруженного цилиндра.



Ответ: 1,875 г/см^3

Решение:

Цилиндр (плотность цилиндра ρ_x) погружен в жидкость на:

$h = \alpha H = 0{,}6 \cdot 10$ см $= 6$ см. (3 балла)

Найдем плотность жидкости на этой глубине $\rho(6 \text{ см})$. $\rho(h) = kh + b$.

$$\begin{cases} 5\,\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} = k \cdot 0 \text{ см} + b \\ 0\,\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} = k \cdot 8 \text{ см} + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5\,\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} \\ k = -\dfrac{5}{8}\dfrac{\text{г}}{\text{см}^4} \end{cases}$$

$\rho(6 \text{ см}) = -\frac{5}{8}\frac{\text{г}}{\text{см}^4} \cdot 6 \text{ см} + 5\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 1{,}25\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ (3 балла)

Так как плотность изменяется линейно, то при расчете силы Архимеда можно использовать среднее арифметическое из $\rho(6 \text{ см})$ и $\rho(0 \text{ см})$.

$\rho_{\text{ср}} = \frac{\rho(6 \text{ см}) + \rho(0 \text{ см})}{2} = \frac{1{,}25\frac{\text{г}}{\text{см}^3} + 5\frac{\text{г}}{\text{см}^3}}{2} = 3{,}125\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. (3 балла)

Условие равновесия для цилиндра:

$F_{\text{арх}} = mg$ (3 балла)

$\rho_{\text{ср}} g \alpha V = \rho_x V g$

$\rho_x = \alpha \rho_{\text{ср}} = 0{,}6 * 3{,}125\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 1{,}875\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ (3 балла)

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) Общественный транспорт города Магнитогорска представлен автобусами и трамваями. Автобусов в начале года было 50% от общего количества единиц общественного транспорта. Весной городской транспорт пополнился новыми трамваями и после этого, автобусов стало 20% от всего количества общественного транспорта. А осенью пришли новые автобусы, и после этого количество автобусов стало 60%. Во сколько раз увеличилось количество единиц общественного транспорта за год в городе Магнитогорске?

Ответ: в 5 раз.

Решение. Пусть a – единиц транспорта было в начале года, тогда автобусов было $0{,}5a$. Пусть b трамваев пришло весной, тогда $(a+b)\cdot 0{,}2 = 0{,}5a$, $b = 1{,}5a$. Пусть c автобусов пришло осенью, тогда $(a + 1{,}5a + c)\cdot 0{,}6 = 0{,}5a + c$, $c = 2{,}5a$. В конце года стало $a + b + c = 5a$ единиц транспорта. Следовательно, за год количество единиц общественного транспорта увеличилось в 5 раз.

Критерии оценивания. Полное решение 11 баллов. Если решение содержит арифметическую ошибку, но ход решения верный, то снимаем 2 балла. Верный ответ при отсутствии решения – 2 балла.

2. (*13 баллов*) Известно, что для некоторого натурального a числа $3a-2$ и $4a-1$ делятся на простое число p. Найдите все такие p.

Ответ: 5.

Решение. Из условия следует, что $3(4a-1)-4(3a-2)=5$ делится на p. Поэтому никакое простое число, кроме числа 5, не подходит, а 5 получится, например, при a=4.

Критерии оценивания. Ответ угадан, ставим 3 балла. Найдено число 5, но не приведён пример для a – это 11 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (*13 баллов*) Миша выписал на доску в строку **2026** букв, причём, количество букв между любыми двумя гласными буквами не равно 3. Какое наибольшее количество гласных букв могло быть выписано?

Ответ: 1014.

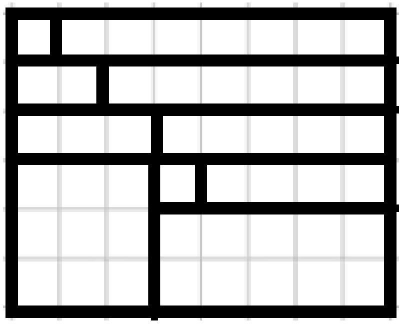
Решение. Рассмотрим любые восемь букв подряд и разобьём их на 4 пары, объединяя в пары: первую – с пятой, вторую – с шестой, третью – с седьмой, четвертую – с восьмой буквой. В каждой паре не более одной гласной. Значит, в восьми подряд не более 4 гласных. Тогда в первых 2024 буквах не более, чем $\frac{2024}{8}\cdot 4$ гласных, то есть 1012, а вместе с 2025-й и с 2026-й буквами, 1014. Пример – ааааббббааааââ … ааааббббаа.

Критерии оценивания. Приведён пример (не обязательно данный) – 5 баллов. Доказано, что среди каждых восьми, идущих подряд букв, не более четырёх гласных – 8 баллов. Угадан ответ – 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Из клетчатого листа 8×8 Миша вырезал (по границам клеток) прямоугольник, а Оля разрезала (тоже по линиям сетки) этот прямоугольник на 10 прямоугольников, из которых два – одноклеточные квадратики, а все остальные – разные по площади, причём больше единицы. Какой наименьшей площади может быть Мишин прямоугольник? Покажите, как Оля его разрезала.

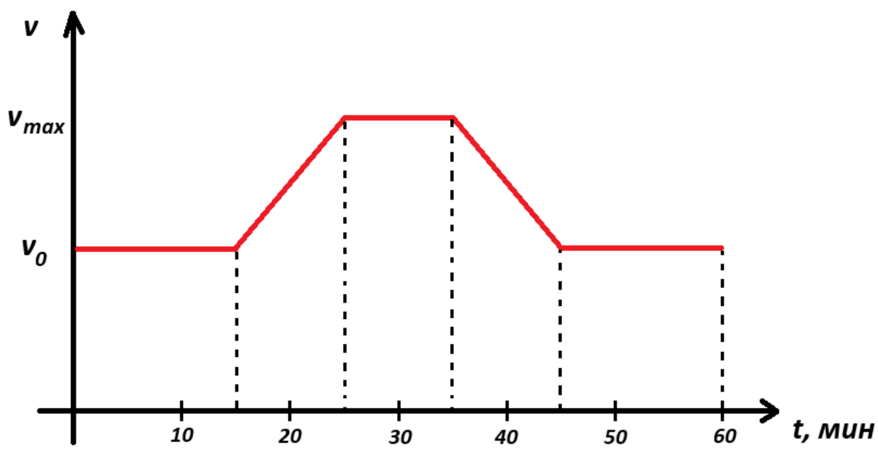
Ответ: $48=6\times8$.

Решение. Так как все прямоугольники, кроме двух единичных, разной площади, то их общая площадь не меньше, чем $1+1+2+3+4+5+6+7+8+9=46$. Так как $46=2\times23$ и $47=1\times47$, прямоугольники таких размеров не поместится в данном квадрате 8×8. Поэтому меньше $6\times8=48$ быть не может. Как Оля его разрезала, показано на рисунке (приведённый пример не единственный).



Критерии оценивания. Доказано, что наименьшая площадь вырезанного прямоугольника 48 – ставим 7 баллов; приведен любой верный пример его разрезания – ещё 6 баллов. Верное решение – 13 баллов.

5. (*10 баллов*) Мальчик Феликс занимается легкой атлетикой, поэтому каждый день бегает по стадиону, длина беговой дорожки которого L=4000 м в течение одного часа. В начале и в конце тренировки Феликс делает разминку и заминку (бег трусцой по 15 минут со скоростью V_0=2 м/с). После разминки Феликс постепенно разгоняется до своей максимальной скорости, бежит так 10 минут, после чего также постепенно сбрасывает скорость. Выяснилось, что Феликс пробежал ровно N=3 круга. Чему равна максимальная скорость Феликса?



Ответ: 6 м/с

Решение: За время разминки и заминки Феликс пробежал по:

$S_1 = S_2 = 15 \text{ мин} \cdot 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 15 \text{ мин} \cdot 120 \frac{\text{м}}{\text{мин}} = 1800 \text{ м}.$ (2 балла)

Скорость на участках, где Феликс разгоняется и тормозит, линейно увеличивается и уменьшается, поэтому средняя скорость на этих участках – среднее арифметическое из v_0 и v_{max}.

$t = 10 \text{ мин} = 600 \text{ с}$ – время на втором, третьем и четвёртом участке графика (время разгона, бега с максимальной скоростью и время торможения).

$S_2 = S_4 = \frac{v_0 + v_{\text{max}}}{2} t$ - расстояние, которое пробежал Феликс за разгон и за торможение. (2 балла)

$S_3 = v_{\text{max}} t$ – расстояние, которое пробежал Феликс с максимальной скоростью. (2 балла)

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = S_1 + \frac{v_0 + v_{\text{max}}}{2} t + v_{\text{max}} t + \frac{v_0 + v_{\text{max}}}{2} t + S_5 = 2S_1 + v_0 t + 2v_{\text{max}} t = NL,$ (2 балла)

L – длина беговой дорожки.

$v_{\text{max}} = \frac{NL - 2S_1 - v_0 t}{2t}$

$v_{\text{max}} = \frac{3 \cdot 4 \text{ км} - 2 \cdot 1800 \text{м} - 2 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 10 \text{ мин}}{2 \cdot 10 \text{ мин}} = 6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ (2 балла)

6. *(10 баллов)* Сложная деталь состоит из трех простых элементов равных объёмов. Известно, что плотности первого и второго элементов отличаются в два раза ($\rho_1 = 2\rho_2$), кроме того, плотность ρ_3 третьего элемента на 0,4 г/см^3 меньше плотности ρ_2 второго. Определите плотность ρ_3 третьего элемента, если общая плотность сложной детали $\rho = 4000$ кг/м^3.

Ответ: 2,7 г/см^3

Решение:

$\rho = 4000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 4 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ – средняя плотность.

$\rho_2 = \rho_3 + \Delta\rho$, где $\Delta\rho = 0{,}4 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

$\rho_1 = 2\rho_2$.

$V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V}{3}$, где V – объем детали. (3 балла)

$$M = \rho V = \rho_1 \frac{V}{3} + \rho_2 \frac{V}{3} + \rho_3 \frac{V}{3} \quad | \cdot \frac{3}{V}$$ (3 балла)

$$3\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 2\rho_2 + \rho_2 + \rho_3 = 3(\rho_3 + \Delta\rho) + \rho_3 = 4\rho_3 + 3\Delta\rho$$ (3 балла)

$$\rho_3 = \frac{3}{4}(\rho - \Delta\rho) = \frac{3}{4}\left(4\frac{\text{г}}{\text{см}^3} - 0{,}4\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right) = 2{,}7\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$ (1 балл)

7. *(15 баллов)* Муравьишка решил бегать по клетчатому листку бумаги размером 5 см на 7 см. Изначально муравьишка находился в точке A (см. рис. 1). Затем он добежал до края листа и побежал по другой стороне с постоянной скоростью V=0,5 м/с, и остановился лишь когда достиг точки B. Мальчик Миша внимательно следил за муравьем и отметил точки A и B, но так как они находятся с разных сторон, то Миша поднес листок к свету и место, где просвечивает точка B, для удобства отметил точкой C. Также Миша заметил, что муравьишка добрался из A в B за минимально возможное время. Определите расстояние, которое пробежал муравьишка. Имейте ввиду, что если отрезки a, b и c расположены так, как это показано на рисунке 2, то их длины связаны соотношением $a^2+b^2=c^2$.

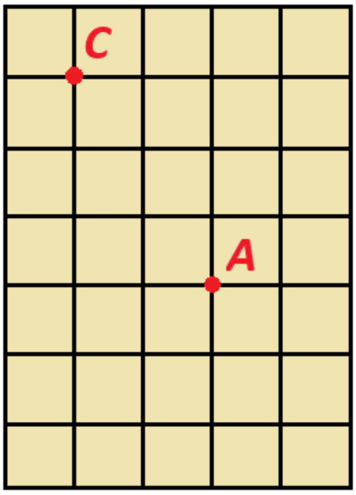


Рис. 1

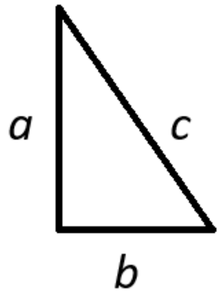


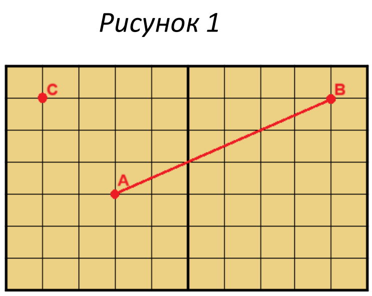
Рис. 2

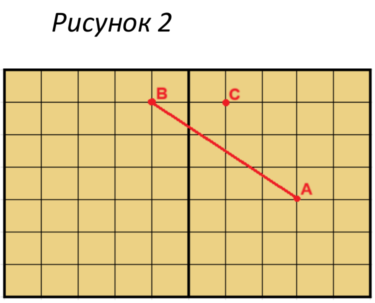
Ответ: 5 см

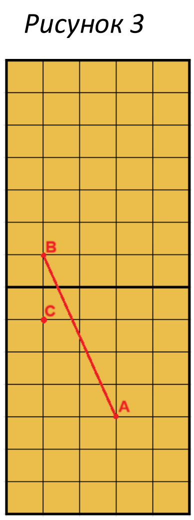
Решение: Найдем сначала минимальный путь муравьишки.

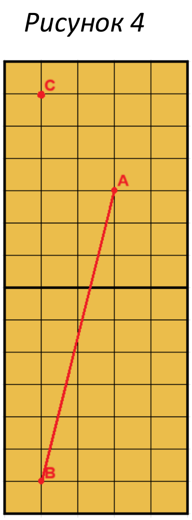
Возьмем листок 10 см на 7 см и согнем пополам так, чтобы получился листок 5 см на 7 см. Если Миша отметит на нем точки A, B и C, как в условии, а потом разогнет листок, то получит картинку как на рисунке 1 или как на рисунке 2. Еще Миша может взять листок 5 см на 14 см и согнуть его. При разгибании получится картина как на рисунке 3 или на рисунке 4. (5 баллов)

Минимальный путь для муравьишки – длина отрезка AB, так как в этом случае муравьишка двигался по прямой.









Сравним длины отрезков АВ в четырех случаях.

С помощью соотношения из условия вычислим длины и сравним. (5 баллов)

$AB_1 = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ см

$AB_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$ см

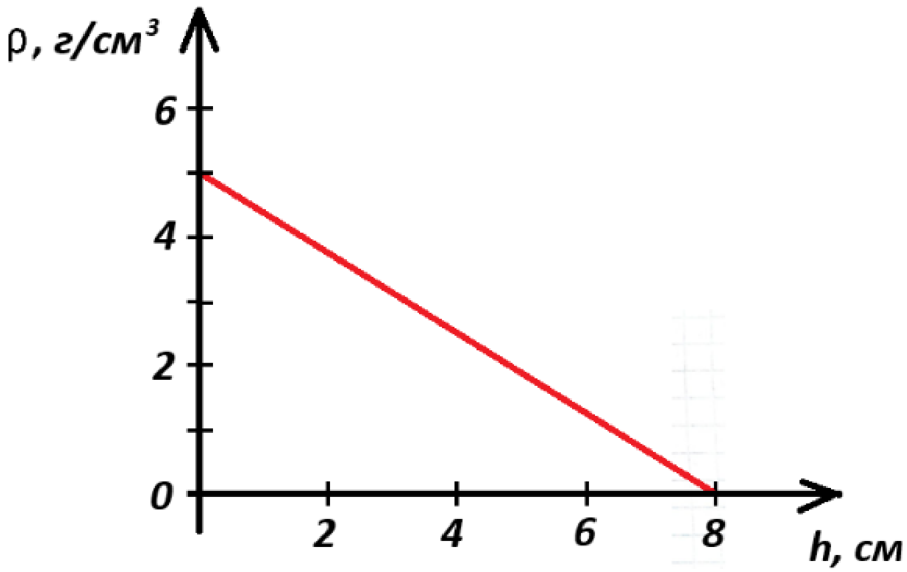
$AB_3 = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85}$ см

$AB_4 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ см

Минимальная длина отрезка АВ и минимальное время получается в случае 2:

$AB_2 = \sqrt{25}$ см $= 5$ см. (5 баллов)

8. *(15 баллов)* В широком сосуде находится необычная жидкость, для которой зависимость плотности от глубины ρ(h) линейна и представлена на графике. В сосуд аккуратно помещают небольшой однородный цилиндр высотой H=20 см. Известно, что объём погруженной части цилиндра равен α=0,3 от всего его объёма. Найдите плотность погруженного цилиндра.



Ответ: 0,9375 г/см^3

Решение: Цилиндр (плотность цилиндра ρ_x) погружен в жидкость на:

$h = \alpha H = 0{,}3 \cdot 20\text{ см} = 6\text{ см}.$ (3 балла)

Найдем плотность жидкости на этой глубине $\rho(6\text{ см})$. $\rho(h) = kh + b$.

$$\begin{cases} 5\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} = k \cdot 0\text{ см} + b \\ 0\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} = k \cdot 8\text{ см} + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} \\ k = -\dfrac{5}{8}\dfrac{\text{г}}{\text{см}^4} \end{cases}$$

$\rho(6\text{ см}) = -\frac{5}{8}\frac{\text{г}}{\text{см}^4} \cdot 6\text{ см} + 5\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 1{,}25\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ (3 балла)

Так как плотность изменяется линейно, то при расчете силы Архимеда можно использовать среднее арифметическое из $\rho(6\text{ см})$ и $\rho(0\text{ см})$.

$\rho_{\text{ср}} = \frac{\rho(6\text{ см}) + \rho(0\text{ см})}{2} = \frac{1{,}25\frac{\text{г}}{\text{см}^3} + 5\frac{\text{г}}{\text{см}^3}}{2} = 3{,}125\frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$ (3 балла)

Условие равновесия для цилиндра:

$F_{\text{арх}} = mg$ (3 балла)

$\rho_{\text{ср}} g \alpha V = \rho_x V g$

$\rho_x = \alpha \rho_{\text{ср}} = 0{,}3 * 3{,}125\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 0{,}9375\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ (3 балла)

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) В группе детского сада на новогодней ёлке дети получили сладкие подарки. Всего во всех подарках было 45 конфет, но в каждом из подарков не меньше 2-х конфет. Дети решили сохранить подарки и на следующий день каждому подарить половину своих конфет Оле, у которой на следующий день будет день рождения. Но Миша не выдержал и сразу съел все свои конфеты. На следующий день у Оли число конфет увеличилась в 10 раз. Сколько конфет съел Миша?

Ответ: 7.

Решение. Пусть первоначально у Оли было две конфеты (наименьшее возможное число), то на следующий день стало 20 конфет. Значит, 18 конфет ей подарили. Так как каждый дарил половину своих конфет, то у дарящих всего было 36 конфет. Тогда у Миши было 45–36–2=7 конфет. Если у Оли было 3 конфеты, то на следующий день стало 30 конфет. Значит, 27 конфет ей подарили. Так как каждый дарил половину своих конфет, то у дарящих всего было 54 конфеты, что больше общего количества конфет из условия. Дальнейшее увеличение числа конфет у Оли приведет к увеличению числа конфет у дарящих.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 11 баллов. Если ответ угадан (то есть не доказано, что больше 7 конфет быть не может), то ставим 5 баллов.

2. (*13 баллов*) Миша выписал на доску в строку **2025** букв, причём, количество букв между любыми двумя гласными буквами не равно 3. Какое наибольшее количество гласных букв могло быть выписано?

Ответ: 1013.

Решение. Рассмотрим любые восемь букв подряд и разобьём их на 4 пары, объединяя в пары: первую – с пятой, вторую – с шестой, третью – с седьмой, четвертую – с восьмой буквой. В каждой паре не более одной гласной. Значит, в восьми подряд не более 4 гласных. Тогда в первых 2024 буквах не более, чем $\frac{2024}{8} \cdot 4$ гласных, то есть 1012, а вместе с 2025-й буквой, 1013. Пример – ааааббббааааbббб … ааааббббa.

Критерии оценивания. Приведён пример (не обязательно данный) – 5 баллов. Доказано, что среди каждых восьми, идущих подряд букв, не более четырёх гласных – 8 баллов. Ответ угадан – ставим 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

3. (*13 баллов*) Из семи различных цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 составлено семизначное число, удовлетворяющее условию: если сложить любые две соседние цифры этого числа, то получится простое число. Найдите наибольшее число такого вида. (Цифры в числе не должны повторяться).

Ответ: 6521430.

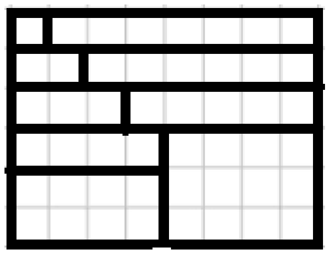
Решение. Наибольшее число желательно начать с 6, для следующей цифры возможны варианты: 5 и 1. Наибольшее число надо попробовать при цифре 5. Для следующей цифры два варианта: 2 и 0. Попробуем большее: 2; получим начало числа: 652. Цифру 4 можно соединить из данных цифр только с цифрами 1 и 3, поэтому она может участвовать только в комбинациях 143 или 341. Пробуя обе, получим или 6521430, или 6523410. Второе не подходит, так как 1+0=1 – не простое.

Критерии оценивания. Если правильно найдена первая цифра числа, ставим 1 балл. За каждую следующую правильную цифру по 2 балла. Если приведён только правильный ответ без обоснования – 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Из клетчатого листа 8×8 Миша вырезал (по границам клеток) прямоугольник, а Оля разрезала (тоже по линиям сетки) этот прямоугольник на 9 разных по площади прямоугольников. Какой наименьшей площади может быть Мишин прямоугольник? Покажите, как Оля его разрезала.

Ответ: $48=6\times8$.

Решение. Так как все 9 прямоугольников разной площади, то их общая площадь не меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Так как $45=1\times45=3\times15=5\times9$, прямоугольник любых таких размеров не поместится в данном квадрате 8×8. То же самое с $46=2\times23$ и $47=1\times47$. Поэтому меньше $6\times8=48$ быть не может. Как Оля его разрезала, показано на рисунке (приведённый пример не единственный).



Критерии оценивания. Доказано, что наименьшая площадь вырезанного прямоугольника 48 – 7 баллов; приведен любой верный пример его разрезания – ещё 6 баллов. Верное решение – 13 баллов.

5. *(10 баллов)* Муравьишка со скоростью v=1 см/с ползёт по глобусу, радиус которого R=10 см, вдоль экватора от точки, расположенной на нулевом меридиане, в точку с координатой 180О восточной долготы. Длину окружности можно посчитать по формуле L=2πR, где R – ее радиус, π=3,14. Найдите минимальное время, за которое муравьишка преодолеет эту дистанцию.

Ответ: 31,4 с

Решение: Так как муравьишка ползет по экватору из точки с нулевой долготой (нулевой меридиан) в точку с долготой 180° (180° в. д. и 180° з. д. – одно и то же), то он проползет ровно половину длины окружности:

$s = \frac{L}{2} = \pi R$, где L – длина экватора. (3 балла)

Время путешествия муравьишки:

$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi R}{v}$. (3 балла)

$t = \frac{3{,}14 \cdot 10\text{ см}}{1\frac{\text{см}}{\text{с}}} = 31{,}4\text{ с}.$ (4 балла)

6. *(10 баллов)* Одна сторона зала имеет размеры 216 вершков или 54 пяди, другая сторона - 3,5 сажени. Известно, что одна сажень равна 3 аршинам, один аршин равен 4 пядям или 71 см. Найдите площадь комнаты в метрах квадратных.

Ответ: ≈71,46 м^2

Решение:

$1\text{ сажень} = 3\text{ аршина} = 71\frac{\text{см}}{\text{аршин}} \cdot 3\text{ аршина} = 213\text{ см}.$ (1)

$1\text{ сажень} = 3\text{ аршина} = 4\ \frac{\text{пядь}}{\text{аршин}} \cdot 3\text{ аршина} = 12\text{ пядей}.$ (2)

Одна сторона комнаты имеет длину 54 пяди.

Из (2) следует, что эта сторона комнаты:

$\frac{54\text{ пяди}}{12\frac{\text{пядь}}{\text{сажень}}} = 4{,}5\text{ сажени} = 213\ \frac{\text{см}}{\text{сажень}} \cdot 4{,}5\text{ сажени} = 958{,}5\text{ см} = 9{,}585\text{ м}.$

(3 балла)

Другая сторона имеет длину:

$3{,}5\text{ сажени} = 213\frac{\text{см}}{\text{сажень}} \cdot 3{,}5\text{ сажени} = 745{,}5\text{ см} = 7{,}455\text{ м}.$ (3 балла)

Площадь прямоугольного зала:

$9{,}585\text{ м} \cdot 7{,}455\text{ м} = 71{,}456175\text{ м}^2 \approx 71{,}46\text{ м}^2.$ (4 балла)

7. *(15 баллов)* Ученые отправили сообщение на Плутон. На Плутоне в это же время было 19:30. Продолжительность дня на Плутоне 6,4 земных суток или 24 плутонианских часа (время на Плутоне так же отображается от 00:00:00 до 23:59:59, но уже в местных часах, минутах и секундах). Известно, что скорость сигнала 300000 км/с (в данном случае речь идет о земных секундах), а сигнал на Плутон пришел в тот же плутонианский день в 20:25 по плутонианскому времени. Найдите расстояние от Земли до Плутона в момент отправки сообщения в астрономических единицах. Астрономическая единица 1 а.е.=1,5·108 км, вращением планет пренебречь.

Ответ: 42,24 а.е.

Решение: Так как в сутках на Земле и на Плутоне одинаковое количество местных часов, а, следовательно, одинаковое количество минут, то:

$1\ \text{плутонианская минута (пл. мин)} = 6{,}4\ \text{земных минуты (мин)}.$ (5 баллов)

Сигнал от Земли до Плутона шел:

$20{:}25 - 19{:}30 = 55\ \text{пл. мин} = 55\ \text{пл. мин} \cdot 6{,}4\,\frac{\text{мин}}{\text{пл. мин.}} = 352\ \text{мин} = 21120\ \text{с}.$ (5 баллов)

Расстояние от Земли до Плутона:

$s = 21120\ c \cdot 300000\,\frac{\text{км}}{\text{с}} = 6336000000\ \text{км} = \frac{6336000000\ \text{км}}{1{,}5\cdot 10^8\,\frac{\text{км}}{\text{а.е.}}} = 42{,}24\ \text{а. е.}$ (5 баллов)

8. *(15 баллов)* Шестиклассник Петя и пятиклассник Вася решили побегать наперегонки. Так как Петя старше, то он решил дать фору Васе. Т.е. в момент начала состязания Вася был на x=150 м впереди Пети. Если непрерывно измерять расстояние между ними, то окажется, что в момент времени t_1 после начала состязания оно будет таким же, как и в момент времени t_2. Ребята все время бегут по прямой с разными, но постоянными скоростями. Зная, что скорость Васи $v_В$=1,5 м/с, определите скорость $v_П$ Пети. Известно, что t_1+t_2=5 мин.

Ответ: 2,5 м/с

Решение: Пусть Петя обогнал Васю в момент времени t, а расстояние в t_1 и t_2 между Петей и Васей s. Скорость сближения (до обгона) и скорость удаления (после обгона) $u = v_{\text{п}} - v_{\text{в}}$.

$$\begin{cases}(t_2 - t)\cdot u = s\\(t - t_1)\cdot u = s\end{cases}$$ (5 баллов)

Вычтем из одного уравнения другое и получим, что:

$(t_1 + t_2 - 2t)\cdot u = 0.$ (2 балла)

$t = \frac{t_1+t_2}{2}.\ x = t\cdot u = t = \frac{t_1+t_2}{2}\cdot(v_{\text{п}} - v_{\text{в}})$
(3 балла)

$$v_{\text{п}} = \frac{2x}{t_1+t_2} + v_{\text{в}}$$

$v_{\text{п}} = \frac{2\cdot 150\ \text{м}}{5\ \text{мин}} + 1{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{2\cdot 150\ \text{м}}{300\ \text{с}} + 1{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 2{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ (5 баллов)

6 класс **Заключительный тур** **2024-2025**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (*11 баллов*) В группе детского сада на новогодней елке дети получили сладкие подарки. Всего во всех подарках было 48 конфет, но в каждом из подарков не меньше 2-х. Дети решили сохранить подарки и на следующий день каждому подарить половину своих конфет Оле, у которой на следующий день будет день рождения. Но Миша не выдержал и сразу съел все свои конфеты. На следующий день у Оли число конфет увеличилась в 10 раз. Сколько конфет съел Миша?

Ответ: 10.

Решение. Пусть первоначально у Оли было две конфеты (наименьшее возможное число), то на следующий день стало 20 конфет. Значит, 18 конфет ей подарили. Так как каждый дарил половину своих конфет, то у дарящих было 36 конфет. Тогда у Миши было 48–36–2=10 конфет. Если у Оли было 3 конфеты, то на следующий день стало 30 конфет. Значит, 27 конфет ей подарили. Так как каждый дарил половину своих конфет, то у дарящих всего было 54 конфеты, что больше общего количества конфет из условия. Дальнейшее увеличение числа конфет у Оли приведет к увеличению числа конфет у дарящих.

Критерии оценивания. Обоснованно получен верный ответ – 12 баллов. Если ответ угадан (то есть не доказано, что больше 10 конфет быть не может), то ставим 5 баллов.

2. (*13 баллов*) Миша выписал на доску в строку **2026** букв, причём, количество букв между любыми двумя гласными буквами не равно 3. Какое наибольшее количество гласных букв могло быть выписано?

Ответ: 1014.

Решение. Рассмотрим любые восемь букв подряд и разобьём их на 4 пары, объединяя в пары: первую – с пятой, вторую – с шестой, третью – с седьмой, четвертую – с восьмой буквой. В каждой паре не более одной гласной. Значит, в восьми подряд не более 4 гласных. Тогда в первых 2024 буквах не более, чем $\frac{2024}{8} \cdot 4$ гласных, то есть 1012, а вместе с 2025-й и с 2026-й буквами, 1014. Пример – ааааббббааааბббб … ааааббббаа.

Критерии оценивания. Приведён пример (не обязательно данный) – 5 баллов. Доказано, что среди каждых восьми, идущих подряд букв, не более четырёх гласных – 8 баллов. Ответ угадан – ставим 2 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

3. (*13 баллов*) Из семи различных цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 составлено семизначное число, удовлетворяющее условию: если сложить любые две соседние цифры этого числа, то получится простое число. Найдите наименьшее число такого вида. (Цифры в числе не должны повторяться).

Ответ: 1430256.

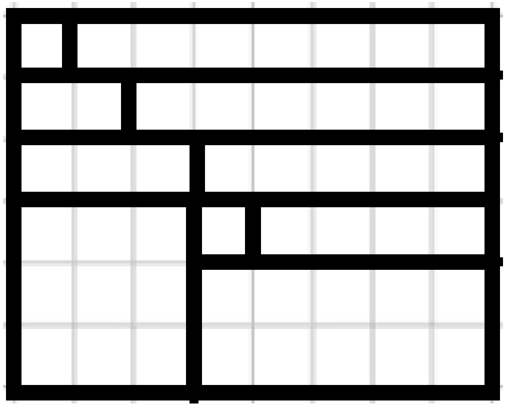
Решение. Цифру 4 можно соединить из данных цифр только с цифрами 1 и 3, поэтому она может участвовать только в комбинациях 143 или 341. Наименьшее число желательно начать с 1. Поэтому начало искомого числа может иметь вид: 143. Дальше 2 варианта: 0 или 2. Берем меньшее. Получим 1430. Дальше можно 5 или 2. Берем меньшее, 2. Получим 14302. Дальше легко: 1430256.

Критерии оценивания. Если правильно найдена первая цифра числа, ставим 1 балл. За каждую следующую правильную цифру по 2 балла. Если приведён только правильный ответ без обоснования – 3 балла. Обоснованно получен верный ответ – 13 баллов.

4. (*13 баллов*) Из клетчатого листа 8×8 Миша вырезал (по границам клеток) прямоугольник, а Оля разрезала (тоже по линиям сетки) этот прямоугольник на 10 прямоугольников, из которых два – одноклеточные квадратики, а все остальные – разные по площади, причём больше единицы. Какой наименьшей площади может быть Мишин прямоугольник? Покажите, как Оля его разрезала.

Ответ: $48 = 6\times8$.

Решение. Так как все прямоугольники, кроме двух единичных, разной площади, то их общая площадь не меньше, чем $1+1+2+3+4+5+6+7+8+9=46$. Так как $46=2\times23$ и $47=1\times47$, прямоугольники таких размеров не поместится в данном квадрате 8×8. Поэтому меньше $6\times8=48$ быть не может. Как Оля его разрезала, показано на рисунке (приведённый пример не единственный).



Критерии оценивания. Доказано, что наименьшая площадь вырезанного прямоугольника 48 – ставим 7 баллов; приведён любой верный пример его разрезания – ещё 6 баллов. Верное решение – 13 баллов.

5. *(10 баллов)* Муравьишка со скоростью v=2 см/с ползёт по глобусу, радиус которого R=24 см, вдоль экватора от точки, расположенной на нулевом меридиане, в точку с координатой 180^0 восточной долготы. Длину окружности можно посчитать по формуле L=2πR, где R – ее радиус, π=3,14. Найдите минимальное время, за которое муравьишка преодолеет эту дистанцию.

Ответ: 37,68 с

Решение. Так как муравьишка ползет по экватору из точки с нулевой долготой (нулевой меридиан) в точку с долготой 180° (180° в. д. и 180° з. д. – одно и то же), то он проползет ровно половину длины окружности:

$s = \frac{L}{2} = \pi R$, где L – длина экватора. (3 балла)

Время путешествия муравьишки:

$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi R}{v}$. (3 балла)

$t = \frac{3{,}14 \cdot 24 \text{ см}}{2 \frac{\text{см}}{\text{с}}} = 37{,}68$ с. (4 балла)

6. *(10 баллов)* Одна сторона зала имеет размеры 108 вершков или 27 пяди, другая сторона - 7 саженей. Известно, что одна сажень равна 3 аршинам, один аршин равен 4 пядям или 71 см. Найдите площадь комнаты в метрах квадратных.

Ответ: ≈71,46 м^2

Решение:

$1 \text{ сажень} = 3 \text{ аршина} = 71 \frac{\text{см}}{\text{аршин}} \cdot 3 \text{ аршина} = 213 \text{ см}.$ (1)

$1 \text{ сажень} = 3 \text{ аршина} = 4 \frac{\text{пядь}}{\text{аршин}} \cdot 3 \text{ аршина} = 12 \text{ пядей}.$ (2)

Одна сторона комнаты имеет длину 27 пяди.

Из (2) следует, что эта сторона комнаты:

$\frac{27 \text{ пяди}}{12 \frac{\text{пядь}}{\text{сажень}}} = 2{,}25 \text{ сажени} = 213 \frac{\text{см}}{\text{сажень}} \cdot 2{,}25 \text{ сажени} = 479{,}25 \text{ см} = 4{,}7925 \text{ м}.$

(3 балла)

Другая сторона имеет длину:

$7 \text{ сажени} = 213 \frac{\text{см}}{\text{сажень}} \cdot 7 \text{ сажени} = 1491 \text{ см} = 14{,}91 \text{ м}.$ (3 балла)

Площадь прямоугольного зала:

$4{,}7925 \text{ м} \cdot 14{,}91 \text{ м} = 71{,}456175 \text{ м}^2 \approx 71{,}46 \text{ м}^2.$ (4 балла)

7. *(15 баллов)* Ученые отправили сообщение на Плутон. На Плутоне в это же время было 14:15. Продолжительность дня на Плутоне 6,4 земных суток или 24 плутонианских часа (время на Плутоне так же отображается от 00:00:00 до 23:59:59, но уже в местных часах, минутах и секундах). Известно, что скорость сигнала 300000 км/с (в данном случае речь идет о земных секундах), а сигнал на Плутон пришел в тот же плутонианский день в 15:10 по плутонианскому времени. Найдите расстояние от Земли до Плутона в момент отправки сообщения в астрономических единицах. Астрономическая единица 1 а.е.=$1{,}5 \cdot 10^8$ км, вращением планет пренебречь.

Ответ: 42,24 а.е.

Решение: Так как в сутках на Земле и на Плутоне одинаковое количество местных часов, а, следовательно, одинаковое количество минут, то:

1 плутонианская минута (пл. мин) $=$ $6{,}4$ земных минуты (мин). (5 баллов)

Сигнал от Земли до Плутона шел:

$$15{:}10 - 14{:}15 = 55\ \text{пл. мин} = 55\ \text{пл. мин} \cdot 6{,}4\,\frac{\text{мин}}{\text{пл. мин.}} = 352\ \text{мин} = 21120\ \text{с}.$$

(5 баллов)

Расстояние от Земли до Плутона:

$$s = 21120\ c \cdot 300000\,\frac{\text{км}}{\text{с}} = 6336000000\ \text{км} = \frac{6336000000\ \text{км}}{1{,}5 \cdot 10^8\,\frac{\text{км}}{\text{а.е.}}} = 42{,}24\ \text{а. е.}$$ (5 баллов)

8. *(15 баллов)* Шестиклассник Петя и пятиклассник Вася решили побегать наперегонки. Так как Петя старше, то он решил дать фору Васе. Т.е. в момент начала состязания Вася был на x=180 м впереди Пети. Если непрерывно измерять расстояние между ними, то окажется, что в момент времени t_1 после начала состязания оно будет таким же, как и в момент времени t_2. Ребята все время бегут по прямой с разными, но постоянными скоростями. Зная, что скорость Васи $V_В$ =2 м/с, определите скорость $V_П$ Пети. Известно, что t_1+t_2=6 мин.

Ответ: 3 м/с

Решение: Пусть Петя обогнал Васю в момент времени t, а расстояние в t_1 и t_2 между Петей и Васей s. Скорость сближения (до обгона) и скорость удаления (после обгона) $u = v_п - v_в$.

$$\begin{cases}(t_2 - t) \cdot u = s \\ (t - t_1) \cdot u = s\end{cases}$$ (5 баллов)

Вычтем из одного уравнения другое и получим, что:

$(t_1 + t_2 - 2t) \cdot u = 0.$ (2 балла)

$t = \frac{t_1+t_2}{2}.\ x = t \cdot u = t = \frac{t_1+t_2}{2} \cdot (v_п - v_в)$ (3 балла)

$$v_п = \frac{2x}{t_1+t_2} + v_в$$

$$v_п = \frac{2 \cdot 180\ \text{м}}{6\ \text{мин}} + 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{2 \cdot 180\ \text{м}}{360\ \text{с}} + 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$ (5 баллов)