

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 56-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	13	0	10	15	6	81

Вариант 2.
✓ 1.

$$\begin{cases} x^2 + 2 = (y+z)^2 \\ y^2 + 1 = (x+z)^2 \\ z^2 + 1 = (x+y)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2 = y^2 + 2yz + z^2 & (1) \\ y^2 + 1 = x^2 + 2xz + z^2 & (2) \\ z^2 + 1 = x^2 + 2xy + y^2 & (3) \end{cases}$$

① (2) - (3):

$$y^2 + 1 - z^2 - 1 = x^2 + 2xz + z^2 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$y^2 - z^2 = 2xz - 2xy + z^2 - y^2$$

$$(y+z)(y-z) = 2x(z-y) + (z-y)(z+y)$$

$$-(z-y)(y+z) = 2(z-y)(2x+z+y)$$

$$-(y+z) = 2x+z+y$$

$$-y-z = 2x+z+y$$

$$2x+2z+2y=0$$

$$x+y+z=0 \leftarrow \text{НО: по условию: } \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$$

Следовательно, решений при $z \neq y$ — нет. решений.

② При $z=y$:

$$\begin{cases} x^2 + 2 = y^2 + 2y^2 + y^2 \\ y^2 + 1 = x^2 + 2xy + y^2 \\ y^2 + 1 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2 = 4y^2 \\ y^2 + 1 = (x+y)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4y^2 - 2 \\ x^2 = 1 - 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2xy = 4y^2 - 2 \\ 3 = 4y^2 + 2xy \\ 2y^2 + 2y^2 + 2xy = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 + 1 = (x+y)^2 \\ z^2 + 1 = \left(\frac{3-2y^2}{2y}\right)^2 \end{cases}$$

$$(y=z) \Rightarrow y^2 + 1 = \frac{9-12y^2+4y^4}{4y^2}$$

$$4y^4 + 4y^2 = 9 - 12y^2 + 4y^4$$

$$16y^2 = 9$$

$$y = \pm \frac{3}{4} \text{ (т.к. } y>0 \Rightarrow y = \frac{3}{4})$$

Тогда:

$$x^2 + 2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{9}{4} - 2; \quad x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = 0,75 = z. \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x=0,5 \\ y=0,75 \\ z=0,75 \end{cases}$$

№ 2.

Пусть второй кассир до обеда обслужил x покупателей, а после обеда y покупателей.

Тогда первый кассир до обеда обслужил:

$$x - 25\% \cdot x = x - \frac{25}{100}x = 0,75x \quad \{x, y\} \in \mathbb{N}$$

а после обеда: $y + 20\% \cdot y = y + \frac{20}{100}y = 1,2y$.

	До обеда:	После обеда:
I	$0,75x \neq \frac{3}{4}x$	$1,2y = \frac{6}{5}y$
II	x	y

Всего первый кассир обслужил: $\frac{3}{4}x + \frac{6}{5}y = 0,75x + 1,2y$
а второй кассир: $x + y$. на 10% больше.

$$\Rightarrow 0,75x + 1,2y = 1,1(x + y)$$

Но за весь день было обслужено < 250 покупателей:

$$0,75x + x + 1,2y + y < 250.$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 0,75x + 1,2y = 1,1x + 1,1y \\ 0,75x + 1,2y + x + y < 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,1y = 0,35x \\ 1,75x + 2,2y < 250 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 3,5x$$

$$1,75x + 2,2 \cdot \frac{3,5x}{1} < 250$$

$$\begin{array}{r} 2,2 \\ \times 3,5 \\ \hline 110 \\ 66 \\ \hline 7,70 \end{array}$$

$$7,7x + 1,75x < 250.$$

$$9,45x < 250.$$

$$x < \frac{250}{9,45}$$

$$x < 26 \frac{4,3}{9,45}$$

$$\textcircled{4} 0,1y = 0,35x$$

$$y = \frac{7}{2}x \Rightarrow x:2 \quad (y \in \mathbb{N})$$

$$1,2y = \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{2}x = \frac{42}{10}x \quad (1,2y \in \mathbb{N})$$

$$x:10.$$

Значит, x может быть 10 или 20 $\left(\begin{matrix} x:10 \\ x < 26 \frac{4,3}{9,45} \end{matrix} \right)$.

$$\textcircled{5} x=10$$

$$\frac{3}{4}x = 7,5 \notin \mathbb{N}$$

Значит, $x \neq 10$.

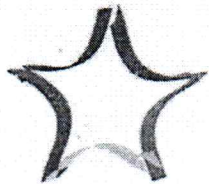
$$x=20$$

$$\frac{3x}{4} = 15 \in \mathbb{N}$$

$$1,2y = \frac{42}{10} \cdot 20 = 84 \in \mathbb{N}$$

$$20 + 15 + 84 + 70 \checkmark < 250$$

$$189 < 250.$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 56-09-02

6) Тогда первый кассир обслужил:

$$0,75x + 1,2y = 15 + 84 = 99 \text{ покупателей.}$$

Ответ: 99 покупателей

✓ 3.

Количество многоугольников, содержащих A , можно посчитать так:

Зафиксируем точку A (её содержит каждый многоугольник), будем строить многоугольники: n -угольник, содержащий A .
кол-во способов построить n -угольник равно
кол-ву способов выбрать n из $2025-1=2024$ точек
без повторений ($n \in [2; 2024]$).

Всего многоугольников, содержащих A : $N_1 = C_{2024}^2 + C_{2024}^3 + \dots + C_{2024}^{2023} + C_{2024}^{2024}$

Количество многоугольников, не содержащих A , посчитаем так:

Точку A в счёт не берём, т.к. она не является вершиной ни для одного многоугольника.

кол-во способов построить n -угольник, не содержащий A , равно кол-ву способов выбрать n из $2025-1=2024$ точек без повторений ($n \in [3; 2024]$).

Всего многоугольников, не содержащих A : $N_2 = C_{2024}^3 + C_{2024}^4 + \dots + C_{2024}^{2023} + C_{2024}^{2024}$.

Тогда их разность $(N_1 - N_2)$ - ответ: $+ \dots +$

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= C_{2024}^2 + (C_{2024}^3 - C_{2024}^3) + (C_{2024}^4 - C_{2024}^4) + \dots + (C_{2024}^{2023} - C_{2024}^{2023}) + \\ &+ (C_{2024}^{2024} - C_{2024}^{2024}) = C_{2024}^2 = \frac{2024!}{(2024-2)! \cdot 2!} = \frac{2023 \cdot 2024}{1 \cdot 2} = 2023 \cdot 1012 = \\ &= 2047276. \end{aligned}$$

$\Downarrow$
 $N_1 > N_2$.

Ответ: многоугольников, содержащих A ; на 2047276.

$$\begin{array}{r} 2023 \\ \times 1012 \\ \hline 4046 \\ 2023 \\ 23 \\ \hline 2047276 \end{array}$$

№ 6.

Заметим, что после $T_1 = 20$ мин. h не меняется, до этого момента — уменьшался.

Значит, в момент $T_1 = 20$ мин. весь лед растаял (превратился в воду).

$$h(T_0 = 0 \text{ мин.}) = 120 \text{ см}$$

$$h(T_1 = 20 \text{ мин.}) = 115 \text{ см} \quad \Rightarrow \Delta h = h(T_0) - h(T_1) = 120 - 115 = 5 \text{ см}$$

$$\Rightarrow \Delta V = S \cdot \Delta h = 15 \cdot 5 \text{ см}^3 = 75 \text{ см}^3.$$

③ Изменение объема — разница между объемом льда и объемом воды, получившейся из него.

$$\Delta V = V_{\text{лед}} - V_{\text{в.л}} = \frac{m_{\text{лед}}}{\rho_{\text{лед}}} - \frac{m_{\text{в.л}}}{\rho_{\text{вода}}}$$

$m_{\text{лед}} = m_{\text{в.л}}$ по закону Сохранения Массы

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{m_{\text{лед}}}{0,9} - \frac{m_{\text{лед}}}{1}$$

$$75 = \frac{10 m_{\text{лед}} - 9 m_{\text{лед}}}{9}$$

$$\frac{m_{\text{лед}}}{9} = 75 \Rightarrow m_{\text{лед}} = 75 \cdot 9 = 675 \text{ грамм.}$$

$$④ V(T_1 = 20 \text{ мин.}) = 115 \cdot 15 \text{ см}^3 = 1725 \text{ см}^3.$$

$$\Rightarrow V_{\text{в}} = V - V_{\text{лед}} = 1725 - \frac{m_{\text{лед}}}{\rho_{\text{лед}}} = 1725 - \frac{675}{0,9} =$$

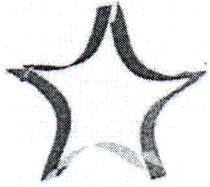
$$\Rightarrow V_{\text{в}} = V(T_1 = 20 \text{ мин.}) - V_{\text{лед}} = 1725 - \frac{m_{\text{в.л}}}{\rho_{\text{в}}} = 1725 - \frac{675}{1} = 1050 \text{ см}^3$$

↑
объем воды, получ. из льда

$$⑤ \text{ Тогда } m_{\text{в}} = V_{\text{в}} \cdot \rho_{\text{в}} = \frac{1050 \text{ см}^3 \cdot 1 \text{ г}}{\text{см}^3} = 1050 \text{ грамм.}$$

$$\text{Ответ: } m_{\text{лед}} = 675 \text{ грамм} = 0,675 \text{ кг}$$

$$m_{\text{вода}} = 1050 \text{ грамм} = 1,05 \text{ кг.}$$



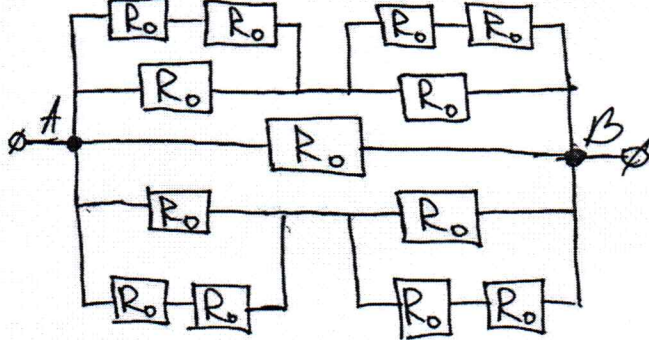
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

№ 7.

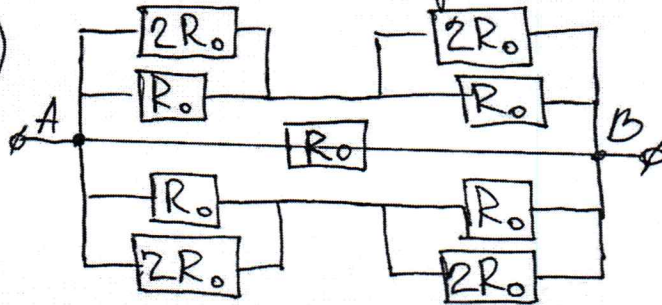
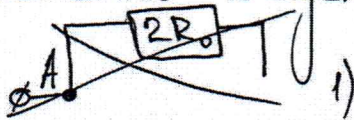
Шифр 56-09-02

мест №3.

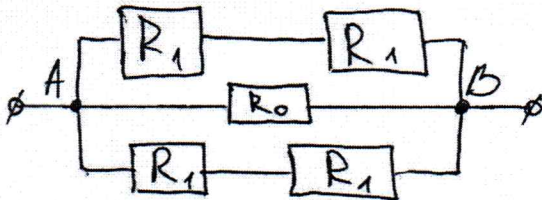
Представим эквивалентную схему:



Постепенно будем считать сопротивление:

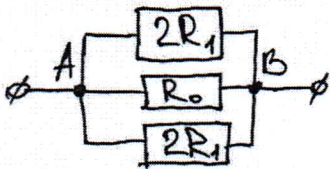


2)



$$R_1 = \frac{2R_0 \cdot R_0}{2R_0 + R_0} = \frac{20 \cdot 10}{30} = \frac{20}{3} \text{ Ом.}$$

3)



$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2R_1} = \frac{3}{40} + \frac{1}{10} + \frac{3}{40} = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} + \frac{4}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$R_{\text{общ}} = 2 \text{ Ом.}$$

Ответ: 4 Ом.

$Df'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня. Пусть эти корни будут обозначаться x_1, x_2, x_3 соответственно.

№ 4.

Тогда $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 1 \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

② $g(x) = x^2 + 4x + 2024$.

Тогда $f'(g(x)) = 1 \cdot (x^2 + 4x + 2024 - x_1)(x^2 + 4x + 2024 - x_2)(x^2 + 4x + 2024 - x_3)$.

Так как $f'(g(x))$ действительных корней не имеет, каждый множитель (кроме 1) также не должен иметь действительных корней.

$\Rightarrow D < 0; D_1 < 0$.

$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}ac$

$D_1 = 2^2 - 1 \cdot (2024 - x_i) = 4 - 2024 + x_i = x_i - 2020 \quad \begin{matrix} i \in [1; 3] \\ i \in \mathbb{N} \end{matrix}$

$x_i - 2020 < 0$.

$x_i < 2020$

Тогда: $-x_i > -2020$

$2024 - x_i > 2024 - 2020$

$2024 - x_i > 4$.

③ $f'(2024) = 1 \cdot \underbrace{(2024 - x_1)}_4 \cdot \underbrace{(2024 - x_2)}_4 \cdot \underbrace{(2024 - x_3)}_4$.

$\Rightarrow f'(2024) > 4 \cdot 4 \cdot 4$

$f'(2024) > 64$. Ч.Т.Д.

✓ 8.

Ваншем уравнения для прямых I и II:

$y_1 = -2x + 7$

$y_2 = x - 5$

Найдём точку пересечения этих лучей:

$y_1 = y_2 \Rightarrow -2x + 7 = x - 5$

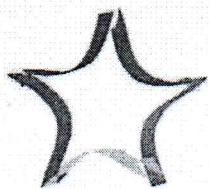
$12 = 3x$

$x = 4$

$\Rightarrow y = -8 + 7$

$y = -1$.

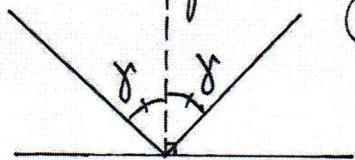
$M(4; -1)$.



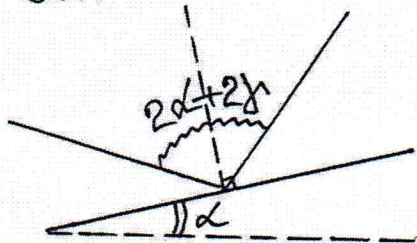
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр _____

лист № 4.
а) Если зеркало установлено горизонтально:



б) Если зеркало установлено с углом α к горизонту:



~~$$\text{tg } \alpha \text{ tg } \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \arctg \frac{1}{2}$$~~

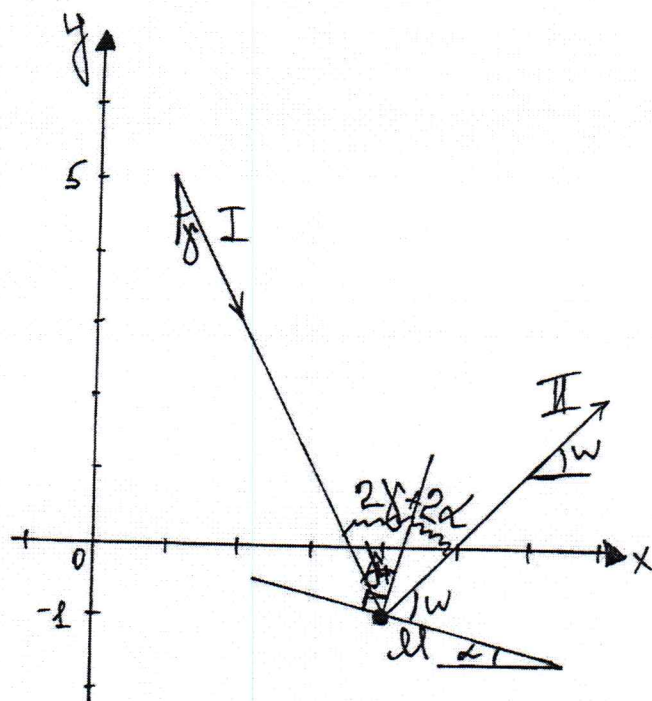
$$\text{tg } w = 1 \Rightarrow w = 45^\circ$$

$$2\alpha + 2\gamma = 90^\circ - w + \gamma$$

~~$$2\alpha + \gamma = 90^\circ - w$$~~

~~$$2\alpha + \gamma = 45^\circ$$~~

$$\alpha = \frac{45 - \arctg \frac{1}{2}}{2}$$



Ответ: Точка отражения: $M(4; -1)$

$$\alpha = \frac{45 - \arctg \frac{1}{2}}{2}$$