



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕИ-62 4-09-133

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	40	13	13	2	9	5	5	69

Вариант 2

Задача 2.

Дано: $\triangle ABC$, $AB=6$, $BC=5$, $AC=4$

OE - сев. пер. к AD

AD - биссектр. $\angle BAC$

$BC \cap OE = E$

Найти: $\frac{BE}{CE} = ?$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow BD = \frac{3}{2} CD$$

$$BD + CD = BC = 5$$

$$5 = \frac{3}{2} CD + CD = 2,5 CD, \text{ отсюда } CD = \frac{5}{2,5} = 2. \text{ Найдем } AD:$$

$$BD = \frac{3}{2} \cdot CD = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

По теореме косинусов $\triangle ACD$:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cos \alpha \cdot AD \cdot CD, \text{ где } \alpha = \angle ADC.$$

$$\cos \alpha = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2 AD \cdot CD} = \frac{18 + 4 - 16}{2 \cdot 1,5 \cdot 3} = \frac{6}{12 \cdot 1,5} = \frac{1}{2 \cdot 1,5}$$

$$\text{В туп. } \triangle ODE: \cos \alpha = \frac{OD}{DE}$$

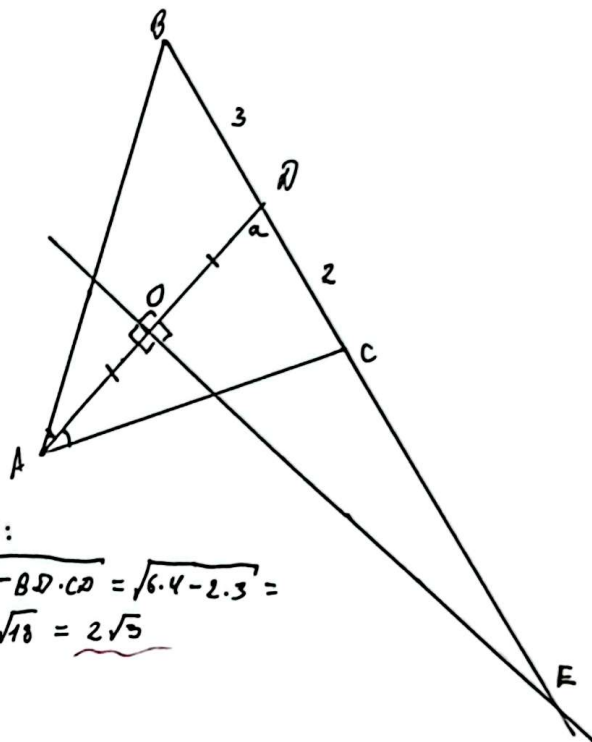
$$DE = \frac{OD}{\cos \alpha} = \frac{AD}{2 \cos \alpha} = \frac{1,5}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot 1,5}{2} = 6$$

$$EC = DE - DC = 6 - 2 = 4$$

$$BE = EC + DC + DB = 4 + 2 + 3 = 9$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{9}{4}$$

Ответ: $\frac{9}{4}$





Мультипрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр Е4-63/4-03-133

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача 6

Дано: рис.

$$h = 40 \text{ см}$$

$$S = 100 \text{ см}^2$$

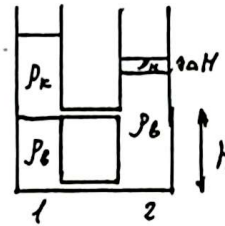
$$V_B = 10 \text{ л} = 10 \text{ дм}^3$$

$$\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$V_K = 4 \text{ л}$$

$$\rho_K = 800 \text{ кг/м}^3$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$



Найти: конечные уровни жидкостей в сосудах

$$H \text{ воды: } H_B = \frac{V}{S} = \frac{10 \text{ дм}^3}{2 \cdot 100 \text{ см}^2} = \frac{10000 \text{ см}^3}{200 \text{ см}^2} = 50 \text{ см (изначально в обоих)}$$

$$H \text{ керосина в одном сосуде: } H_K = \frac{V}{S} = \frac{4 \text{ дм}^3}{100 \text{ см}^2} = \frac{4000 \text{ см}^3}{100 \text{ см}^2} = 40 \text{ см (изначально в первом)}$$

Керосин, т.к. его масса сравнима с массой воды в одном сосуде (3,2 т и 5 т), сможет вытеснить воду до уровня $h = 40 \text{ см}$, а затем часть керосина перейдет по верхней трубке во второй сосуд. Установится равновесие, керосин всплывёт, т.е. $\rho_K < \rho_B$.

Пусть уровень керосина во втором сосуде — ΔH . Вытесненными ~~10 см $100 \text{ см}^2 = 10^3 \text{ см}^3$ — 1 л~~ воды, Разница в уровне воды в сосудах будет $2 \cdot 10 \text{ см} = 20 \text{ см}$, т.е. 10 см были вытеснены керосином из первого сосуда ~~(30 см и $40 + 10 = 50 \text{ см}$)~~ + ~~(50 - 10 = 40 см и $50 + 10 = 60 \text{ см}$)~~.

$$\rho_K g (40 - \Delta H) = \rho_B g \cdot 20 + \rho_K g \Delta H$$

$$40 \rho_K g - \cancel{40 \rho_K g} = \rho_K g \Delta H = 20 \rho_B g + \rho_K g \Delta H$$

$$\cancel{2 \rho_K g H} \quad 2 \rho_K g \Delta H = 40 \rho_K g - 20 \rho_B g. \text{ Отсюда:}$$

$$\Delta H = \frac{40 \rho_K g - 20 \rho_B g}{2 \rho_K g} = \frac{20 \rho_K - 10 \rho_B}{\rho_K} = \frac{20 \cdot 800 - 10 \cdot 1000}{800} = \frac{16000 - 10000}{800} = \frac{6000}{800} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ см}$$

$$\text{Осталось керосина в 1-м сосуде } 40 - \Delta H = (40 - 7,5) = 32,5 \text{ см}$$

$$H_1 = h + (40 - \Delta H) = (40 + 32,5) \text{ см} = 72,5 \text{ см}$$

$$H_2 = 50 + H_B + 10 + \Delta H = (50 + 10 + 7,5) \text{ см} = 67,5 \text{ см}$$

$$\text{Ответ: } H_1 = 72,5 \text{ см; } H_2 = 67,5 \text{ см}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр E4-63/4-08-133

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача 4.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; a, b, c, d, e - целые числа

$$f(19) = f(135) = 2025$$

$$f(0) \in (-4000; -3000)$$

$$f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 0 + e = e$$

$$\text{Также, } f(x) - e = x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$\begin{array}{r} \times 135 \\ 1215 \\ + 135 \\ \hline 2565 \end{array}$$

Поэтому 2025 - e кратно 19 и 135 (т.к. можно вынести x)

$\text{НОД}(19, 135) = 1$, значит, 2025 - e кратно их произведению:

$$\text{т.к. } 2025 - e : 2565$$

$$\text{т.к. } f(0) = e \in (-4000; -3000), \text{ то и } 2025 - e \in (5025; 6025)$$

Находим кратное 2565 число в этом диапазоне: $\begin{array}{r} \times 2565 \\ 5130 \end{array}$

$$2025 - e = 5130$$

$$e = 2025 - 5130 = -3105$$

$$e = f(0) = -3105$$

Ответ: -3105

Задача 3.

Выберем 6 штек и разобьем их на группы с одинаковыми (якобы) суммарными массами.

Пусть это будут 1) 300, 700, 900 и 2) 500, 600, 800. Возвесим эти две группы:

$$300 + 700 + 900 \mid 500 + 600 + 800$$

1) Меньше весит 300 + 700 + 900:

$$900 \mid 300 + 600$$

1.1) Меньше ^{весит} 900 $\rightarrow$ 900

1.2) Меньше весит 300 + 600 $\rightarrow$ 300

1.3) Равны $\rightarrow$ 700

2) Меньше весит 500 + 600 + 800

$$800 \mid 300 + 500$$

2.1) Меньше весит 800 $\rightarrow$ 800

2.2) Меньше весит 300 + 500 $\rightarrow$ 500

2.3) Равны $\rightarrow$ 600

3) Равны

$$1100 + 700 \mid 1000 + 800$$

3.1) Меньше весит 1100 + 700 $\rightarrow$ 1100

3.2) Меньше весит 1000 + 800 $\rightarrow$ 1000

3.3) Равны $\rightarrow$ 400

Если группа весит меньше, то falsifying штек среди той группы. Второе взвешивание проводится с двумя из трёх „подозрительных“ штек на разных сторонах, сумм. масса групп всё ещё равная. Если группа весит меньше, то, т.к. она состоит или из одной штеки, или из „подозрительной“ и уже подтверждённой, находим эту штеку. Если равны - falsifying штек - третья штека, не участвовавшая во 2м взвешивании. Если равны в 1м взвешивании, „подозрительная“ группа - остальные три штеки.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр E11-63/4-09-133

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача 1

Дано: t - время движения авт.

$(t+1)$ ч - вр. мотоци.

$(t+2)$ ч - вр. велосип.

$$v_B = 6 \text{ км/ч}$$

$$v_M = 32 \text{ км/ч}$$

$$v_A = 48 \text{ км/ч}$$

$$L_A + L_M + L_B \leq 16 \text{ км на момент } t$$

Найти: $L_A = ?$

При $t \leq 1$ ч: модуль ~~$(-)$ и $(-)$~~ $(-)$ и $(-)$

$$-48t + 32(t+1) - 48t + 16(t+2) \leq 16$$

либо 0

$$-96t + 32t + 32 + 16t + 32 \leq 16$$

$$96t \geq 48t + 48$$

$$48t \geq 48$$

$$t \geq 1$$

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq 1 \end{cases}$$

$$t = 1 \text{ ч}$$

При $t \geq 2$ ч: модуль $(+)$ и $(+)$
либо 0

$$48t - 32(t+1) + 48t - 16(t+2) \leq 16$$

$$96t - 32t - 32 - 16t - 32 \leq 16$$

$$48t \leq 80$$

$$t \leq \frac{80}{48}$$

$$t \leq \frac{5}{3}$$

$$t \leq 1\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} t \leq 1\frac{2}{3} \\ t \geq 2 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$|48t - 32(t+1)| + |48t - 16(t+2)| \leq 16$$

Упр. Рассм. Δ Расстояние от авт. до
мот. и вел.

$$L_B = 16(t+2) = v_B \cdot t_B$$

$$L_M = 32(t+1) = v_M \cdot t_M$$

$(-)$ и $(+)$

При $1 < t < 2$: модуль $(+)$ и $(-)$

$$-48t + 32(t+1) + 48t - 16(t+2) \leq 16$$

$$32t + 32 - 16t - 32 \leq 16$$

$$16t \leq 16$$

$$t \leq 1$$

$$\begin{cases} t \leq 1 \\ t > 1 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} t=1 & t \leq 1 \text{ ч} \\ t \in \emptyset & 1 \text{ ч} < t < 2 \text{ ч} \\ t \in \emptyset & t \geq 2 \text{ ч} \end{cases}$$

Ответ: $t_A = 1 \text{ ч}$

$$\text{Значит, } L_A = v_A \cdot t_A = 48 \text{ км/ч} \cdot 1 \text{ ч} = 48 \text{ км}$$

Ответ: 48 км

Проверка: $|48 \cdot 1 - 32(1+1)| + |48 \cdot 1 - 16(1+2)| = |48 - 64| + |48 - 48| = |-16| + |0| = 16$
 $= 16$. $16 \leq 16$, $t = 1 \text{ ч}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр E4-63/4-09-133

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача 5.

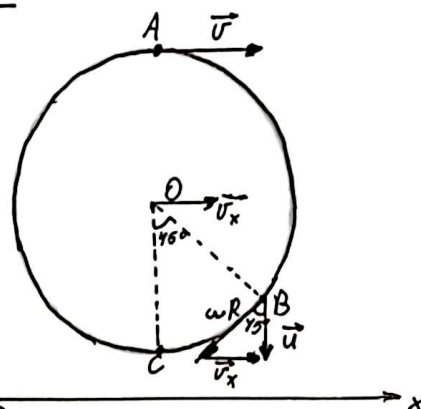
Дано: рис.

$$\angle COB = 45^\circ$$

$$v = 5 \text{ м/с}; \vec{v} \perp \vec{u}$$

Найти: $\vec{v}_c = ?$

Введем Oxy , $\vec{Ox} \uparrow \vec{v}$, $\vec{Oy} \downarrow \vec{u}$ и $\vec{Oy} \perp \vec{Ox}$



П.к. $\vec{u}$ направлено не по касательной, ^{вдоль} есть ~~скорость~~ v_x диска по y диска есть собственная скорость.

Назовём её v_x . Скорости движения точки по окружности равна ωR .

$$v_A = v = \omega R + v_x \text{ (т.к. сонаправлены)}$$

$$v_x = \omega R - v_c \text{ (т.к. противоположнонаправлены)}$$

вертикали ($\vec{u}$)

П.к. $\angle COB = 45^\circ$, то вектор ωR скорости по окр. отклонится от Ox на 45° .

Проекция $\vec{u}$ на Ox : u_x . П.к. проекция $\vec{u}$ на Ox равна 0, то:

$$\omega R \cdot \sin 45^\circ = v_x$$

$$\frac{\omega R}{\sqrt{2}} = 5 \text{ Отсюда } \omega R = 5\sqrt{2}$$

$$v_c = |\omega R - v_x| = |5\sqrt{2} - 5| = 5(\sqrt{2} - 1) \text{ м/с} \approx 5 \cdot 0,414 \text{ м/с} \approx 2,07 \text{ м/с}$$

$\vec{v}_c$ направлено против $\vec{Oy}$; $\vec{v}_c \uparrow \vec{v}_x$ и $\vec{v}_c \uparrow \vec{v}$

Ответ: $v_c = 5(\sqrt{2} - 1) \text{ м/с} \approx 2,07 \text{ м/с}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр EH-674-09-133

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача 8, продолжение

Если $I_1 = 600 \text{ мА} = 20I$, то:

$$I_4 = I = 30 \text{ мА}$$

$$I_3 = 2I = 60 \text{ мА}$$

$$I_2 = 8I = 240 \text{ мА}$$

Ответ: $I_2 = 240 \text{ мА}$, $I_3 = 60 \text{ мА}$, $I_4 = 30 \text{ мА}$, $I_1 = 600 \text{ мА}$