Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 021106

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	5	10	13	13	15	0	2	4	62

Вариант 2

№1

Пусть $(ABS)\cap(CDS)=a$. Тогда $S\in a$ и $a\parallel AB$, $a\parallel CD$ (т.к. $AB\parallel CD$).

В пл. (ABS) продолжим MN до пересечений с a в т. K и с AB в т. L. $\angle SKN=\angle NLB$ ~~$\angle MLA$~~ (н.л.), $\angle SNK=\angle BNL$ (верт.) $\Rightarrow \triangle SNK\sim\triangle BNL \Rightarrow \frac{SN}{NB}=\frac{SK}{BL}\Rightarrow BL=SK\cdot\frac{NB}{SN}=3SK$.

$\angle SKM=\angle MLA$ (н.л.), $\angle SMK=\angle AML$ (верт.) $\Rightarrow \triangle SMK\sim\triangle AML\Rightarrow \frac{SM}{MA}=\frac{SK}{AL}\Rightarrow AL=SK\cdot\frac{MA}{SM}=2SK$

$AB=BL-AL=3SK-2SK=SK$

Т.к. $K\in a$ и $a\subset(CDS)$, $K\in(CDS)$. Проведём прямую KP, пусть $KP\cap SD=X$, $KP\cap CD=Y$.

Рисунок?

$M\in(MNP)$, $N\in(MNP)$, $K\in MN\Rightarrow K\in(MNP)$

$K\in(MNP)$, $P\in(MNP)$, $X\in KP\Rightarrow X\in(MNP)\Rightarrow \frac{SX}{XD}$ – искомое отношение.

$\angle KPS=\angle YPC$ (верт.), $\angle SKP=\angle CYP$ (н.л.) $\Rightarrow\triangle SPK\sim\triangle CPY\Rightarrow\frac{SK}{CY}=\frac{SP}{PC}\Rightarrow CY=SK\cdot\frac{PC}{SP}=4SK$.

$\angle KXS=\angle YXD$ (верт.), $\angle SKX=\angle XYD$ (н.л.) $\Rightarrow\triangle SXK\sim\triangle DXY\Rightarrow\frac{SK}{DY}=\frac{SX}{XD}$

$DY=CY-CD=4SK-AB=3SK$.

$SX:XD=\frac{SK}{DY}=SK:DY=SK:3SK=1:3$

Ответ: 1:3

№2

$$\begin{cases}\dfrac{\log_{25}x\cdot\log_3 y}{\log_{27}(xy)}=1\\ \dfrac{\log_5 y\cdot\log_{49}z}{\log_7(yz)}=\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{\log_{125}z\cdot\log_3 x}{\log_{81}(zx)}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\log_5 x\cdot\log_3 y=\frac{1}{3}(\log_3 x+\log_3 y)\\ 5\cdot\log_5 y\cdot\frac{1}{2}\log_7 z=3(\log_7(y)+\log_7 z)\\ \frac{1}{3}\log_5 z\cdot\log_3 x=\frac{1}{4}(\log_3 z+\log_3 x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\frac{\ln x}{\ln 5}\cdot\frac{\ln y}{\ln 3}=2\left(\frac{\ln x}{\ln 3}+\frac{\ln y}{\ln 3}\right)\\ 5\cdot\frac{\ln y}{\ln 5}\cdot\frac{\ln z}{\ln 7}=6\left(\frac{\ln y}{\ln 7}+\frac{\ln z}{\ln 7}\right)\\ 4\cdot\frac{\ln z}{\ln 5}\cdot\frac{\ln x}{\ln 3}=3\left(\frac{\ln z}{\ln 3}+\frac{\ln x}{\ln 3}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}3\ln x\cdot\ln y=2\ln 5(\ln x+\ln y)\\ 5\ln y\cdot\ln z=6\ln 5(\ln y+\ln z)\\ 4\ln z\cdot\ln x=3\ln 5(\ln z+\ln x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln y(3\ln x-2\ln 5)=2\ln 5\cdot\ln x\\ \ln z(5\ln y-6\ln 5)=6\ln 5\cdot\ln y\\ \ln z(4\ln x-3\ln 5)=3\ln 5\cdot\ln x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln y=\frac{2\ln 5\cdot\ln x}{3\ln x-2\ln 5}\\ \ln z=\frac{6\ln 5\cdot\ln y}{5\ln y-6\ln 5}\\ \ln z=\frac{3\ln 5\cdot\ln x}{4\ln x-3\ln 5}\end{cases}$$

6D37

~~$\ln z = 6\ln 5$~~

$$\begin{cases} \ln y = \dfrac{2\ln 5\cdot \ln x}{3\ln x-2\ln 5} \\ \ln z = \dfrac{6\ln 5\cdot \frac{2\ln 5\cdot \ln x}{3\ln x-2\ln 5}}{5\cdot\frac{2\ln 5\cdot \ln x}{3\ln x-2\ln 5}-6\ln 5} \\ \ln z = \dfrac{3\ln 5\cdot \ln x}{4\ln x-3\ln 5} \end{cases}$$

$$\ln z = \frac{6\ln 5\cdot \frac{2\ln 5\cdot \ln x}{3\ln x-2\ln 5}}{5\cdot\frac{2\ln 5\cdot \ln x}{3\ln x-2\ln 5}-6\ln 5} = \frac{6\ln 5\cdot \frac{\ln x}{3\ln x-2\ln 5}}{5\cdot\frac{\ln x}{3\ln x-2\ln 5}-3} = \frac{6\ln 5\cdot \ln x}{5\ln x-3(3\ln x-2\ln 5)} = \frac{6\ln 5\cdot \ln x}{5\ln x-9\ln x+6\ln 5} = \frac{3\ln 5\cdot \ln x}{3\ln 5-2\ln x}$$

$$\frac{3\ln 5\cdot \ln x}{4\ln x-3\ln 5} = \ln z = \frac{3\ln 5\cdot \ln x}{3\ln 5-2\ln x} \Rightarrow 4\ln x-3\ln 5 = 3\ln 5-2\ln x \Rightarrow \ln x=\ln 5 \Rightarrow x=5$$

$$\ln y = \frac{2\ln 5\cdot \ln x}{3\ln x-2\ln 5} = \frac{2\ln 5\cdot \ln 5}{3\ln 5-2\ln 5} = 2\ln 5 = \ln 25 \Rightarrow y=25$$

±

$$\ln z = \frac{3\ln 5\cdot \ln x}{3\ln 5-2\ln x} = \frac{3\ln 5\cdot \ln 5}{3\ln 5-2\ln 5} = 3\ln 5 = \ln 125 \Rightarrow z=125$$

Ответ: $x=5;\ y=25;\ z=125$

№3

Пусть $a=2^x$, $b=\sin^2 y$, $c=\ln^3 z$. $a>0$, $0\le b\le 1$.

Тогда $a^2=(2^x)^2=2^{2x}=4^x$, $b^2=(\sin^2 y)^2=\sin^4 y$, $c^2=(\ln^3 z)^2=\ln^6 z$. $a^2>0$, $0\le b^2\le 1$, $c^2\ge 0$.

$4^x+\sin^4 y+\ln^6 z=25 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=25$.

Т.к. a^2, b^2 и c^2 – неотрицательные, $a^2\le 25$, $b^2\le 25$, $c^2\le 25 \Rightarrow 0<a\le 5;\ 0\le b\le 1\le 5,\ -5\le c\le 5$.

+

$0\le b\le 1 \Rightarrow -4\le -4b\le 0;\ -5\le c\le 5 \Rightarrow -40\le 8c\le 40$.

$a\le 5,\ -4b\le 0,\ 8c\le 40 \Rightarrow$ ~~a+c~~ $a-4b+8c\le 5+0+40=45$, ч.т.д.

№4

$a_2=\cos 100^\circ=-\sin 10^\circ$

Заметим, что ~~при~~ $10^n=1080\cdot 10^{n-3}-80\cdot 10^{n-3}=3\cdot 360\cdot 10^{n-3}-80\cdot 10^{n-3}$.

$800\cdot 10^n=720\cdot 10^n+80\cdot 10^n=2\cdot 360\cdot 10^n+80\cdot 10^n$.

Тогда, при ~~$n\ge 4$~~ $n\ge 3$ ~~cos~~ $a_n=\cos(10^n)^\circ=\cos(3\cdot 10^{n-3}\cdot 360-80\cdot 10^{n-3})^\circ=\cos(-80\cdot 10^{n-3})^\circ=\cos(80\cdot 10^{n-3})^\circ$?

~~$=\cos(800\cdot 10^{n-4})^\circ=\cos(2\cdot 10^{n-4}\cdot 360+80\cdot 10^{n-4}$~~

+

Пусть $f(x)=\cos(80\cdot 10^x)^\circ$. Тогда ~~при x=0~~ $f(0)=\cos 80^\circ$, а для ~~$n\ge 1$~~ $n\in N$ $f(n)=\cos(80\cdot 10^n)^\circ=\cos(800\cdot 10^{n-1})^\circ=$ $=\cos(2\cdot 10^{n-1}\cdot 360+80\cdot 10^{n-1})^\circ=\cos(80\cdot 10^{n-1})^\circ=f(n-1) \Rightarrow$ значение функции $f(x)$ при любом натуральном x равно $f(0)=\cos 80^\circ$. Заметим, что при $n\ge 3$ $a_n=\cos(80\cdot 10^{n-3})^\circ=f(n-3)$. Т.к. $n-3\ge 0$ и $(n-3)\in N$, все элементы последовательности, начиная с третьего, равны $\cos 80^\circ=$ ~~sin~~ $\sin 10^\circ$. Тогда:

$a_1\cos x+(a_2+a_{2023}+a_{2024})\sin x=\cos 10^\circ\cdot\cos x+(-\sin 10^\circ+\sin 10^\circ+\sin 10^\circ)\sin x=\cos 10^\circ\cdot\cos x+\sin 10^\circ\cdot\sin x=$ ~~$\cos(x-10)^\circ$~~ $\cos(x-10^\circ)$.

Максимальное значение выражение принимает при $x-10^\circ=360^\circ\cdot k,\ k\in Z \Rightarrow x=10^\circ+360^\circ\cdot k, k\in Z$ и равно 1.

Ответ: 1

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Бланк ответов №2

шифр 021106

№5

Сила сопротивления воздуха F_c зависит от скорости движения тела и направлена в противоположную ей сторону. Пока тело летит вверх и замедляется, F_c сонаправлена с силой тяжести F_T и уменьшается со временем, пока тело не достигнет высшей точки траектории. В момент, когда тело останавливается в высшей точке, $F_c=0$ и ускорение a равно ускорению свободного падения $g=10\,м/с^2$, значит, это происходит в момент $t_0=2\,с$. После этого тело начинает двигаться вниз, ускоряясь. При этом F_c увеличивается, пока не уравновесит F_T. В момент, когда $F_c=F_T$, $a=0$ – значит, это происходит в момент $t=12\,с$. Установившаяся скорость – площадь под графиком $a(t)$ между $t_0=2\,с$ и $t=12\,с$.

$27{,}9\,м/с < v < 28{,}2\,м/с$

№6

$F_{эл}=\frac{kq_1q_2}{s^2}$, где s – расстояние между шариками.

$F_{эл}=ma \Rightarrow a=\frac{F_{эл}}{m}$. В начальный момент времени $a_1=\frac{kq_1q_2}{m_1L^2}$, $a_2=\frac{kq_1q_2}{m_2L^2}$.

№8

Оптический центр линзы всегда лежит на прямой, проходящей через ~~предмет~~ точку и её изображение, полученное с её помощью. Поэтому он будет лежать на пересечении прямых AA' и BB'. Проведём AA' и BB' и отметим $O=AA'\cap BB'$.

№9

$p_0V_0=\nu RT$

$pV=\nu RT$,

$p=2p_0$, $V_0=Sh_0$, $V=Sh \Rightarrow V=\frac{V_0}{4}$, $\nu=\frac{m}{M}$