



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕК-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

N1.

$$7\sqrt{4-3x} - 3|2x-5| \leq 7x - 3|2\sqrt{4-3x} - 5|$$

Введем замену: пусть $t = \sqrt{4-3x} \Rightarrow t \geq 0$ (*)

Тогда $4-3x = t^2$

$$3x = 4 - t^2$$

$$3x = 4 - t^2$$

$$2x = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}t^2$$

$$x = \frac{4-t^2}{3}$$

$$2x-5 = -\frac{2t^2+7}{3}$$

ОДЗ: $4-3x \geq 0$

$$3x \leq 4$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

Тогда первоначальное нерав-во равносильно нерав-ву:

$$7t - 3\left|-\frac{2t^2+7}{3}\right| \leq 7 \cdot \frac{4-t^2}{3} - 3|2t-5|$$

$$-\frac{2t^2+7}{3} < 0 \text{ при } t \geq 0$$

$$\Rightarrow 7t - (2t^2+7) \leq \frac{28-7t^2}{3} - 3|2t-5|$$

$2t-5=0$
 $t=2,5$

$$\begin{cases} t \leq 2,5 \\ 7t - 2t^2 - 7 \leq \frac{28-7t^2}{3} + 3(2t-5) \\ t > 2,5 \\ 7t - 2t^2 - 7 \leq \frac{28-7t^2}{3} - 3(2t-5) \end{cases}$$

1) $t \leq 2,5$

$$21t - 6t^2 - 21 \leq 28 - 7t^2 + 18t - 45$$

$t \leq 2,5$

$$t^2 + 3t - 4 \leq 0$$

из (*) $\Rightarrow t \in [-4; 1]$

$t \geq 0 \Rightarrow t \in [0; 1]$

$t \leq 2,5$

$$\{t \in [-4; 1]\} \Rightarrow t \in [-4; 1]$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

√1 (продолжение)

из $n \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in [0, 1]$

$$2) \begin{cases} t > 2,5 \\ 7t - 2t^2 - 7 \leq \frac{28 - 7t^2 - 3(2t - 5)}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 2,5 \\ 21t - 6t^2 - 21 \leq 28 - 7t^2 - 18t + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 2,5 \\ t^2 + 39t - 94 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 2,5 \\ t \in \left(\frac{-39 - \sqrt{1897}}{2}, \frac{-39 + \sqrt{1897}}{2} \right) \end{cases}$$

$$\text{из } (*): \begin{cases} t > 2,5 \\ t \geq 0 \\ t \in \left(\frac{-39 - \sqrt{1897}}{2}, \frac{-39 + \sqrt{1897}}{2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 2,5 \\ t \in \left(0, \frac{-39 + \sqrt{1897}}{2} \right) \Rightarrow t \in \emptyset \end{cases}$$

$$\frac{-39 + \sqrt{1897}}{2} \stackrel{?}{>} 2,5$$

$$-39 + \sqrt{1897} \stackrel{?}{>} 5$$

$$\sqrt{1897} \stackrel{?}{>} 44$$

$$1897 \stackrel{?}{>} 1936 \text{ (неверно)}$$

Плюс р. и. н. м. дан-
ного мер-ва будет

$$t \in [0, 1]$$

$$t = \sqrt{4 - 3x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{4 - 3x} \geq 0 \\ \sqrt{4 - 3x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{4 - 3x} \geq 0$$

$$\sqrt{4 - 3x} \leq 1$$

$$4 - 3x \geq 0$$

$$4 - 3x \leq 1$$

$$3x \leq 4$$

$$3x \geq 3$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

$$x \geq 1$$

$$x \leq 1\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x \in [1, 1\frac{1}{3}]$$

Ответ: $[1, 1\frac{1}{3}]$.



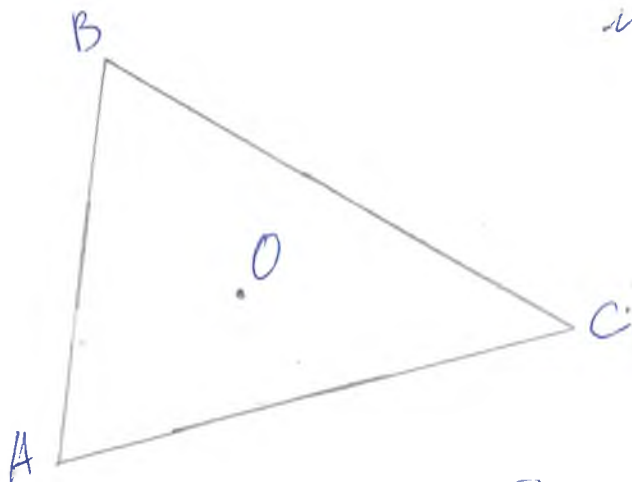
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

√2



Дано: в ABC : вписан. окр. с O
 AB, BC, AC — члены арифм. прогр.
 $d = 8$
 AB, BC, AC, d — члены арифм. прогр.
Найти: R_{ABC}

Решение.

1. Так диаметр вписанной окр-ти треугольника не может превосходить длины его стороны, то длины диаметра вписанной окр-ти явл-ся первым членом данной арифм-ой прогр-ции

2. Не умаляя общности, скажем, что $AB < BC < AC$.
Пусть d — разность данной арифм. прогрессии

Тогда $AB = d + d = 8 + d$

$BC = d + 2d = 8 + 2d$

$AC = d + 3d = 8 + 3d$

3. $S_{\triangle ABC} = pr$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, r — радиус вписан. окр-ти
(по формуле Герона)

$$\Rightarrow p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{8+d + 8+2d + 8+3d}{2} = \frac{24+6d}{2} = 12+3d$$

$r = \frac{d}{2} = 4$

$\Rightarrow S = pr = 4(12+3d)$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№2 (продолжение)

4. $S_{\Delta BC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$ (по ф. Герона)

$$p-AB = 12+3q-8-q = 4+2q$$

$$p-BC = 12+3q-8-2q = 4+q \quad \Rightarrow S = \sqrt{(12+3q)(4+2q)(4+q)q}$$

$$p-AC = 12+3q-8-3q = 4$$

5. Из п. 3 и 4 $\Rightarrow 4(12+3q) = \sqrt{4(12+3q)(4+2q)(4+q)}$

$$4^2(12+3q)^2 = 4(12+3q)(4+2q)(4+q)$$

$$4(12+3q) = (4+2q)(4+q)$$

$$48+12q = 16+4q+8q+2q^2$$

$$2q^2 = 32$$

$$q^2 = 16$$

$$\begin{cases} q=4 \\ q=-4 \end{cases}$$

$q=-4$ не удовл. усл. задачи ($AC=8+3q$)

$$\Rightarrow q=4$$

$$\Rightarrow AB = 12+q = 8+4 = 12$$

$$BC = 8+2q = 8+8 = 16$$

$$AC = 8+3q = 20$$

6. $P_{\Delta BC} = AB+BC+AC = 12+16+20 = 48$

Ответ: 48.

$\Rightarrow AC = 8-12 = -4$ 20
длины не могут
быть отрицательными



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№3

$$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} = 4 \\ b + \frac{1}{c} = 1 \\ c + \frac{1}{d} = 4 \\ d + \frac{1}{a} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= 4 - a \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{4 - a} \\ b + \frac{1}{c} &= 1 \\ \frac{1}{4 - a} + \frac{1}{c} &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{c + 4 - a}{c(4 - a)} = 1$$

$$4 + c - a = c(4 - a)$$

$$c(1 - 4 + a) = a - 4$$

$$c = \frac{a - 4}{a - 3}$$

$$c + \frac{1}{d} = 4$$

$$\frac{a - 4}{a - 3} + \frac{1}{d} = 4$$

$$\frac{ad + 4d + a - 3}{d(a - 3)} = 4$$

$$ad - 4d + a - 3 = 4ad - 12d$$

$$3ad = 8d - 3 + a$$

$$a = \frac{8d - 3}{3d}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{3d}{8d - 3}$$

$$3ad - a = 8d - 3$$

$$a = \frac{8d - 3}{3d - 1}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{3d - 1}{8d - 3}$$

$$d + \frac{1}{a} = 1$$

$$d + \frac{3d}{8d - 3} = 1$$

$$\frac{8d^2 - 3d + 3d}{8d - 3} = 1$$

$$\frac{8d^2}{8d - 3} = 1 \Rightarrow 8d^2 = 8d - 3$$

$$8d^2 - 8d + 3 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 8 \cdot 3 =$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2
N3 (продолжение)

$$d + \frac{1}{a} = 1$$

$$d + \frac{3d-1}{8d-3} = 1$$

$$\frac{8d^2 - 3d + 3d - 1}{8d - 3} = 1$$

$$\frac{8d^2 - 1}{8d - 3} = 1$$

$$8d^2 - 1 = 8d - 3$$

$$8d^2 - 8d + 2 = 0$$

$$4d^2 - 4d + 1 = 0$$

$$(2d - 1)^2 = 0$$

$$2d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a = \frac{8d-3}{3d-1} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4-3}{1,5-1} = \frac{1}{0,5} = 2$$

(a=2)

$$\begin{cases} c = \frac{a-4}{a-3} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{2-4}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$$

(c=2)

$$\begin{cases} b = \frac{1}{4-a} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{4-2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(b = \frac{1}{2})

Ответ: $a=2$; $b=\frac{1}{2}$; $c=2$; $d=\frac{1}{2}$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№5

$$S = 20 \text{ м}$$

$$H = 3 \text{ м}$$

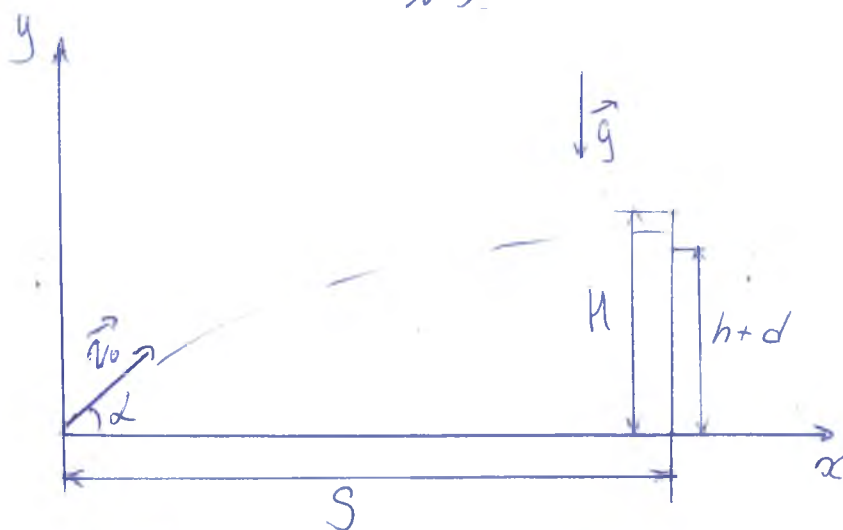
$$v_0 = 20 \text{ м/с}$$

$$h = 2,15 \text{ м}$$

$$d = 0,35 \text{ м}$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$L = ?$



В условии задачи сказано, что максимальная высота прыжка Талгата $L = 0,35 \text{ м}$

~~Скорость его рук относительно земли не более, чем~~ Его руки могут находиться относительно земли на высоте не более, чем $h+d = (2,15 + 0,35) \text{ м} = 2,5 \text{ м}$

(*) Для того, чтобы мяч попал в ворота, он должен преодолеть расстояние по горизонтали в $S = 20 \text{ м}$, быть не выше, большей, чем $h+d$, но меньшей, чем высота ворот, т.е. $H = 3 \text{ м}$

Запишем урав-ие траектории: $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}$$

$$y_0 = 0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

$$g_y = -g$$

$$\Rightarrow y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№5 (продолжение)

$$y = 2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Из (*) $\Rightarrow 2,5 < y < 3$ для $x = 5 = 20 \text{ м}$

Подставим значения: $2,5 < 20 \operatorname{tg} \alpha - \frac{10}{2} \cdot \frac{20^2}{20^2 \cos^2 \alpha} < 3$

Основ. тригоном. тождеств: $2,5 < 20 \operatorname{tg} \alpha - \frac{5}{\cos^2 \alpha} < 3$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$$

$$\frac{5}{\cos^2 \alpha} = 5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 5$$

$$2,5 < 20 \operatorname{tg} \alpha - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 5 < 3$$

$$2,5 < -5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 20 \operatorname{tg} \alpha - 5 < 3$$

$$1) -5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 20 \operatorname{tg} \alpha - 5 > 2,5$$

$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 20 \operatorname{tg} \alpha + 7,5 < 0$$

$$10 \operatorname{tg}^2 \alpha - 40 \operatorname{tg} \alpha + 15 < 0$$

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 8 \operatorname{tg} \alpha + 3 < 0$$

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 8 \operatorname{tg} \alpha + 3 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 64 - 24 = 40$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{8 + \sqrt{40}}{4} = \frac{8 + 2\sqrt{10}}{4} = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$$

$$2) -5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 20 \operatorname{tg} \alpha - 5 < 3$$

$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 20 \operatorname{tg} \alpha + 8 > 0$$

$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 20 \operatorname{tg} \alpha + 8 = 0$$

$$D = 400 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 400 - 160 = 240$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{20 + \sqrt{240}}{10} =$$

$$= \frac{20 + \sqrt{16 \cdot 15}}{10} = \frac{20 + 4\sqrt{15}}{10} = \frac{10 + 2\sqrt{15}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{10 - 2\sqrt{15}}{5}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \in \left(-\infty; \frac{10 - 2\sqrt{15}}{5}\right) \cup \left(\frac{10 + 2\sqrt{15}}{5}; +\infty\right)$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

$\sqrt{5}$ (продолжение)

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle \in \left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}, \frac{4+\sqrt{10}}{2} \right)$$

$$\left[\operatorname{tg} \angle \in \left(-\infty, \frac{10-2\sqrt{15}}{5} \right) \cup \left(\frac{10+2\sqrt{15}}{5}, +\infty \right) \right]$$

$$\frac{4-\sqrt{10}}{2} < \frac{10-2\sqrt{15}}{5}$$

$$20-5\sqrt{10} < 20-2\sqrt{15}$$

$$-5\sqrt{10} < -2\sqrt{15}$$

$$5\sqrt{10} > 2\sqrt{15}$$

$$250 > 60 \text{ (верно)}$$

$$\Rightarrow \frac{4-\sqrt{10}}{2} < \frac{10-2\sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{4+\sqrt{10}}{2} < \frac{10-2\sqrt{15}}{5}$$

$$20+5\sqrt{10} < 20-4\sqrt{15}$$

$$5\sqrt{10} < -4\sqrt{15} \text{ (неверно)}$$

$$\Rightarrow \frac{4+\sqrt{10}}{2} > \frac{10-2\sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{4+\sqrt{10}}{2} > \frac{10+2\sqrt{15}}{5}$$

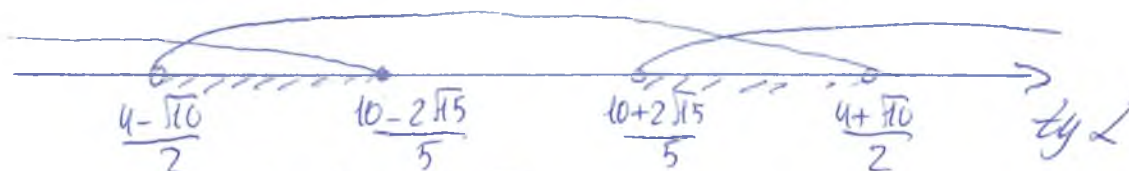
$$20+5\sqrt{10} > 20+4\sqrt{15}$$

$$5\sqrt{10} > 4\sqrt{15}$$

$$250 > 240 \text{ (верно)}$$

$$\Rightarrow \frac{4+\sqrt{10}}{2} > \frac{10+2\sqrt{15}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{4-\sqrt{10}}{2} < \frac{10-2\sqrt{15}}{5} < \frac{10+2\sqrt{15}}{5} < \frac{4+\sqrt{10}}{2}$$



$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle \in \left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}, \frac{10-2\sqrt{15}}{5} \right) \cup \left(\frac{10+2\sqrt{15}}{5}, \frac{4+\sqrt{10}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \angle \in \left(\arctg \left(\frac{4-\sqrt{10}}{2} \right), \arctg \left(\frac{10-2\sqrt{15}}{5} \right) \right) \cup \left(\arctg \left(\frac{10+2\sqrt{15}}{5} \right), \arctg \left(\frac{4+\sqrt{10}}{2} \right) \right)$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№6

$$\eta = 0,5$$

$$m = 3 \text{ кг}$$

$$t_0 = 0^\circ \text{C}$$

$$C = 150 \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$\alpha = 330 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$$

$$\Delta T = ?$$

$$\eta = \frac{Q_{\text{пол}}}{Q_{\text{зат}}}$$

$$Q_{\text{пол}} = \alpha m$$

$$Q_{\text{зат}} = Q_{\text{пол}} + Q_{\text{ном}} = \alpha m + Q_{\text{ном}}$$

$$Q_{\text{ном}} = \frac{\alpha m (1 - \eta)}{\eta}$$

$$Q_{\text{ном}} = C \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow C \cdot \Delta T = \frac{\alpha m (1 - \eta)}{\eta}$$

$$\Delta T = \frac{\alpha m (1 - \eta)}{\eta \cdot C}$$

$$\Delta T = \frac{330 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot 3 \text{ кг} \cdot (1 - 0,5)}{0,5 \cdot 150 \cdot 10^3 \text{ Дж/К}} = \frac{330}{50} \text{ К} = 6,6 \text{ К}$$

$$\Delta T = 6,6 \text{ К}$$

Ответ: 6,6 К.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

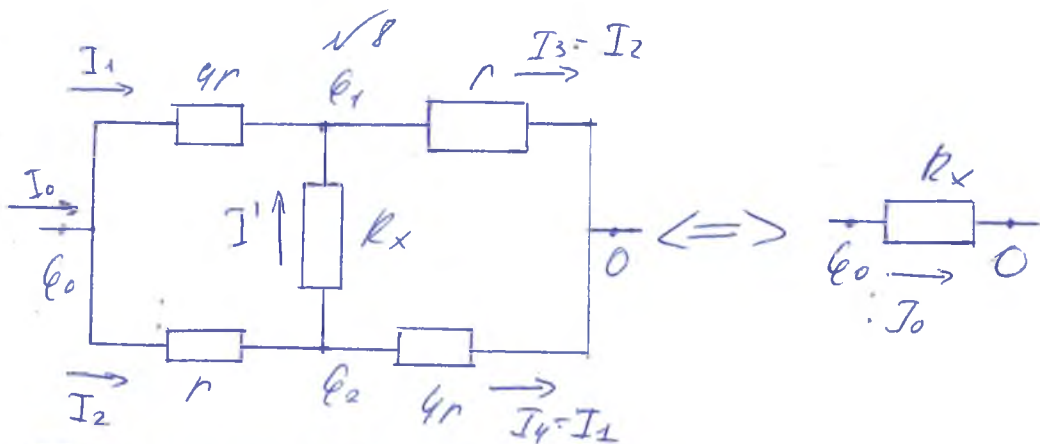
Вариант 2

$$R = 16 \text{ Ом} = 4r$$

$$r = 4 \text{ Ом}$$

$$R_0 = R_x$$

$$R_x = ?$$



П. к сопротивление всей системы равно сопротивлению одного резистора R_x , то при одинаковом напряжении ток по системе и одному резистору R_x будет тем же и тот же

$$I_0 = I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \Rightarrow I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

$$I_3 = I_1 + I_2 - I_4$$

$$E_0 = 4I_1r + I_3r$$

$$E_0 = I_2r + 4I_4r \Rightarrow 4I_1r + I_3r = I_2r + 4I_4r$$

$$4I_1 + I_3 = I_2 + 4I_4$$

$$4I_1 + I_1 + I_2 - I_4 = 4I_4 + I_2$$

$$5I_1 = 5I_4$$

$$I_1 = I_4$$

$$\Rightarrow I_2 = I_3$$

п. к сопротивление резистора r меньше сопротивления

п. к $r < R$, то ток по среднему резистору будет тем же. 3у ввеха, т.е. $I_2 = I_1 + I'$

$$I' = I_2 - I_1$$

$$E_0 = I_2r + I'R_x + I_3r = I_2r + I'R_x + I_2r, I'R_x + 2I_2r$$

$$E_0 = 4I_1r - I'R_x + 4I_4r = 4I_1r + 4I_1r - I'R_x - 8I_1r - I'R_x$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЕН-29/1-10-50

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№8 (продолжение)

$$\Rightarrow I'R_x + 2I_2r = 8I_1r - I'R_x$$

$$(I_2 - I_1)R_x + 2I_2r = 8I_1r - (I_2 - I_1)R_x$$

$$2(I_2 - I_1)R_x = 8I_1r - 2I_2r$$

$$R_x = \frac{(4I_1 - I_2)r}{I_2 - I_1}$$

Из эквивалентной схемы: $R_x = \frac{E_0}{I_0} = \frac{(4I_1 + I_2)r}{I_1 + I_2} = \frac{(4I_1 + I_2)r}{I_1 + I_2}$

$$\Rightarrow \frac{(4I_1 - I_2)r}{I_1 - I_2} = \frac{(4I_1 + I_2)r}{I_1 + I_2}$$

$$(4I_1 - I_2)(I_1 + I_2) = (I_1 - I_2)(4I_1 + I_2)$$

$$4I_1^2 + 4I_1I_2 - I_1I_2 - I_2^2 = 4I_1^2 + I_1I_2 - 4I_1I_2 - I_2^2$$
$$3I_1I_2 = -3I_1I_2$$

$$\frac{(4I_1 - I_2)r}{I_2 - I_1} = \frac{(4I_1 + I_2)r}{I_1 + I_2}$$

$$(4I_1 - I_2)(I_1 + I_2) = (4I_1 + I_2)(I_2 - I_1)$$

$$4I_1^2 + 4I_1I_2 - I_1I_2 - I_2^2 = 4I_1I_2 - 4I_1^2 + I_2^2 - I_1I_2$$
$$8I_1^2 - 2I_2^2$$

$$4I_1^2 = I_2^2 \Rightarrow I_2 = 2I_1$$

$$\Rightarrow R_x = \frac{(4I_1 - I_2)r}{I_2 - I_1} = \frac{4I_1 - 2I_1}{2I_1 - I_1} \cdot r = 2r$$

$$\Rightarrow R_x = 2 \cdot 4 \text{ Ом} = 8 \text{ Ом}$$

Ответ: 8 Ом