М-Ю-10-027

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	5	12	–	–	8	8	15	15	63

Вариант 1

① $\frac{80!}{10^{80}} = \frac{80!}{2^{80}\cdot 5^{80}}$ Чтобы сократить дробь, посмотрим сколько множителей 2 и 5 находится в 80!. Будем рассматривать каждый десяток.

$1\cdot2\cdot3\ldots10$: 2 4 6 5 8 10 $\Rightarrow 2^8\cdot5^2$

множит. 2 и 5: $2\ \ 2^2\ \ 2\ \ 5\ \ 2^3\ \ 2\ 5$

$11\cdot12\cdot13\ldots20$: 12 14 15 16 18 20 $\Rightarrow 2^{10}\cdot5^2$

множ. 2 и 5: $2^2\ \ 2\ \ 5\ \ 2^4\ \ 2\ \ 2^2\cdot5$

Аналогичным образом получим множит. для 20·21…80

$21\cdot22\ldots30 : 2\ \ 2^3\ \ 5^2\ \ 2\ \ 2^2\ \ 2\ 5 \Rightarrow 2^8\cdot5^3$

$31\cdot32\ldots40 : 2^5\cdot2\cdot5\cdot2^2\cdot2\cdot2^3\cdot5 \Rightarrow 2^{12}\cdot5^2$

$41\cdot42\ldots50 : 2\cdot2^2\cdot5\cdot2\cdot2^4\cdot5^2\cdot2 \Rightarrow 2^9\cdot5^3$

$51\cdot52\ldots60 : 2^2\cdot2\cdot5\cdot2^3\cdot2\cdot5\cdot2^2 \Rightarrow 2^9\cdot5^2$

$61\cdot62\ldots70 : 2\cdot2^6\cdot5\cdot2\cdot2^2\cdot5\cdot2 \Rightarrow 2^{10}\cdot5^2$

$71\cdot72\ldots80 : 2^3\cdot2\cdot5^2\cdot2^2\cdot2\cdot5\cdot2^4 \Rightarrow 2^{11}\cdot5^3$

Всего множителей 2 и 5 в 80!:

$2^{\cancel{71}\,78}\cdot5^{19}$

Тогда итоговый знаменатель:

$$\frac{2^{71}\cdot5^{19}}{2^{80}\cdot5^{80}} = \frac{1}{2^3\cdot5^{61}}$$

Ответ: $2^3\cdot5^{61}$.

② Пусть в кружке „Олимп. матем" занимается x чел., а в кружке „Робототехника" – y чел.

Тогда, из условия составим систему из трех неравенств:

$$\begin{cases} x+y>29 & (1)\ + \\ \frac{x-2}{y}>3 & (2)\ + \\ 3x-2y<60 & (3)\ + \end{cases}$$

~~$(1)\cdot3+(3)\cdot(-1)$: $5y>147$, $y>\frac{147}{5}=29\frac{2}{5}$~~

~~(2): $x-3y>2$~~

~~$(1)-(2)$: $4y>27$, $y>\frac{27}{4}=$~~

$(1)\cdot3+(2)$: $4x>89 \Rightarrow x>\frac{89}{4}=22\frac{1}{4}$

$(2)\cdot-2+(3)\cdot3$: $7x<184 \Rightarrow x<\frac{184}{7}=26\frac{2}{7}$

$\Rightarrow$ т.к. x – кол-во учеников, то $x\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=23 \\ x=24 \\ x=25 \\ x=26 \end{array}\right.$

Проверим, существует ли $y\in\mathbb{N}$ при найденных x.

$x=23$ $\begin{cases} y>6 & (1) \\ y<7 & (2) \end{cases} \Rightarrow y\notin\mathbb{N}$ – противор. $\Rightarrow x\neq23$.

+

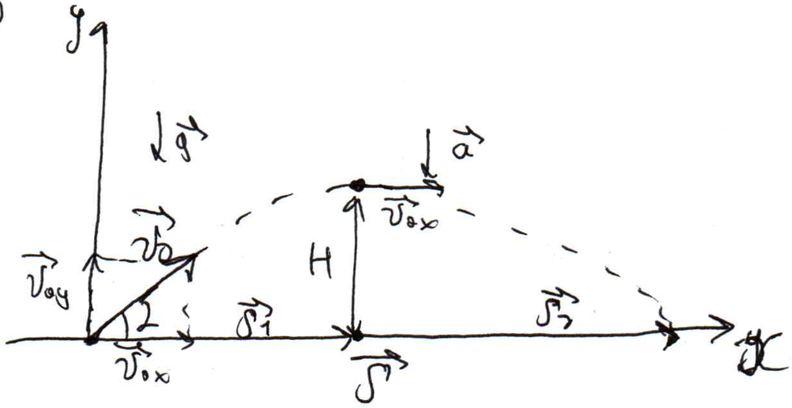
$x=24$ $\begin{cases} y>5 & (1) \\ y<7\frac{1}{3} & (2) \\ y>6 & (3) \end{cases} \Rightarrow y=7,\ y\in\mathbb{N} \Rightarrow x=24$ – подходит.

$x=26$ $\begin{cases} y>3 & (1) \\ y<8 & (2) \\ y>9 & (3) \end{cases} \Rightarrow y\in\varnothing$, $x\neq26$.

$x=25$. $\begin{cases} y>4 & (1) \\ y<7\frac{2}{3} & (2) \\ y>7\frac{1}{2} & (3) \end{cases} \Rightarrow y\notin\mathbb{N} \Rightarrow x\neq25$

Ответ: 24 чел.

⑤



$v_{oy} = v_0 \sin\alpha$

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$a_x = 0$

$a_{y_1} = -g$. $\quad a_{y_2} = -a$.

В наиб. точке $v_y = 0 \Rightarrow$

Найдём время полёта до наиб.:

~~$t_1 = v_0$~~ $\quad v_0 \sin\alpha - g t_1 = 0$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Тогда максим высота H равна:

$$v_{oy}^2 = 2gH \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Время полёта от наиб. точки до падения:

$$\frac{a t_2^2}{2} = H \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2H}{a}}$$

Тогда прогд. расстояние S:

$$S = S_1 + S_2 = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 + v_0 \cos\alpha \cdot t_2 = v_0 \cos\alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2 \cdot v_0^2 \sin^2\alpha}{2g \cdot a}} \right) =$$

$$= v_0 \cos\alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \frac{v_0 \sin\alpha}{\sqrt{g \cdot a}} \right) = v_0^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{\sqrt{ga}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S}{v_0^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}} - \frac{1}{g} = \frac{1}{\sqrt{ga}}, \qquad \frac{2Sg - v_0^2 \sin 2\alpha}{v_0^2 \sin 2\alpha \, g} = \frac{1}{\sqrt{ga}}$$

$$a = \frac{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha \, g}{2Sg - v_0^2 \sin 2\alpha} \right)^2}{g} \approx 100 \frac{м}{с^2}$$

8

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр______________

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

(7) Посчитаем $\eta_{1-2-3-1}$:

$$Q_{1-2} = \frac{3}{2}(2p_0V_0 - p_0V_0) + A_{газ} = \frac{3}{2}p_0V_0 + 0.$$

$$Q_{2-3} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - 2p_0V_0) + A_{газ} = \frac{3}{2}\cdot 2p_0V_0 + 2p_0\cdot V_0 = 5p_0V_0$$

$$|Q_{3-1}| = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + A_{газ} = \frac{3}{2}\cdot 3p_0V_0 + \frac{p_0+2p_0}{2}\cdot V_0 = \frac{9p_0V_0}{2} + \frac{3p_0V_0}{2} = 6p_0V_0$$

$$Q_н = Q_{1-2} + Q_{2-3} = \frac{13}{2}p_0V_0$$

$$|Q_х| = |Q_{3-1}| = \frac{12}{2}p_0V_0 \qquad \eta_{1-2-3-1} = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н} = \frac{\frac{1}{2}p_0V_0 \cdot 2}{13p_0V_0} = \frac{1}{13}.$$

Посчитаем $\eta_{1-3-4-1}$: $Q_{1-3} = 6p_0V_0$

$$|Q_{3-4}| = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - 2p_0V_0) = 3p_0V_0 + A_{газ} = 3p_0V_0 + 0$$

$$|Q_{4-1}| = \frac{3}{2}(2p_0V_0 - p_0V_0) + A_{газ} = \frac{3}{2}p_0V_0 + p_0V_0 = \frac{5}{2}p_0V_0$$

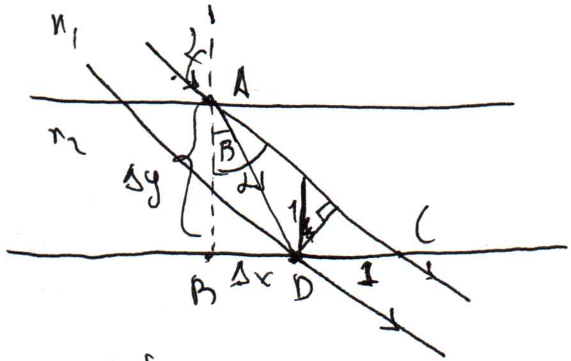
$$Q_н = Q_{1-3} = 6p_0V_0 = \frac{12}{2}p_0V_0$$

$$|Q_х| = |Q_{3-4}| + |Q_{4-1}| = 3p_0V_0 + \frac{5}{2}p_0V_0 = \frac{11}{2}p_0V_0$$

$$\eta_{1-3-4-1} = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н} = \frac{\frac{1}{2}p_0V_0 \cdot 2}{12p_0V_0} = \frac{1}{12}$$

$$K = \frac{\eta_{1-2-3-1}}{\eta_{1-3-4-1}} = \frac{12}{13}.$$

⑧



$\sin\alpha \cdot n_1 = \sin\beta \; n_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\beta = \sin\alpha \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{\sin 45^\circ}{1{,}5} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Продлим оба луча и заметим, что луч после прохожд. пластины получается сдвигом вниз на 1 или влево на 1 исходного луча. Тогда:

Из $\triangle ABC$: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta x + 1}{\Delta y} = 1 \Rightarrow \Delta x + 1 = \Delta y \quad (1)$

Из $\triangle ABD$: $AD = \dfrac{\Delta x}{\sin\beta} = \dfrac{3\Delta x}{\sqrt{2}}$, $AB = \Delta y = \sqrt{\left(\dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{1}\right)}\Delta x = \dfrac{\cancel{\sqrt{5}}}{2}\Delta x \quad (2)$ $= \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

Имеем 2 уравн. с двумя неизвестн.

(1): $\Delta x = \Delta y - 1$

(2): ~~$\Delta y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\Delta y - \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \Delta y\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$~~

~~$\Delta y = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} = \dfrac{2{,}23}{0{,}23}$~~

(2): $\Delta y = \sqrt{\dfrac{7}{2}}\Delta y - \sqrt{\dfrac{7}{2}} \Rightarrow$

$\Delta y\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}} - 1\right) = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$\Delta y = \dfrac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{\frac{7}{2}} - 1} =$ 15

⑥ Мощность тока, $P = U \cdot I$

При установл. равновесии теплообм.: $P = W \cdot S_{поверх} = \sigma \cdot T^4 \cdot \pi D \cdot L$

$U \cdot I = \sigma \cdot T^4 \cdot \pi D \, L \Rightarrow$ 8

$\Rightarrow T = \sqrt[4]{\dfrac{U \cdot I}{\sigma \cdot \pi D L}}$ = ?