

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 23-11-06

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

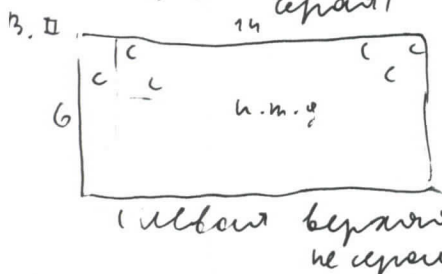
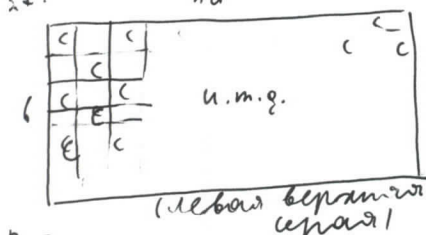
№2

1) Посчитаем кол-во невозможных исходов. На поле $6 \cdot 14 = 84$ клетки. Каждую можно покрасить в 3 цвета $m = 3^{84}$

2) Посчитаем кол-во благоприятных (н).

У каждой белой или чёрной может быть только серый сосед (белый = вариант чередования)

Остаток можно заполнить 2^{42} способами (или 2 цвета в 42 клетках)



Еще заполнить только 2^{42} исходов.

Итого $n = 2 \cdot 2^{42}$

$$3) P(A) = \frac{n}{m} = \frac{2 \cdot 2^{42}}{3^{84}} = \frac{2^{43}}{3^{84}}$$

Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$

№1

$$7 \cdot \sqrt{2 - \log_3 x} - 3 \cdot |2 \log_3 x - 5| \leq 7 \log_3 x - 3 \cdot |2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5|$$

$$7 \cdot \sqrt{2 - \log_3 x} + 3 \cdot |2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5| \leq 7 \log_3 x + 3 \cdot |2 \log_3 x - 5|$$

Введём функцию $f(n) = 7n + 3 \cdot |2n - 5|$

$$f(\sqrt{2 - \log_3 x}) \leq f(2 \log_3 x)$$

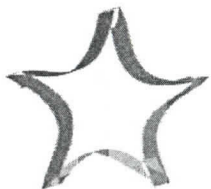
Вспомогательная:

$$f(n) = \begin{cases} 7n + 6n - 15, & n \geq \frac{5}{2} \\ 7n - 6n + 15, & n < \frac{5}{2} \end{cases}$$

①

$$f(n) = \begin{cases} 13n - 15, & n \geq \frac{5}{2} \\ n + 15, & n < \frac{5}{2} \end{cases}$$

П.ч. ф-ция - это все возрастающая функция, то она монотонна



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-06

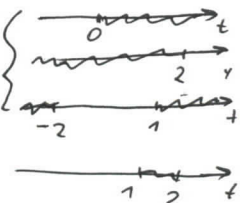
монотонно возрастающая, а значит:

$$f(\sqrt{2 - \log_3 x}) \leq f(\log_3 x) \Leftrightarrow \sqrt{2 - \log_3 x} \leq \log_3 x$$

Пусть:

$$\log_3 x = t$$

Тогда:

$$\sqrt{2 - t} \leq t \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 2 - t \geq 0 \\ 2 - t \leq t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 2 \\ t^2 + t - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 2 \\ (t+2)(t-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 2 \\ t \geq 1 \end{cases}$$


$$t \in [1; 2]$$

Вернемся к задаче:

$$1 \leq \log_3 x \leq 2$$

$$3 \leq x \leq 9$$

$$\text{Ответ: } [3; 9]$$

~ 5

Дано:

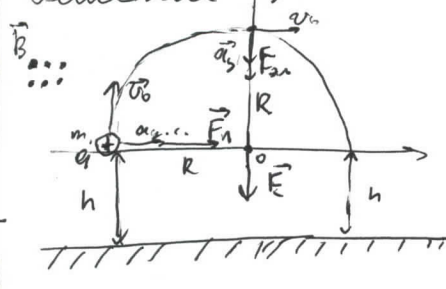
m, q (известны)

h, B, E

$\alpha = 90^\circ$

$t = ?$

Решение



1) Частица влетела в магн. поле перп. линия индукции $\Rightarrow$ движется по окр.

$$F_n = qvB \sin \alpha = qvB (\sin 90^\circ = 1)$$

$$F = m a$$

$$F_n = m a_y, a_y = \frac{v^2}{R}$$

$$qvB = m a_y$$

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow qB = \frac{mv}{R}$$

и

$$1) v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$qB = \frac{m 2\pi R}{T R}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Т.к. к. параллельна четверти окр:

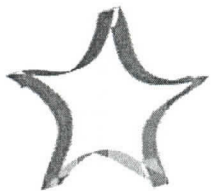
$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi m}{4qB} = \frac{\pi m}{2qB}$$

3) $F_m = qvB$; $E = \frac{F}{q}$ - частица попавшая в эл поле падает с a и пролетает по радиусу R

$$ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m}$$

$$2) R = \frac{at_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2Rm}{qB \cdot qE}} \Rightarrow t_2 = \frac{m}{q} \cdot \sqrt{\frac{2v}{B \cdot E}}$$

(2)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-06

$$t_{об} = t_1 + t_2 = \frac{51 \cdot 10^3}{29B} + \frac{m}{q} \cdot \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

Ответ: $\frac{qm}{q} \cdot (\frac{51}{2B} + \sqrt{\frac{2v}{BE}})$

$$f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b \geq 0 \text{ при любом } x$$

Рассмотрим случаи для a :

I: $a=0$ $f(x) = x + b$ - не меняет знак, если $x < 0$

II: $a < 0$, то $f(x)$ - это парабола ветвями вниз $\Rightarrow$ она не может быть всегда ≥ 0

III: $a > 0$ - параболы

Рассмотрим случаи для b : $f(0) = b \geq 0$.

I: $b=0$, $ax^2 + (3a+1)x = x(ax + (3a+1))$ - знак зависит от $x \Rightarrow$ не может быть

II: $b > 0$ - подходит

Отсюда для выполнения усл. требуется: $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$ (т.к. если есть пересечение с x 2 раза параболы уходят вниз (может быть < 0))

$$D = (3a+1)^2 - 4ab \leq 0$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ (3a+1)^2 - 4ab \leq 0 \end{cases}$$

$4a+b$ будет принимать мин. значение при том a и b , т.к. $a, b > 0$

Найдем $b_{\min}$:

$$4ab \geq (3a+1)^2$$

$$b \geq \frac{(3a+1)^2}{4a} \Rightarrow b_{\min} = \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

Введем $f(x) = 4a + b_{\min} = 4a + \frac{(3a+1)^2}{4a} = 4a + \frac{9}{4}a + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a}$, где $a > 0$

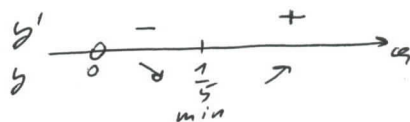
$f'(a) = \frac{25}{4} - \frac{1}{4a^2}$, Найдем экстремумы:

$$f'(a) = 0 \Rightarrow \frac{25}{4} - \frac{1}{4a^2} = 0$$

$$\frac{25a^2 - 1}{4a^2} = 0$$

$$\frac{(5a - \frac{1}{5})(5a + \frac{1}{5})}{4a^2} = 0$$

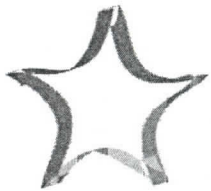
т.к. $a > 0$ верно только при $a = \frac{1}{5}$



Имеем единственную точку $\min$ $a = \frac{1}{5}$, Найдем значение:

$$f(\frac{1}{5}) = \frac{25}{5 \cdot 4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} + \frac{6}{4} = 4$$

Ответ: 4



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-06

N 6.

Дано:
 $C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$
 $R_1 = 20 \text{ Ом}$

$R_2 = 10 \text{ Ом}$

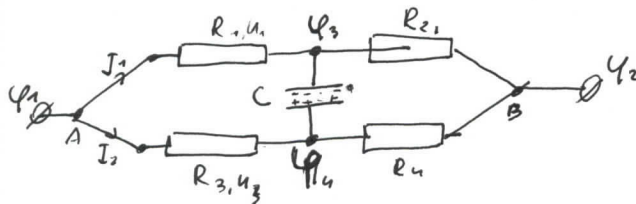
$R_3 = 40 \text{ Ом}$

$R_4 = 30 \text{ Ом}$

$U_0 = 420 \text{ В}$

$q = ?$

Решение



1) В момент, когда конденсатор полностью заряжен ток через него не течёт. Можно считать, что две шлейфы из двух параллельно подключённых последовательных соединений R_1, R_2 и R_3, R_4

Найдём I_1, I_2 :

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{420}{30} = 14 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_3 + R_4} = \frac{420}{70} = 6 \text{ А}$$

2) Зная силу тока, т.к. она постоянна для последовательного участка найдём U_1 и U_3 по R_1, R_2 (U_1, U_3)

$$U_1 = I_1 R_1 = 14 \cdot 20 = 280 \text{ В}$$

$$U_3 = I_2 R_3 = 6 \cdot 40 = 240 \text{ В}$$

$$3) U_1 = \varphi_1 - \varphi_3 \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_1 - U_1 \quad (U_1 > U_3 \Rightarrow \varphi_3 < \varphi_4)$$

$$U_3 = \varphi_1 - \varphi_4 \Rightarrow \varphi_4 = \varphi_1 - U_3$$

4) Разность потенциалов $\varphi_4 - \varphi_3 = -U$ на C :

$$U_C = \varphi_4 - \varphi_3 = U_1 - U_3$$

$$C = \frac{q}{U_C} = \frac{q}{U_1 - U_3} \text{ Ф}$$

$$q = C \cdot (U_1 - U_3) = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Кл}$$

N 2

Дано:

$$T(V) = kV^2$$

$$V_3 = 3V_1$$

$$A_{12} = 3,64 \cdot A_{31}$$

$$A_{31} = \frac{A_{12}}{3,64}$$

$\eta = ?$

Решение:

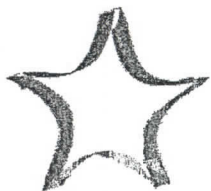
1) Перепишем график в координаты PV :

$$1-2: PV = \nu RT$$

$$PV = \nu RkV^2$$

$$P = \nu RkV, \quad \nu Rk = \alpha$$

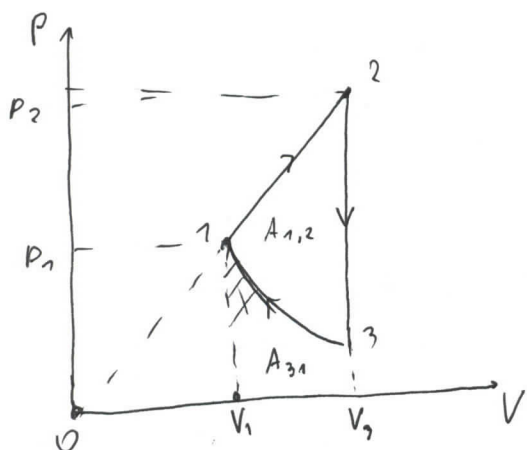
$P = \alpha V$, т.е. P — линейно зависит от V



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 23-11-06

График:



1-2: $p = \alpha V$
2-3: $V = \text{const}$; $\Delta T < 0 \Rightarrow \Delta p < 0$
3-1: $T = \text{const}$; $\Rightarrow$ изотермический

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= 3p_1, \text{ т.к. } V_3 = 3V_1 \\ V_3 &= 3V_2 = 3V_1 (V_2 = V_3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{p_1}{V_1} &= \frac{p_2}{V_2} \\ \frac{p_1}{V_1} &= \frac{p_2}{3V_1} \\ p_2 &= 3p_1 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\text{линейн} \\ &\text{м.к. 1-2 - изотерм} \end{aligned} \right\} \text{зависимость } p \text{ от } V$$

Вычислим цикл:

1-2: $A_{12} = \frac{(p_1 + p_2)}{2} \cdot (V_3 - V_1) \cdot 3; A_{12} = \frac{(3p_1 + p_1)}{2} \cdot (3V_1 - V_1) = 4p_1 \cdot V_1$

2-3: $A_{23} = 0$, т.к. $\Delta V = 0$

3) $A_n = A_{12} - A_{31} = A_{12} - (A_{23} \cdot 3,64) = \frac{A_{12} \cdot 2,64}{3,64} = \frac{2,64}{3,64} A_{12}$ — $A_n = A$ т.к. полезная работа это $\Delta \text{стр. графика}$

4) $Q_{12} = Q_1 = A_{12} + \Delta U_{12}; Q_{23} = \Delta U_{23}; Q_{31} = A_{31}; Q_{12} > 0$
 $\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}; \Delta U_{23} = 0; Q_{23}, Q_{31} < 0$

Вычислим полезную работу:

$$A_n = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A_{12} + \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + A_{31} = A_{12} - A_{31} = A_{12} \cdot \frac{2,64}{3,64}$$

$$\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$$

$$\frac{3}{2} \nu R (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_3)$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_3 = p_3 V_2$$

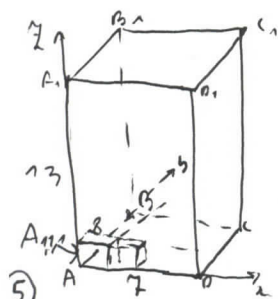
5) $Q_n = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} (3p_1 \cdot 3V_1 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} \cdot 8 p_1 V_1 = 42 p_1 V_1 = 3 \cdot A_{12}$$

$$\eta = \frac{A_n}{Q_n} = \frac{A_{12} \cdot \frac{2,64}{3,64}}{A_{12} + 3A_{12}} = \frac{2,64 A_{12}}{3,64 \cdot (A_{12} + 3A_{12})} = 0,18$$

Ответ: 0,18

✓ 6



Введём систему координат с началом в точке А. Тогда диагональ АС, заданная параметрами:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 8t \\ z = 12t \end{cases}, t \in [0; 1]$$

5)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-06

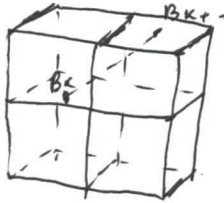
Введем икаты точки пересеч. $A_{n,m,k}$ с m -ыми $z=1, z=2, \dots, z=13$ (переходы из одного из кубов в другие), т.е. $t = \frac{1}{13}, \dots, \frac{12}{13}$

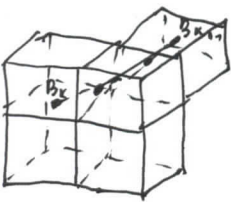
Трехмерный кубик

$A_{n,m,k}$ - это кубик, которому принадлежат точки (x, y, z) , где $x \in (n-1; n]$, $y \in (m-1; m]$, $z \in (k-1; k]$
 $n = 1, 2, \dots, 13$
 $m = 1, 2, \dots, 13$
 $k = 1, 2, \dots, 13$

Диагонали пересекают только ^{кубы} через ^(но не ребра) $m \cdot k$. $13, 8, 7$ - взаимно простые. При $t = \frac{k}{13}$ x_k и y_k всегда будут нецелыми

Возможны 3 перехода из кубика в кубик. Рассмотрим их (B_k - это ^{переход} ^{в соседний} ^{кубик} ^{из кубика} ^{матрицы} $z = n-6, z = n+7$)
1)  $B_k \in A_{n,m,k}, B_{k+1} \in A_{n,m,k+1} \Rightarrow$ имеют один пересеченный кубик отрезком $B_k B_{k+1}$

2)  $B_k \in A_{n,m,k}, B_{k+1} \in A_{n+1,m,k+1}$ или $B_{k+1} \in A_{n,m+1,k+1} \Rightarrow$ имеют пересечение $B_k B_{k+1}$ двух кубиков

3)  $B_k \in A_{n,m,k}, B_{k+1} \in A_{n+1,m+1,k+1} \Rightarrow B_k B_{k+1}$ пересекает 2 кубика

Построить таблицу и проанализируем пересечения для t от $\frac{1}{13}$ до $\frac{12}{13}$, т.е. ^{от 0 до 1} ^{или} ^{от 0 до 1} z будет аналогично кон-бу от $\frac{1}{13}$ до $\frac{12}{13}$ ^{ввиду инт-} ^{расположен кубик} ^{метрии параллелепипеда}

	z	t	x	y	номер кубика	кол-во пересечений
B_0	0	0	0	0		
B_1	1	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{13}$	$A_{1,1,1}$	1
B_2	2	$\frac{2}{13}$	$1 \frac{1}{13}$	$1 \frac{3}{13}$	$A_{2,2,2}$	3
B_3	3	$\frac{3}{13}$	$1 \frac{8}{13}$	$1 \frac{11}{13}$	$A_{2,2,3}$	1
B_4	4	$\frac{4}{13}$	$2 \frac{2}{13}$	$2 \frac{6}{13}$	$A_{3,3,4}$	3
B_5	5	$\frac{5}{13}$	$2 \frac{9}{13}$	$2 \frac{1}{13}$	$A_{3,4,5}$	2
B_6	6	$\frac{6}{13}$	$3 \frac{3}{13}$	$3 \frac{12}{13}$	$A_{4,4,6}$	2
B_7	7	$\frac{7}{13}$	$3 \frac{10}{13}$	$4 \frac{4}{13}$	$A_{4,5,7}$	2

$(1+3+1+3+2+2) \cdot 2 + 2 = 24 + 2 = 26$

Ответ: 26



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-06

№8

Дано:

$$D_p = -5 \text{ Дмтр}$$

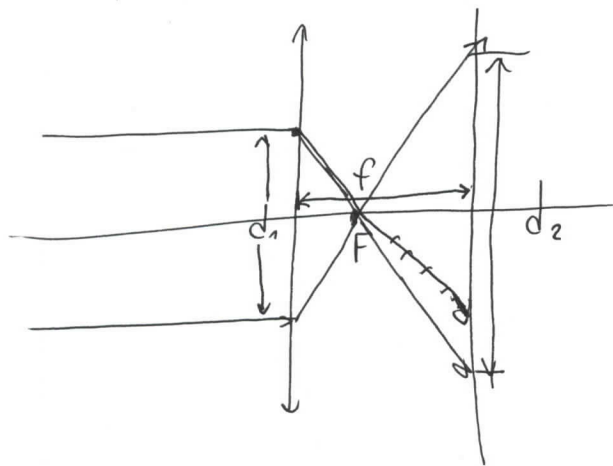
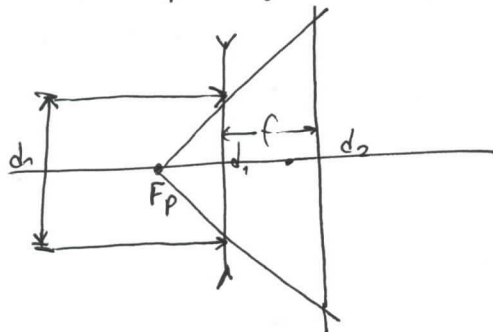
$$d_1 = 0,06 \text{ м} = 6 \text{ см}$$

$$d_2 = 0,12 \text{ м} = 12 \text{ см}$$

$D_c = ?$

Решение

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D_p} - \frac{1}{D_c} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{1}{0,05} - \frac{1}{D_c} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{1}{0,12} \Rightarrow f = 0,12 \text{ м}$$



Ответ: 15 Дмтр.

2) Из подобия треугольников на чертеже 1

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_p}{F_p + f} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20}{20 + f} = \frac{1}{2}$$

$$20 + f = 40$$

$$f = 20$$

$$3) \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_c}{f - F_c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{F_c}{20 - F_c} = \frac{1}{2}$$

$$20 - F_c = 2 F_c$$

$$F_c = \frac{20}{3} = 0,06 \text{ м}$$

$$4) D_c = \frac{1}{F_c} = \frac{1}{0,06} = 15 \text{ Дмтр}$$