



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-139

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	10	2	10	10	15	15	84

Вариант 2

$$\sqrt{2 - \log_3 x} - 3|2 \log_3 x - 5| \leq 7 \log_3 x - 3|2 \sqrt{2 - \log_3 x} - 5|$$

$$\sqrt{2 - \log_3 x} + 3|2 \sqrt{2 - \log_3 x} - 5| \leq 7 \log_3 x + 3|2 \log_3 x - 5|$$

$$f(\sqrt{2 - \log_3 x}) \leq f(\log_3 x), \text{ где } f(a) = 7a + 3|2a - 5|$$

$$f(a) = \begin{cases} 13a - 15, & \text{при } a \geq \frac{5}{2} \\ a + 15, & \text{при } a < \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{при мод. раскрытии модуля ф-ция возрастает}$$

Поэтому решения ~~уравнения~~ неравенства $\sqrt{2 - \log_3 x} \leq \log_3 x$ будут эквивалентны решению начального неравенства.

$$\log_3 x = a$$

$$\sqrt{2 - a} \leq a$$

$$\begin{cases} 2 - a \geq 0 \\ a \geq 0 \\ 2 - a \leq a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 2 \\ a \geq 0 \\ a^2 + a - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [1; 2] \Rightarrow \log_3 x \in [1; 2] \Rightarrow x \in [3; 9]$$

Ответ: $x \in [3; 9]$.

нужно найти вероятность при данных условиях (содержит клетку черного цвета переход без рукоятки сменой цвета), Рассмотрим пример квадрата 2×2 :

Пусть левая верхняя клетка будет либо белой, либо черной, тогда содержимое клетки обязательно серое (одно из условий задачи), тогда правая нижняя может быть также либо белой, либо черной. Возьмем вероятность раскраски для квадрата 2×2 : $P = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 2$. Мы умножили на 2, потому что можно влезть левую верхнюю клетку серой, но тогда множество (b/c) и (c) будет таким же. Исходя из этого, формула для вычисления такой вероятности будет равна $P = \frac{2 \cdot 2^n}{3^n}$, где n — количество клеток в фигуре.

дано, что прямоугольник $6 \times 14 \Rightarrow n = 84$, подставляем в формулу:

$$= \frac{2 \cdot 2^{\frac{84}{2}}}{3^{84}} = \frac{2^{43}}{3^{84}}$$

$$\text{Ответ: } P = \frac{2^{43}}{3^{84}}$$

№3 Известно, что $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$ принимает неотрицательные значения для всех x . Найти: мин. значение $4a+b$ **не доказ.**

Условие $f(x)$ принимает неотриц. значения для всех x , нужно, чтобы выполнялись условия $a > 0$; $D \leq 0$, тогда $D = (3a+1)^2 - 4ab \leq 0$

Пусть мин. значение $4a+b = t$, тогда $b = t - 4a$

Подставим b в дискриминант: $9a^2 + 6a + 1 - 4a(t - 4a) \leq 0$

$$25a^2 + 6a + 1 - 4at \leq 0$$

$$t \geq \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$$

Пусть $f(a) = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$ Найдем $f'(a)$ и найдем мин. значение:

$$f'(a) = \frac{(50a + 6) \cdot 4a - 4(25a^2 + 6a + 1)}{16a^2}$$

$$f'(a) = \frac{100a^2 - 4}{16a^2}$$

$$f'(a) = \frac{4(25a^2 - 1)}{16a^2} = \frac{(5a-1)(5a+1)}{4a^2}$$

$f'(x) \begin{matrix} - & 0 & + \\ & \downarrow & \nearrow \\ & \frac{1}{5} & \end{matrix} \rightarrow a \Rightarrow (\cdot)_{\min} = \frac{1}{5}$

При $a = \frac{1}{5} \Rightarrow t \geq \frac{1 + \frac{6}{5} + 1}{\frac{4}{5}}$

$$t \geq \frac{16.5}{5.4}$$

$b = ?$

$t \geq 4 \Rightarrow$ наименьшее значение $4a+b = 4$

Ответ: $4a+b = 4$ - мин. - ее значение.

№4. Дано:

параллелепипед $7 \times 8 \times 13$.

Найти:

K - количество
противополож. кубиков
имеющих по боковым сторонам

K можно посчитать так: у каждой из трех сторон, выходящих из 1 вершины, выберем **наибольший** делитель каждой пары сторон и прибавим **наибольший** делитель крайних трех сторон.

$$K = (a+b+c) - \text{НОД}(a,b) - \text{НОД}(a,c) - \text{НОД}(b,c) + \text{НОД}(a,b,c)$$

$$\text{НОД}(a,b) = 1$$

$$\text{НОД}(b,c) = 1$$

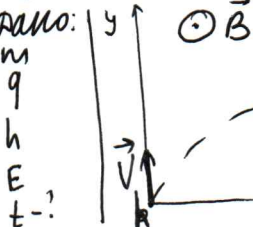
$$\text{НОД}(a,c) = 1$$

$$\text{НОД}(a,b,c) = 1$$

$$\rightarrow K = 7+8+13 - 1 - 1 - 1 + 1 = 26$$

Ответ: $K = 26$.

№5. Дано:



частица пролетела от h до h_1 будет равно времени периода, так движение происходит по окружности. (мы предположили, что частица не вылетит из области)

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{4} T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi R}{v} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi \cdot m \cdot \frac{mv}{qB}}{qB} = \frac{\pi m}{2qB}$$

В момент прохождения частицы h_1 под нее стала действовать сила со стороны эл. поля $F_2 = Eq \Rightarrow a = \frac{Eq}{m} \Rightarrow h_1 = \frac{qE^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h_1 m}{Eq}} = \sqrt{\frac{2mvm}{qEqB}}$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{EB}} = \frac{m}{q} \left(\frac{\pi}{2B} + \sqrt{\frac{2v}{EB}} \right)$$

Ответ: $t = \frac{m}{q} \left(\frac{\pi}{2B} + \sqrt{\frac{2v}{EB}} \right)$



№6
Дано:
 $C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$
 $R_1 = 20 \text{ Ом}$
 $R_2 = 100 \text{ Ом}$
 $R_3 = 40 \text{ Ом}$
 $R_4 = 30 \text{ Ом}$
 $U_0 = 420 \text{ В}$
q - ?

Через длительное время конденсатор зарядится и ток через него течь не будет.

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{420}{30} = 14 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{420}{70} = 6 \text{ А}$$

$$U_C = \varphi_M - \varphi_N$$

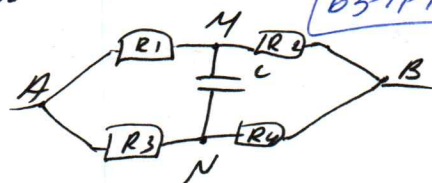
$$\varphi_M - \varphi_A = I_1 R_1 = 14 \cdot 20 = 280 \text{ В} \Rightarrow \varphi_M = 280 \text{ В} + \varphi_A$$

$$\varphi_N - \varphi_A = I_2 R_3 = 6 \cdot 40 = 240 \text{ В} \Rightarrow \varphi_N = \varphi_A + 240 \text{ В}$$

$$U_C = 280 + \varphi_A - \varphi_A - 240 = 40 \text{ В}$$

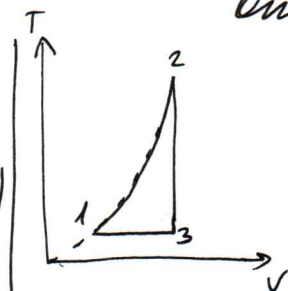
$$q = CU_C = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$$

Ответ: $q = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$.



11-17-247

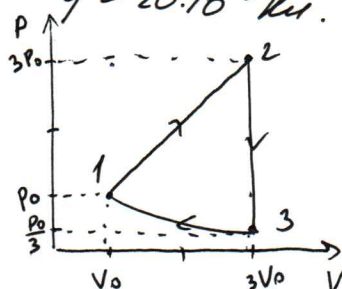
№7.
 $= KV^2$
 $= 3V_1$
 $|I| = 3,64 / A_{31}$
- ?



1-2: $PV = \nu RT$
 $PV = \nu R \Delta T$
 $P = \nu R \Delta T / V$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_2} \quad V_2 = V_3$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{3V_1} \Rightarrow P_2 = 3P_1$$



2-3: $V = \text{const}$
 $\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3}$

3-1: $T = \text{const}$
 $P_3 V_3 = P_1 V_1$
 $P_3 = \frac{P_1 V_1}{V_3}$
 $P_3 = \frac{P_1}{3}$

$$P_1 = P_0$$

$$V_1 = V_0$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_x|}{Q_n}, \quad |Q_x| = |Q_{23}| + |Q_{31}| \quad Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31}$$

$$Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23}$$

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2} (P_0 V_0 - 3P_0 V_0)$$

$$|Q_{23}| = 12 P_0 V_0 = 3 A_{12} = 3,64 A_{31}$$

$$|Q_x| = A_{31} + 3 \cdot 3,64 A_{31} = A_{31} (1 + 3 \cdot 3,64)$$

$$Q_n = A_{12} + \Delta U_{12}$$

$$A_{12} = \frac{P_0 + 3P_0}{2} \cdot 2V_0 = 4P_0 V_0 = 3,64 A_{31}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} (9P_0 V_0 - P_0 V_0) = \frac{3}{2} \cdot 8P_0 V_0 = 3 A_{12} = 3,64 A_{31}$$

$$Q_n = 3,64 A_{31} + 3,64 A_{31} = 7,28 A_{31}$$

$$\eta = 1 - \frac{A_{31} (1 + 3 \cdot 3,64)}{7,28 A_{31}}$$

$$= 1 - \frac{1192}{1456} = \frac{1456 - 1192}{1456} = \frac{264}{1456} = 0,181 \text{ или } \eta = 18,1\%$$

Ответ: $\eta = 18,1\%$.

N8.
 $D_p = -5 \text{ диоп}$ | $D_p = \frac{1}{F_1} \Rightarrow F_1 = -\frac{1}{5} = -0,2 \text{ м} = -20 \text{ см}$
 $d_1 = 6 \text{ см}$
 $d_2 = 12 \text{ см}$
 $D_c = ?$

из подобия Δ вышло:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{|F_1|}{|F_1| + OA}$$

$$\frac{6}{12} = \frac{|F_1|}{|F_1| + OA} \Rightarrow OA = 2|F_1| - |F_1|$$

$$OA = |F_1| = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

Но условие задачи не выполнено $\Rightarrow$:
из подобия Δ :

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{|F_2|}{OA - |F_2|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|F_2|}{OA - |F_2|} \Rightarrow 2F_2 = OA - F_2$$

$$3F_2 = OA$$

$$F_2 = \frac{0,2}{3}$$

$$D_c = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{\frac{0,2}{3}} = \frac{3 \cdot 0,5}{0,2} = 15 \text{ диоп}$$

Ответ: $D_c = 15 \text{ диоп}$.

