

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-10-265

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	10	13	5	10	10	15	15	90

ХМ

Вариант 1 (I)

№6

Дано:

$$\eta = 0,4$$

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$t_0 = 0^\circ \text{C}$$

$$C = 150 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$$

$$\lambda = 330 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$$

Найти:

$$\Delta t = ?$$

Решение:

Обратный цикл тепловой машины.

$$\eta = \frac{|Q_H| - |Q_X|}{|Q_H|}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_X|}{|Q_H|}$$

$$|Q_X| = m\lambda$$

$$|Q_H| = C \cdot \Delta t$$

$$\eta = 1 - \frac{m\lambda}{C\Delta t}$$

$$1 - \eta = \frac{m\lambda}{C\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{m\lambda}{C(1-\eta)}$$

$$\Delta t = \frac{2 \text{ кг} \cdot 330 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}}{150 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}} \cdot (1 - 0,4)} = 7 \frac{1}{3} \approx 7,33^\circ \text{C}$$

Ответ: $\Delta t \approx 7,33^\circ \text{C}$

№7

Дано:

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$l = 1,5 \text{ м}$$

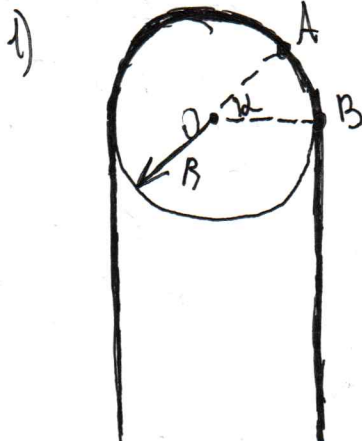
$$\angle AOB = \alpha = 45^\circ$$

$$R = 0,08 \text{ м}$$

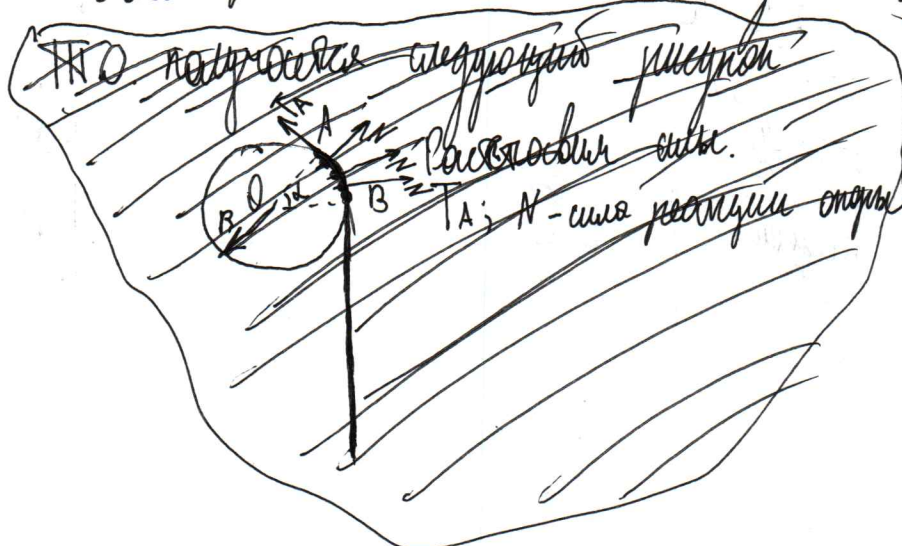
Найти:

$$T_A = ?$$

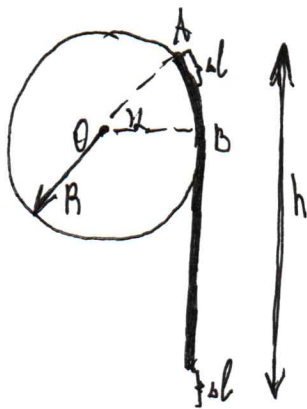
Решение:



Представим, что мы разрезаем канат в точке A и привяжем его конец закреплённый в точке A, при этом сила натяжения в точке A не уменьшится.



П.О. рисунок выглядит следующим образом.



Вспользуемся методом виртуальных перемещений и сделаем попят на Δl вниз.

при этом $A=0$ (т.к. $A \rightarrow E$, а перемещение мы считаем отрицательным)

$$A = A_T + A_N + A_{mg} = 0$$

$$A_T = -T \cos \alpha$$

$$A_N = 0 \text{ (т.к. } N \perp \text{ перемещению)}$$

$$A_{mg} = \frac{\Delta l}{l} \cdot m \cdot g \cdot h$$

Получа

$$\frac{\Delta l}{l} m g h = \Delta l T_A$$

$$T_A = \frac{m g h}{l}$$

где ~~_____~~

$$h = \frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} + R \sin \alpha$$

$$T_A = \frac{m g}{l} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} + R \sin \alpha \right)$$

✓

$$T_A = \frac{2 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{1,5 \text{ м}} \cdot \left(\frac{1,5 \text{ м}}{2} - \frac{3,14 \cdot 0,08 \text{ м}}{2} + 0,08 \text{ м} \cdot \sin 45^\circ \right) = 9,23 \text{ Н.}$$

Ответ: $T_A = 9,23 \text{ Н}$

№5. Дано:

$$S = 20 \text{ м}$$

$$H = 3 \text{ м}$$

$$h = 2,15 \text{ м}$$

$$d = 0,35 \text{ м}$$

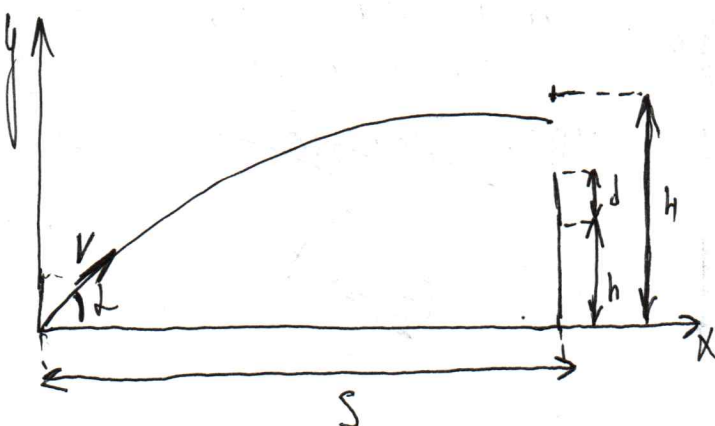
$$v = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$v = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Найти:

$$L = ?$$

Решение:



$$\begin{cases} d+h \leq y \leq H \\ y = v \sin \alpha t - \frac{g t^2}{2} \\ S = v \cos \alpha t \Rightarrow t = \frac{S}{v \cos \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d+h \leq y \leq H \\ y = S \tan \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{S^2}{v^2 \cos^2 \alpha} \end{cases}$$

$$d+h \leq S \tan \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{S^2}{v^2 \cos^2 \alpha} \leq H$$

→

$$d+H \leq S \tan \alpha - \frac{q}{2} \cdot \frac{S^2}{v^2 \cos^2 \alpha} \leq H$$

$$2,5 \leq 20 \tan \alpha - 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \leq 3$$

$$2,5 \leq 20 \tan \alpha - 5 - 5 \tan^2 \alpha \leq 3$$

10-21-247
63-10-265

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\begin{cases} 5 \tan^2 \alpha + 5 - 10 \tan \alpha \leq -2,5 & (1) \\ 5 \tan^2 \alpha - 20 \tan \alpha + 5 \geq -3 & (2) \end{cases}$$

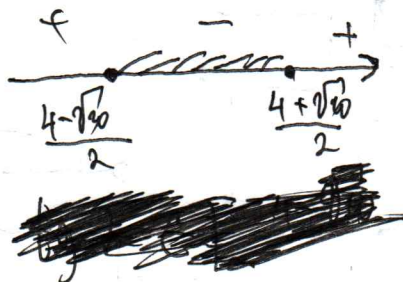
$$(1): 5 \tan^2 \alpha - 20 \tan \alpha + 5 \leq -2,5$$

$$2 \tan^2 \alpha - 8 \tan \alpha + 3 \leq 0$$

$$\frac{D}{4} = 16 - 6 = 10$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$$



$$\frac{4 - \sqrt{10}}{2} \leq \tan \alpha \leq \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$$

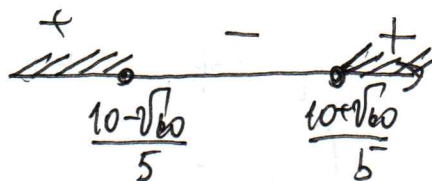
$$22,73^\circ \leq \alpha \leq 74,4^\circ$$

$$(2): 5 \tan^2 \alpha - 20 \tan \alpha + 8 \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = 100 - 40 = 60$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{10 - \sqrt{60}}{5}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{10 + \sqrt{60}}{5}$$

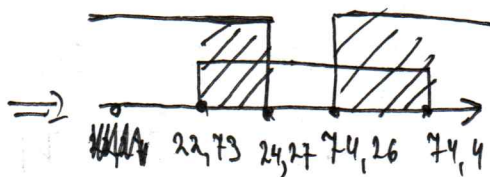


$$\begin{cases} \frac{10 - \sqrt{60}}{5} \leq \tan \alpha \\ \tan \alpha \leq \frac{10 + \sqrt{60}}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24,27^\circ \leq \alpha \\ \alpha \leq 74,26^\circ \end{cases}$$

Н.О.

$$\begin{cases} 22,73^\circ \leq \alpha \leq 74,4^\circ \\ 24,27^\circ \leq \alpha \\ \alpha \leq 74,26^\circ \end{cases}$$



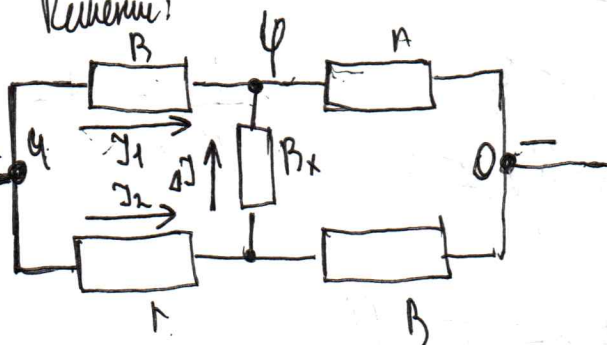
$$\text{Answer: } \begin{cases} 22,73^\circ \leq \alpha \leq 24,27^\circ \\ 74,26^\circ \leq \alpha \leq 74,4^\circ \end{cases}$$



№8.

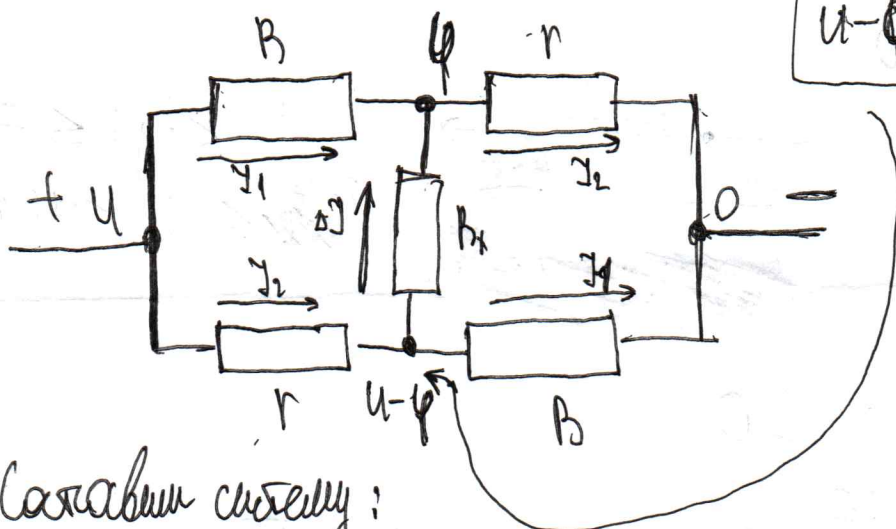
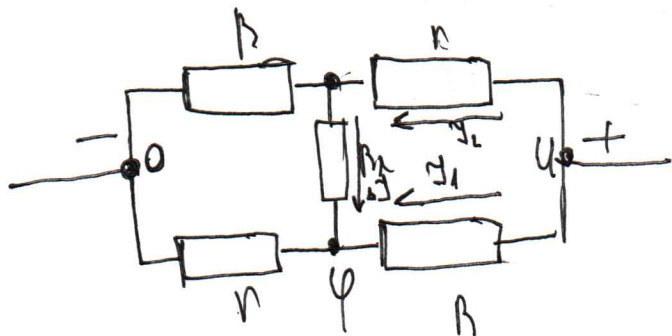
Дано:
 $B = 4,5 \text{ Ом}$
 $r = 2 \text{ Ом}$
 $B_0 = B_x$
 Найти:
 B_x ?

Решение:



В силу симметрии
 через резистор B всегда течет
 ток I , через резистор r
 - течет ток I_2

B_0 - общее сопротивление цепи
 $B_0 = B_x$ (по условию)



$$U - \varphi = B I_1$$

Составим систему:

$$\begin{cases} B_0 = \frac{U}{I_1 + I_2} \\ I_1 = \frac{U - \varphi}{B} \\ I_2 = \frac{U - (U - \varphi)}{r} \\ \Delta I = \frac{(U - \varphi) - \varphi}{B_x} \\ \Delta I = I_2 - I_1 \end{cases}$$

$$B_0 = B_x; B = 4,5 \text{ Ом}; r = 2 \text{ Ом}$$

$$\begin{cases} B_x = \frac{U}{I_1 + I_2} & (1) \\ I_1 = \frac{U - \varphi}{4,5} & (2) \\ I_2 = \frac{\varphi}{2} & (3) \\ \Delta I = \frac{U - 2\varphi}{B_x} & (4) \\ \Delta I = I_2 - I_1 & (5) \end{cases}$$





10-21-247
63-10-265

Решим эту систему:

$$(4): B_x = \frac{u - 2\varphi}{\Delta y}$$

$$(5): \Delta y \Delta = y_2 - y_1$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{u - 2\varphi}{y_2 - y_1}$$

$$B_x = \frac{u - 2\varphi}{y_2 - y_1}$$

$$(1): B_x = \frac{u}{y_1 + y_2}$$

$$\Rightarrow \frac{u - 2\varphi}{y_2 - y_1} = \frac{u}{y_1 + y_2}$$

$$(u - 2\varphi)(y_1 + y_2) = u(y_2 - y_1)$$

$$(2): y_1 = \frac{u - \varphi}{4,5} \quad (3): y_2 = \frac{\varphi}{2}$$

$$(u - 2\varphi) \left(\frac{u - \varphi}{4,5} + \frac{\varphi}{2} \right) = u \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{u - \varphi}{4,5} \right)$$

$$(u - 2\varphi) \left(\frac{2u - 2\varphi + 4,5\varphi}{9} \right) = u \left(\frac{4,5\varphi - 2u + 2\varphi}{9} \right) \quad | \cdot 9$$

$$(u - 2\varphi)(2u + 2,5\varphi) = u(6,5\varphi - 2u)$$

$$2u^2 + 2,5\varphi u - 4\varphi u - 5\varphi^2 = 6,5\varphi u - 2u^2$$

$$4u^2 = 5\varphi^2 + 8\varphi u \quad | : u^2$$

$$4 = 5\left(\frac{\varphi}{u}\right)^2 + 8\left(\frac{\varphi}{u}\right)$$

$$\text{Замени: } \frac{\varphi}{u} = t.$$

$$4 = 5t^2 + 8t$$

$$5t^2 + 8t - 4 = 0$$

$$D = \frac{8}{4} = 16 + 20 = 36$$

$$t_1 = \frac{-4 - 6}{5} < 0 \text{ (не подходит по условию)}$$

$$t_2 = \frac{-4 + 6}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\varphi}{u} = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{\varphi = 0,44} (*)$$

$$(1): B_x = \frac{4}{y_1 + y_2}$$

$$(2): y_1 = \frac{4-\varphi}{4,5}$$

$$(3): y_2 = \frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{4}{\frac{4-\varphi}{4,5} + \frac{\varphi}{2}}$$

$$B_x = \frac{94}{24 - 24 + 4,5\varphi}$$

$$B_x = \frac{94}{24 + 2,5\varphi}$$

$$B_x = \frac{94}{24 + 2,5 \cdot 0,44}$$

$$B_x = \frac{94}{24 + 1}$$

$$B_x = 3 \text{ Am}$$

$$(*) : \varphi = 0,44$$

Orter: $B_x = 3 \text{ Am}$

$$1/3 \quad a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} = 1 \\ b + \frac{1}{c} = 4 \\ c + \frac{1}{d} = 1 \\ d + \frac{1}{a} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - \frac{1}{b} \quad (1) \\ b = 4 - \frac{1}{c} \quad (2) \\ c = 1 - \frac{1}{d} \quad (3) \\ d = 4 - \frac{1}{a} \quad (4) \end{cases}$$

1) Replacement (1) b (4)

$$d = 4 - \frac{1}{a} = 4 - \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} = 4 - \frac{b}{b-1}$$



$$2) \begin{cases} d = 4 - \frac{b}{b-1} \\ (2): b = 4 - \frac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow d = 4 - \frac{4 - \frac{1}{c}}{3 - \frac{1}{c}} = 4 - \frac{4c-1}{3c-1}$$

$$3) \begin{cases} d = 4 - \frac{4c-1}{3c-1} \\ (3): c = 1 - \frac{1}{d} \end{cases} \Rightarrow d = 4 - \frac{4 - \frac{1}{d} - 1}{3 - \frac{3}{d} - 1} = 4 - \frac{3d-4}{2d-3}$$

$$4) \begin{aligned} d &= 4 - \frac{3d-4}{2d-3} \quad | \cdot 2d-3 \\ 2d^2 - 3d &= 8d - 12 - 3d + 4 \\ 2d^2 - 8d + 8 &= 0 \\ d^2 - 4d + 4 &= 0 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

$$5) \begin{aligned} d &= 2 \\ c &= 1 - \frac{1}{d} = \frac{1}{2} \\ b &= 4 - \frac{1}{c} = 2 \\ a &= 1 - \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Orter: $a = \frac{1}{2}$
 $b = 2$
 $c = \frac{1}{2}$
 $d = 2$



10-21-247

63-10-265

№2

$a_n = a_{n-1} + d$ — Определение арифметической прогрессии.

Значит, такой порядок?

AB, BC, AC и D (уши) — последовательные члены ариф. прогрессии.

Пусть тогда $AB = a$; $BC = a + d$; $AC = a + 2d$; $D = a + 3d$

По условию $\begin{cases} D = 6 \\ D = a + 3d \end{cases} \Rightarrow a + 3d = 6$ (*) Найти: P ?

P — периметр

P — периметр

$$P = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{3a + 3d}{2} = \frac{2a + (a + 3d)}{2} = \frac{2a + 6}{2} = a + 3$$

$$P = a + 3$$

$$S = \sqrt{P(P-AB)(P-BC)(P-AC)}$$
 — формула Герона

$$S = \sqrt{(a+3) \cdot (a+3-a) \cdot (a+3-a-d) \cdot (a+3-a-2d)}$$

$$S = \sqrt{(a+3) \cdot 3 \cdot (3-d) \cdot (3-2d)}$$

Далее $S = P \cdot \frac{P}{2} = (a+3) \cdot 3$

Приравняем $S = S$

$$3(a+3) = \sqrt{3(a+3)(3-d)(3-2d)}$$

$$9(a+3)^2 = 3(a+3)(3-d)(3-2d)$$

$$3(a+3) = (3-d)(3-2d)$$

$$3a + 9 = 9 - 6d - 3d + 2d^2$$

$$2d^2 - 9d - 3a = 0$$

$$2d^2 - 9d + 3a = 0$$

$$2d^2 - 3(a + 3d) = 0 \quad (*) : a + 3d = 6.$$

$$2d^2 - 3 \cdot 6 = 0$$

$$2d^2 = 18$$

$$d^2 = 9$$

$$d = -3 \quad \text{или} \quad d = 3$$

$$(*) : a + 3d = 6.$$

$$a - 9 = 6$$

$$a = 15$$

$$(*) : a + 3d = 6.$$

$$a + 9 = 6$$

$$a = -3 \quad (\text{не подходит по условию})$$

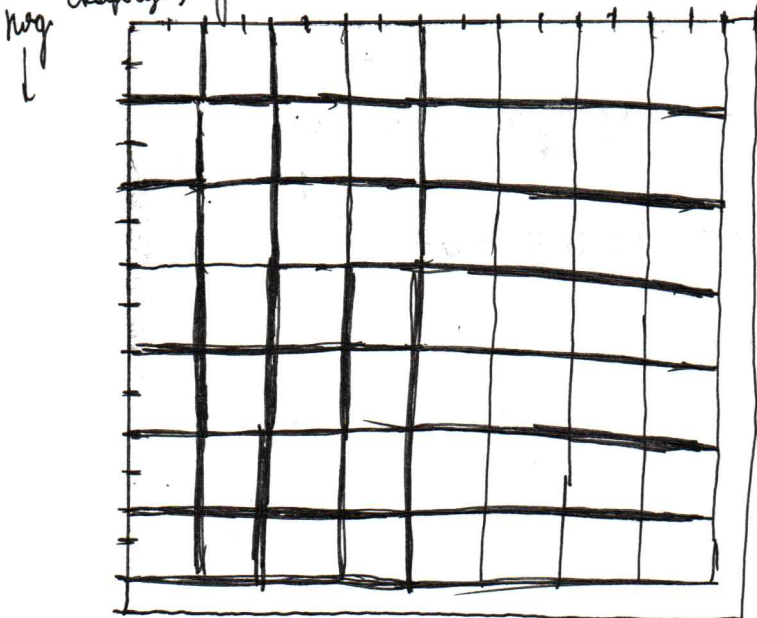
$$P = 2p = 2 \cdot (a + 3) = 2 \cdot 18 = 36$$

Ответ: 36.

14.

Квадраты 2×2

Прямоугольник 25×27



Будем располагать квадраты
следующим образом:

1 слой: первый квадрат расположим
в левом верхнем углу, остав-
шиеся квадраты будем располагать
вдоль и друг напротив друга

т.е. 25 и 27 — четные числа
по ширине и высоте будет один
ряд из входов и выходов.

Всего рядов квадратов в ширину
будет $\frac{25-1}{2} = 12$, а столбцов
будет $\frac{27-1}{2} = 13$

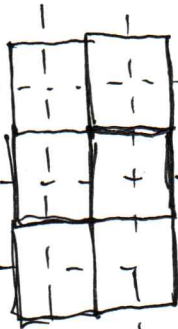
т.е. в первом слое будет
 $12 \cdot 13$ квадратов.





10-21-247
63-10-265

Во 2-ом слое будем располагать квадраты
следующим образом.



--- " - границы квадратов первого слоя
--- " - границы квадратов второго слоя.

П.О. во втором слое будет столько же
квадратов как и в первом, но ~~рядом~~ ^{пустой} ряд из
квадратов будет слева и справа.

П.О. во втором слое будет 12-13 квадратов

Всего будет $(12-13) + (12-13) = 2 \cdot 12 \cdot 13 = 312$ ±
Ответ: 312 Почему минус?

н/д

$$9\sqrt{8-7x} - 2|4x-7| \leq 9x - 2|4\sqrt{8-7x} - 7|$$

ОДЗ: $8-7x \geq 0$

$$x \leq \frac{8}{7}$$

$$\left[\begin{array}{l} 9\sqrt{8-7x} - 8x + 14 \leq 9x - 8\sqrt{8-7x} + 14; \quad 4x-7 \geq 0; \quad 4\sqrt{8-7x} - 7 \geq 0 \\ 9\sqrt{8-7x} + 8x - 14 \leq 9x - 8\sqrt{8-7x} + 14; \quad 4x-7 \leq 0; \quad 4\sqrt{8-7x} - 7 \geq 0 \\ 9\sqrt{8-7x} - 8x + 14 \leq 9x + 8\sqrt{8-7x} - 14; \quad 4x-7 \geq 0; \quad 4\sqrt{8-7x} - 7 \leq 0 \\ 9\sqrt{8-7x} + 8x - 14 \leq 9x + 8\sqrt{8-7x} - 14; \quad 4x-7 \leq 0; \quad 4\sqrt{8-7x} - 7 \leq 0 \end{array} \right.$$

1) $4x-7 \geq 0$
 $x = \frac{7}{4}$

2) $4\sqrt{8-7x} - 7 = 0$
 $8-7x = \frac{49}{16}$
 $4x = \frac{79}{16}$
 $x = \frac{79}{64}$

$$\begin{aligned}
 & 9\sqrt{8-7x} - 8x + 14 \leq 9x - 8\sqrt{8-7x} + 14; \quad x \geq \frac{7}{4}; \quad x \leq \frac{79}{112} \Rightarrow \emptyset \\
 & 9\sqrt{8-7x} + 8x - 14 \leq 9x - 8\sqrt{8-7x} + 14; \quad x \leq \frac{7}{4}; \quad x \leq \frac{79}{112}; \text{Op3: } x \leq \frac{79}{112} \\
 & 9\sqrt{8-7x} - 8x + 14 \leq 9x + 8\sqrt{8-7x} - 14; \quad x \geq \frac{7}{4}; \quad x \geq \frac{79}{112}; \text{Op3: } x \geq \frac{79}{112} \Rightarrow \emptyset \\
 & 9\sqrt{8-7x} + 8x - 14 \leq 9x + 8\sqrt{8-7x} - 14; \quad x \leq \frac{7}{4}; \quad x \geq \frac{79}{112}; \text{Op3: } x \leq \frac{79}{112}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 9\sqrt{8-7x} + 8x - 14 \leq 9x - 8\sqrt{8-7x} + 14; \quad x \leq \frac{79}{112} \quad (1) \\
 & 9\sqrt{8-7x} + 8x - 14 \leq 9x + 8\sqrt{8-7x} - 14; \quad \frac{79}{112} \leq x \leq \frac{8}{7} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$(1): 9\sqrt{8-7x} + 8x - 14 \leq 9x - 8\sqrt{8-7x} + 14; \quad x \leq \frac{79}{112}$$

$$17\sqrt{8-7x} \leq x + 28 \quad \xrightarrow{x+28 \geq 0} \quad x + 28 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -28}$$

$$289(8-7x) \leq x^2 + 56x + 784$$

$$2312 - 2023x \leq x^2 + 56x + 784$$

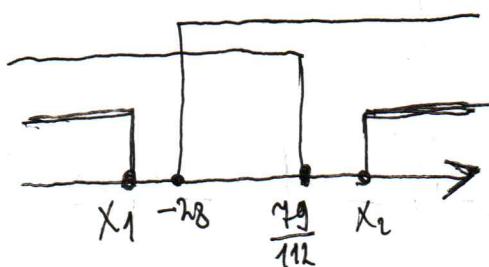
$$x^2 + 2079x - 1528 \geq 0$$

$$D = 2079^2 + 6112$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{2079^2 + 6112}$$

$$x_1 = \frac{-2079 - \sqrt{2079^2 + 6112}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2079 + \sqrt{2079^2 + 6112}}{2}$$



$\Rightarrow \emptyset$

(+)

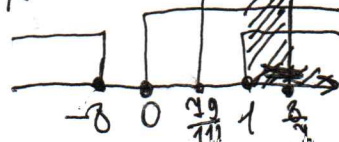
$$(2): 9\sqrt{8-7x} + 8x - 14 \leq 9x + 8\sqrt{8-7x} - 14; \quad \frac{79}{112} \leq x \leq \frac{8}{7}$$

$$\sqrt{8-7x} \leq x \quad \boxed{x \geq 0}$$

$$8-7x \leq x^2$$

$$x^2 + 7x - 8 \geq 0$$

$$x = 1 \quad x = -8$$



$$\Rightarrow x \in [1; \frac{8}{7}]$$

$$\text{Order: } x \in [1; \frac{8}{7}]$$