

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-141

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	9	3	10	10	5	15	65

Вариант 1

с1

$$9\sqrt{2-\log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7|$$

Пусть $\sqrt{2-\log_2 x} = u$
 $\log_2 x = v$

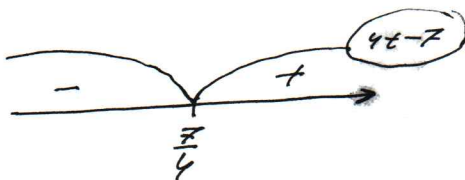
(1.1.) Составим ор-цию $f(t) = 9t - 2|4t - 7|$

$$9u - 2|4u - 7| \leq 9v - 2|4v - 7|$$

Рассмотрим ор-цию $f(t) = 9t - 2|4t - 7|$ на промежутках

$$4t - 7 = 0$$

$$t = \frac{7}{4}$$



1 сл: $t < \frac{7}{4}$:

$$f(t) = 9t + 2(4t - 7)$$

$$f(t) = 9t + 8t - 14$$

$$f(t) = 17t - 14$$

2 сл: $t > \frac{7}{4}$:

$$f(t) = 9t - 2(4t - 7)$$

$$f(t) = 9t - 8t + 14$$

$$f(t) = t + 14$$



(3) Проверим $t = \frac{7}{4}$

$$\frac{17 \cdot 7}{4} - 14 = \frac{63}{4}$$

$$\frac{7}{4} + 14 = \frac{63}{4}$$

почему?

Ф-ция $f(t)$ является монотонно возрастающей на всей числовой осн $\Rightarrow f(u) \leq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$

5. $\sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x$

$$\begin{cases} x > 0 & (1) \\ 2 - \log_2 x > 0 & (2) \\ \log_2 x > 0 & (3) \\ 2 - \log_2 x \leq \log_2^2 x & (4) \end{cases}$$

$$(2) 2 - \log_2 x > 0$$

$$\log_2 x \leq 2$$

$$\log_2 x \leq \log_2 4$$

$$\boxed{x \leq 4}$$

$$(3) \log_2 x \geq 0$$

$$\log_2 x \geq \log_2 1$$

$$\boxed{x \geq 1}$$

$$(4) 2 - \log_2 x \leq \log_2^2 x$$

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geq 0$$

$$\text{замена: } \log_2 x = z$$

$$z^2 + z - 2 \geq 0$$

$$z_1 = -2$$

$$z_2 = 1$$

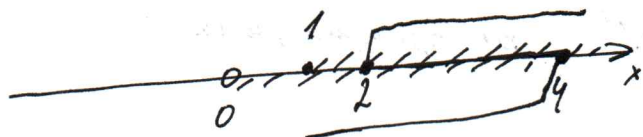


обратн: $\log_2 x \leq -2$ - противореч.
чел. (3)

$$\log_2 x \geq 1$$

$$\log_2 x \geq \log_2 2$$

$$\boxed{x \geq 2}$$



$$x \in [2; 4]$$

Ответ: $x \in [2; 4]$

§3 (начало)

$$f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$$

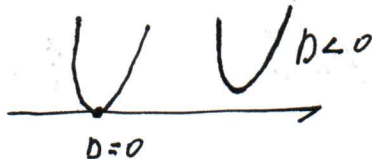
$$2a + b + 1 = ?$$

$$\text{пред: } 2a + b + 1 = c$$

$$b = c - 2a - 1$$

1. Если $f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$ принимает неотр знак. для всех x , то график может быть расположен только

такими образом



$$\Rightarrow a > 0$$

2. Рассмотрим $f(x)$ при $a = 0$

$f(x) = x + b$ - данная функция может принимать как положительные, так и отрицательные значения. $\Rightarrow a \neq 0$.

Таким образом, рассмотрим $a > 0$

$ax^2 + (a+1)x + b = 0$ {N3 (ирогол жемис)}
 $b = (a+1)^2 - 4 \cdot a \cdot b$ 63-11-141
 $b = (a+1)^2 - 4a \cdot (c - 2a - 1) = a^2 + 2a + 1 - 4ac + 8a^2 + 4a =$
 $= 9a^2 + 6a + 1 - 4ac \leq 0$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4ac \leq 0$$

$$4ac \geq 9a^2 + 6a + 1 \quad | : 4a > 0$$

$$c \geq \frac{9a}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4a}$$

4. Рассмотрим ф-цию $F(a) = \frac{9a}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4a}$

Для нахождения наименьшего знач. ~~возьмем~~ дифференцируем данную функцию

$$F'(a) = \frac{9}{4} - \frac{1}{4a^2}$$

Для нахождения точки экстримума приравняем производную к 0

$$F'(a) = 0$$

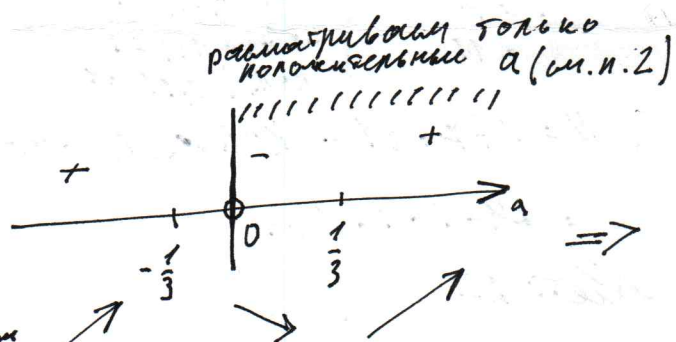
$$\frac{9}{4} - \frac{1}{4a^2} = 0$$

$$\frac{9a^2 - 1}{4a^2} = 0$$

$$9a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{9}$$

$$a = \pm \frac{1}{3}$$



наименьшее значение ор-ции $F(a) = \frac{9a}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4a}$ достигается в точке $\frac{1}{3}$

5. Найдем значение ор-ции в данной (см. п. 4) точке:

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}$$

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{12}{4}$$

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 3$$

$\Rightarrow$ ~~наименьш.~~ наименьш. значение $c = 2a + b + 1$

Ответ: 3

$b = ?$

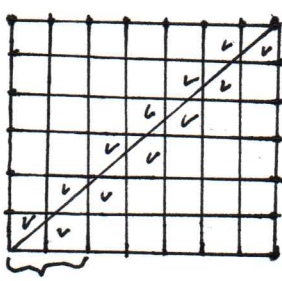
это только
ошибка!

нет уверен

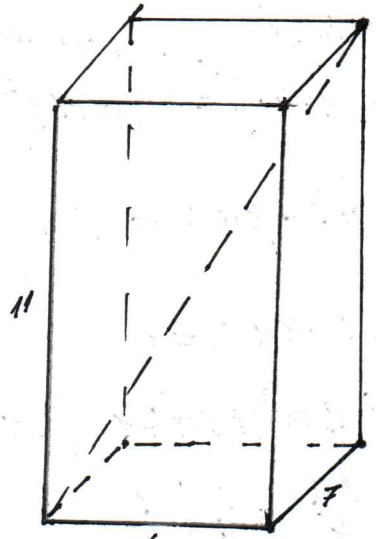


I способ:

1. Рассмотрим пропущенно диагонали на нижний ряд кубиков



V - кубики, пересеченные диагональю



заметьте, что на каждом ряду диагональ "пропущено" по 2 кубика = кол-во пропущенных кубиков = 2 · кол-во рядов = 2 · 11 = 22

II способ: применим формулы для нахождения кол-ва пропущенных единичных кубиков в трехмерном пространстве:

$$N = a + b + c - \text{НОД}(a, b) - \text{НОД}(b, c) - \text{НОД}(a, c) + \text{НОД}(a, b, c) = 22$$

↑
наибольш. общий делитель

a, b, c - длины сторон = 7

$$\begin{aligned} a &= 6 & \text{НОД}(6, 7) &= 1 \\ b &= 7 & \text{НОД}(7, 11) &= 1 \\ c &= 11 & \text{НОД}(6, 11) &= 1 \\ & & \text{НОД}(6, 7, 11) &= 1 \end{aligned}$$



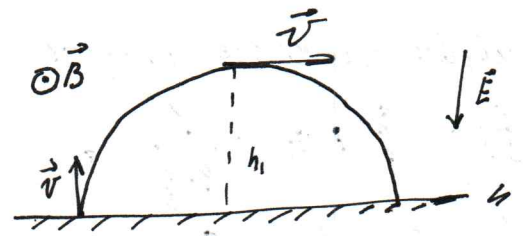
$$\begin{aligned} N &= 6 + 7 + 11 - \text{НОД}(6, 7) - \text{НОД}(7, 11) - \text{НОД}(6, 11) + \text{НОД}(6, 7, 11) = \\ &= 24 - 1 - 1 - 1 + 1 = 22 \end{aligned}$$

Ответ: 22

55 (начало)

Дано:
 $m, q, h, B, E,$
 $t = ?$

Решение:
1. $F_L = q v B \cdot \sin \alpha = q v B$
по II 3. Н: $F_L = m a$
частица движется по окружности =
 $a = a_y = \frac{v^2}{R}$
 $F_L = \frac{m v^2}{R} = q v B \quad R = \frac{m v^2}{q v B} = \frac{m v}{q B}$
2. $h_1 = R$
3. $T = \frac{2 \pi R}{v}$



$b_1 = \frac{1}{q} T$, т.к. частица движется по окружности 1 наименьш. точке колеба $\vec{v}$ направлен горизонтально и частица "прошла" четверть окружности

$$4. t_1 = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi R}{2v}$$

5. Подставим в п. 4 формулы R из п. 1

$$t_1 = \frac{\pi}{2v} \cdot \frac{m v}{2qB} = \frac{\pi m}{2qB} = \frac{\pi m}{2qB}$$

в эл. поле:

$$1. h = \frac{at_2^2}{2}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$2. F = ma$$

$$F = qE$$

$$qE = ma$$

$$a = \frac{qE}{m}$$

3. Подставим формулу ускорения из п. 2 в формулу времени из п. 1

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h \cdot m}{qE}}$$

4. Из I из п. 1 и 2 $h = R = \frac{mv}{2B}$, подставим в формулу из п. 3

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{mv}{2B} \cdot m}{qE}} = \sqrt{\frac{2m^2 v}{q^2 B E}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

$$5. t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

У6

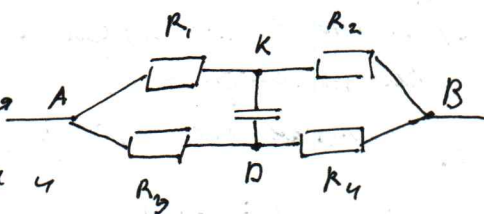
Дано:
 $C = 100 \cdot 10^{-6} \text{ ф}$
 $R_1 = 10 \text{ Ом}$
 $R_2 = 20 \text{ Ом}$
 $R_3 = 30 \text{ Ом}$
 $R_4 = 40 \text{ Ом}$
 $U_0 = 210 \text{ В}$
 $Q = ?$

Решение:

1. Спиря достаточно большое время после подсоединения источника конденсатор полностью зарядится и ток через него идти не будет

2. Запишем закон Ома для чч. цепи $I = \frac{U}{R}$
 3. Р-ним верхнюю часть цепи; по закону Ома:
 $I_{12} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{210}{10 + 20} = \frac{210}{30} = 7 \text{ А}$

Р-нк. соединение последовательное



4. Р-ный нитеный участок цепи; по закону Ома:

$$\bar{I}_{34} = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{210}{30 + 40} = \frac{210}{70} = 3 \text{ A}$$

т.к. соединения последовательное

5. Рассмотрим разность потенциалов на участке А-К; по закону Ома $U = \Delta\varphi = \bar{I}R$
 (1) $\varphi_A - \varphi_K = \bar{I}_{12} \cdot R_1 = 7 \cdot 10 = 70 \text{ В}$
 (здесь уч. зем)

6. Р-ный разность потенциалов на участке АД; по закону Ома для участка цепи $U = \Delta\varphi = \bar{I}R$

$$(2) \varphi_A - \varphi_D = \bar{I}_{34} \cdot R_3 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ В}$$

7. Вычтем из ур-я (2) - (1):

$$\varphi_A - \varphi_D - (\varphi_A - \varphi_K) = \varphi_A - \varphi_D - \varphi_A + \varphi_K = \varphi_K - \varphi_D = 90 - 70 = 20 \text{ В}$$

$$\varphi_K - \varphi_D = 20 \text{ В}$$

8. Запишем формулу емкости конденсатора, и выразим заряд:
 $C = \frac{q}{U}$ $q = CU$, где U - напряжение на конденсаторе, равное

$$\varphi_K - \varphi_D = 20 \text{ В}$$

$$9. q = CU = C(\varphi_K - \varphi_D) = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 4000 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$$

ответ: $4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$

88 (начало)

Дано:

Решение

$$D_p = -4 \text{ Дптр}$$

$$1) F_p - \frac{1}{D} = \frac{1}{-4} = -0,25 \text{ м}$$

$$d_1 = 5 \text{ см}$$

$$|F_p| = 0,25 \text{ м} = 25 \text{ см} = F_1$$

$$d_2 = 20 \text{ см}$$

$$D_c = ?$$

2) Построим ход лучей в рассеивающей линзе (рисунок 1)

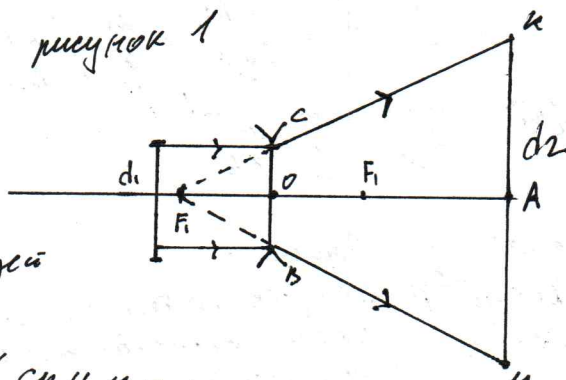
3) Заметим, что $\angle F_1CB \sim \angle F_1KM$ ($CB \parallel KM$ по усл; $\angle F_1$ - общий) $\Rightarrow$

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{|F_1| + OA}{|F_1|} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow 4|F_1| = |F_1| + OA \quad 3|F_1| = OA \Rightarrow$$

$$OA = 3 \cdot 25 = 75 \text{ см}$$

4) построим ход лучей в собирающей линзе (рисунок 2)

рисунок 1



11-19-24 T
163-11-141
(приложение 2)

A ray diagram for a converging lens. An object AB is placed between the lens and its focal point F₁. The image A'B' is formed on the opposite side of the lens, beyond the focal point F₂. The image is real, inverted, and magnified. The diagram shows three principal rays: a ray parallel to the principal axis that refracts through F₂, a ray through the optical center O that continues straight, and a ray through F₁ that refracts parallel to the axis. The intersection of these rays forms the image A'B'.

лист 4

Дано:

$$T = kV^2$$

$$2-3: V = \text{const}$$

$$3-1: T = \text{const}$$

$$V_2 = V_3 = 2V_1$$

$$A_{12} = 2,16 A_{31}$$

 $\eta = ?$

Решение:

$$\eta = \frac{A}{Q_H}$$

1) Запишем ур-е переноса-краспейрона для проз. 12:

$$pV = \nu R T$$

$$pV = \nu R k V^2$$

$$p = k \nu R V$$

2) Р-мн процесс 1-3:

$$V_3 = 2V_1 \quad T = \text{const} \quad \Rightarrow p_1 V_1 = p_3 V_3$$

$$p_1 V_1 = 2 p_3 V_1$$

$$p_3 = \frac{p_1}{2}$$

3) Р-мн процесс 2-3:

$$V = \text{const} \quad T \uparrow \Rightarrow \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$$

4) Р-мн процесс 1-2:

$$\dots \dots \dots T \uparrow, V \uparrow \quad T = k V^2, \text{ если } k > 0, \text{ то } p \uparrow \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$5) Q_H = \Delta U + A = \frac{5}{2} \nu R T + p \Delta V$$

$$6) A = A_{12} + A_{23}$$

$$A_{12} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \cdot (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \cdot V_1$$

$$A_{23} = p \cdot \Delta V$$

7) Построим данный график в осях $p(T)$

$$1-2: p \uparrow, V \uparrow, T \uparrow$$

$$2-3: V = \text{const}$$

$$T \downarrow$$

$$p \downarrow$$

$$3-1: T = \text{const}$$

$$V \downarrow$$

$$p \uparrow$$

