

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

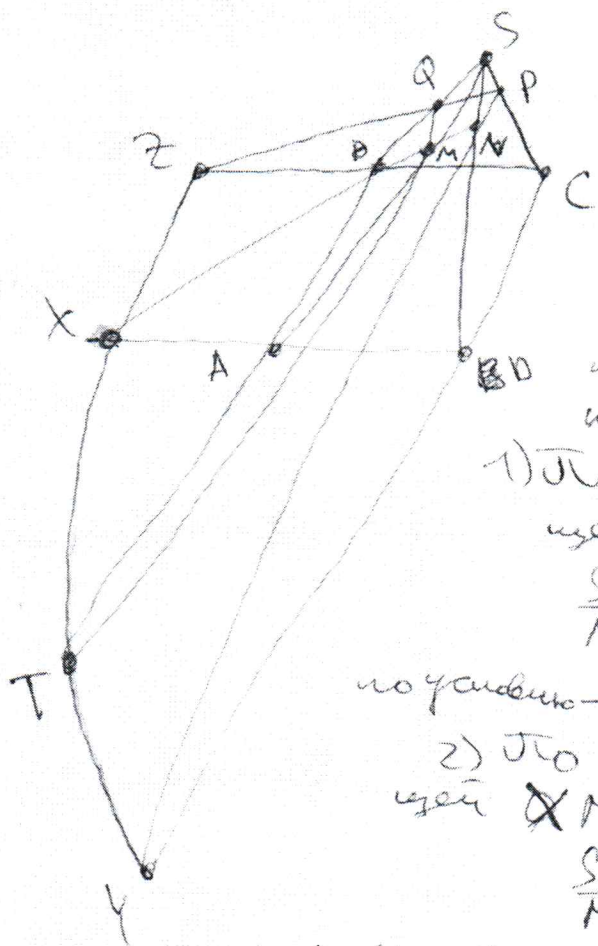
шифр 45-11-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	10	13	10	0	0	10	12	67

Задача 57

Вариант 7

Ситуация 1 из 8



Пусть плоскости $MNP \cap SB = Q$.
 $MN \cap AB = X$; $NP \cap BC = Y$; $PQ \cap CD = Z$;
 $QM \cap AD = T$.

Тогда н.к. $X, Y, Z, T \in$ плоскости $ABCD$ и $MNPQ \Rightarrow X, Y, Z, T$ — на одной прямой (прямой пересечения этих плоскостей)

1) По т. Менелая для $\triangle PSC$ и секущей YNP :

$$\frac{SN}{NP} \cdot \frac{PY}{YC} \cdot \frac{CP}{PS} = 1$$

по условию $\Rightarrow \frac{SN}{NP} \cdot \frac{CP}{PS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{PY}{YC} = \frac{3}{4}$

2) По т. Менелая для $\triangle DSA$ и секущей XMN :

$$\frac{SM}{MA} \cdot \frac{AX}{XB} \cdot \frac{DN}{NS} = 1$$

по условию $\Rightarrow \frac{SM}{MA} \cdot \frac{DN}{NS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{AX}{XB} = \frac{2}{3}$

3) По т. Менелая для $\triangle BSC$ и секущей ZPQ :

$$\frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{CP}{PS} \cdot \frac{SQ}{QB} = 1, \quad \frac{CP}{PS} \text{ (по условию)} = \frac{4}{1} \Rightarrow$$

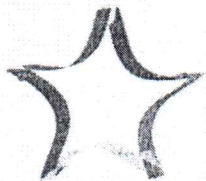
$$\Rightarrow \frac{BZ}{ZC} = \frac{QB}{SQ} \cdot \frac{1}{4}$$

Теперь н.к. $AB \parallel DC \Rightarrow TA \parallel YD \Rightarrow \triangle TAX \sim \triangle YXD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{XT}{XY} = \frac{XA}{XD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{XT}{XY} = \frac{2}{3} \quad (*)$$

н.к. $AD \parallel BC \Rightarrow XB \parallel ZC \Rightarrow \triangle XYB \sim \triangle ZYC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{YX}{YZ} = \frac{YB}{YC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{YX}{YZ} = \frac{3}{4} \quad (**) \Rightarrow YX = \frac{3}{4} YZ.$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-11-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 14

Страница 2 из 8

Перемножим (*) и (**): $\frac{xy}{yz} \cdot \frac{xz}{xy} = \frac{xz}{yz} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow xz = \frac{1}{2} \cdot yz \Rightarrow yz = xz - xz = \frac{3}{4} yz - \frac{3}{4} yz = \frac{1}{4} yz \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{yz}{yz} = \frac{yz - yz}{yz} = \frac{yz - \frac{1}{4} yz}{yz} = \frac{3}{4}$
 Ил. к. $AD \parallel DC \Rightarrow TA \parallel YC \Rightarrow \triangle TAZ \sim \triangle YZC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{zT}{TY} = \frac{zA}{zC} \Rightarrow \frac{zA}{zC} = \frac{3}{4}$
 Поизн. 3): $\frac{zA}{zC} = \frac{QA}{SQ} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{QA}{SQ} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SQ}{QA} = \frac{1}{3}$
 Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача $\sqrt{2}$

$$\frac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2(xy)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\log_3 x \cdot (2 \log_2 y)}{\log_2 x + \log_2 y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x + \log_2 y} = \frac{1}{6}; \log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3}, \text{ пусть } a = \log_2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x = a \cdot \frac{1}{\log_2 3} \Rightarrow \frac{\log_3 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x + \log_2 y} = \frac{a \cdot \frac{1}{\log_2 3} \cdot \log_2 y}{a + \log_2 y} = \frac{1}{6}$$

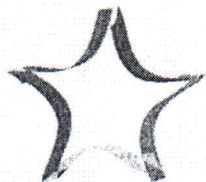
Пусть $\log_2 x = a; \log_2 y = b; \log_2 z = c$.

$$1) \frac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2(xy)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\log_3 x \cdot (2 \log_2 y)}{\log_2 x + \log_2 y} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_3 x \cdot \log_2 y}{\log_2 x + \log_2 y} = \frac{1}{6}; \log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = a \cdot \frac{1}{\log_2 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 3 \cdot \log_2 y}{\log_2 x + \log_2 y} = \frac{a \cdot b}{a + b} \cdot \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{2 \log_2 3}{3}$$

0.03?



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-11-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 14

Суперлига Звезд

$$2) \frac{\log_3 y \log_5 z}{\log_5(yz)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\log_3 y \cdot \frac{1}{2} \log_5 z}{\log_5 y + \log_5 z} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 y \log_5 z}{\log_5 y + \log_5 z} = \frac{3}{5}; \log_3 y = \frac{\log_2 y}{\log_2 3} = \frac{6}{\log_2 3}, \log_5 y = \frac{\log_2 y}{\log_2 5} = \frac{6}{\log_2 5};$$

$$\Rightarrow \frac{\log_3 y \log_5 z}{\log_5 y + \log_5 z} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{6C}{(6+C) \frac{1}{\log_2 5}} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6C}{6+C} = \frac{6 \log_2 3}{5}$$

$$3) \frac{\log_2 z \log_2 x}{\log_{16}(zx)} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} \log_3 z \log_2 x}{\frac{1}{4} \log_2(zx)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 z \log_2 x}{\log_2 z + \log_2 x} = \frac{3}{4}; \log_3 z = \frac{\log_2 z}{\log_2 3} = \frac{C}{\log_2 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_3 z \log_2 x}{\log_2 z + \log_2 x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{aC}{\log_2 3}}{a+C} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

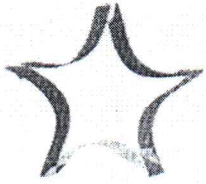
$$\Leftrightarrow \frac{aC}{a+C} = \frac{3 \log_2 3}{4}$$

Узнаваемая

система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{a+b} = \frac{2 \log_2 3}{3} \\ \frac{bc}{b+c} = \frac{6 \log_2 3}{5} \\ \frac{ca}{a+c} = \frac{3 \log_2 3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2 \log_2 3} \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{6 \log_2 3} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{4}{3 \log_2 3} \end{cases}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-11-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант _____

Страница 4 из 8

Пусть $\bar{a} = \frac{1}{a}$; $\bar{b} = \frac{1}{b}$; $\bar{c} = \frac{1}{c}$, тогда:

$$\begin{cases} \bar{a} + \bar{b} = \frac{3}{2 \log_2 3} \\ \bar{b} + \bar{c} = \frac{5}{6 \log_2 3} \\ \bar{c} + \bar{a} = \frac{4}{3 \log_2 3} \end{cases} \Rightarrow 1) \bar{b} = \frac{\frac{3}{2 \log_2 3} + \frac{5}{6 \log_2 3} - \frac{4}{3 \log_2 3}}{2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12} - \frac{2}{3}}{\log_2 3} = \frac{1}{2 \log_2 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 2 \log_2 3 \Rightarrow \log_2 y = 2 \log_2 3 = \log_2 9 \Rightarrow$$

2) $\bar{a} = \frac{\frac{3}{2 \log_2 3} + \frac{4}{3 \log_2 3} - \frac{5}{6 \log_2 3}}{2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{12}}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \log_2 3 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 3 \Rightarrow x = 3$$

3) $\bar{c} = \frac{\frac{5}{6 \log_2 3} + \frac{4}{3 \log_2 3} - \frac{3}{2 \log_2 3}}{2} = \frac{\frac{5}{12} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}}{\log_2 3} = \frac{1}{3 \log_2 3}$

$$\Rightarrow c = 3 \log_2 3 = \log_2 27 \Rightarrow \log_2 z = \log_2 27 \Rightarrow z = 27$$

Ответ: $x = 3$; $y = 9$; $z = 27$.

Задача 14

$$a_1 = \cos 10^\circ$$

$$a_2 = \cos 100^\circ$$

$$a_3 = \cos 1000^\circ, \text{ так как } \cos x \text{ период } = 360^\circ \Rightarrow$$

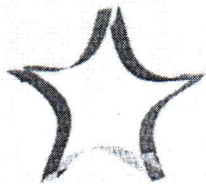
$$\Rightarrow a_3 = \cos(1000 - 720) = \cos 280 = \cos(280 - 360) = \cos(-80)$$

$$a_4 = \cos 10000^\circ = \cos(1000 \cdot 10) = \cos(-80 \cdot 10) = \cos(-800) = \cos(-800 + 720) = \cos(-80)$$

$$a_i, \text{ где } i \geq 3, = \cos(-80) = \cos(80) \text{ (так как } \cos x \text{ четная)}$$

$$\forall i \geq 3: a_i = \cos(80) \Rightarrow a_{2023} = a_{2024} = \cos(80)$$

доказательство!



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-11-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 14 Справочник 5 из 8

$$\begin{aligned}
 \text{Убедимся } a_1 \cos x + (a_2 + a_3 + a_4) \sin x &= \\
 &= \cos 10 \cos x + (\cos 100 + \cos 80 + \cos 80) \sin x = \\
 &= \cos 10 \cos x + (\cos 100 + 2 \cos 80) \sin x \\
 \cos 100 &= \cos(70 + 30) = \cos 70 \cos 30 - \sin 70 \sin 30 = -\sin 70 \\
 \cos(80) &= \cos(90 - 10) = \cos 90 \cos 10 + \sin 90 \sin 10 = \sin 10 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \cos 10 \cos x + (\cos 100 + 2 \cos 80) \sin x &= \\
 &= \cos 10 \cos x + (-\sin 10 + 2 \sin 10) \sin x \Rightarrow \\
 &= \cos 10 \cos x + \sin 10 \sin x = \cos(10 - x)
 \end{aligned}$$

Хочим найти минимум $\cos(10 - x)$, но
 $-1 \leq \cos x \Rightarrow \cos(10 - x) \geq -1 \Rightarrow$ наименьшее
 значение $= -1$ и оно достигается при $x = -170^\circ$

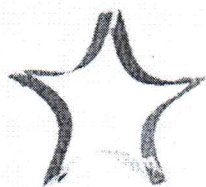
Ответ: -1 .

Задача 13

Пусть $a = 2^x$; $b = \sin^2 y$; $c = \ln^3 z$, тогда и.к. $4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 16 = 4^2$.

! $2^{x+1} + 3 \sin^2 y - 6 \ln^3 z \leq 28 \Leftrightarrow 0 \leq -2a - 3b + 6c + 28$.

Введем декартовы координаты в пространстве.
 Тогда точка с координатами (a, b, c) будет лежать
 на сфере с радиусом 4 и центром в начале
 координат (и.к. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 4$).
 Помогим на плоскости, зададимся



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-11-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 14

Сиреница б.из 8

уравнением $-2p - 3q + 6r + 28 = 0$.

Расстояние от этой плоскости до начала координат $(0;0;0) = \frac{|-2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 28|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{28}{\sqrt{49}} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ плоскость касалась сферы с центром в $(0;0;0)$ и радиусом $\Rightarrow$ эта сфера полностью лежит в первом октанте (на которой разбивает плоскость пространство).

Кер-во $0 \leq -2p - 3q + 6r + 28$ задает одну из двух частей пространства и т.к. при $(p,q,r) = (0,0,0)$

$0 \leq 28 \Rightarrow$ центр сферы лежит в том пространстве, которое удовле-

творяет кер-ву $0 \leq -2p - 3q + 6r + 28 \Rightarrow$ вся сфера

удовлетворяет этому кер-ву $\Rightarrow$ точка $(a,b,0)$

тоже удовлетворяет $\Rightarrow 0 \leq -2a - 3b + 6c + 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + 3b - 6c \leq 28 \Rightarrow 2^{x+1} + 3 \cdot 5^{y+1} - 6 \cdot 11^z \leq 28$

Задача 17

Дано:

$$V_0 = h_0 S$$

$$h_0 = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$$

$$S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2$$

$$\rho_0$$

$$V = h S$$

$$h = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$p = 2 \rho_0$$

$$T_0 = 100 \text{ C} = 373 \text{ K}$$

$$T$$

$$m = ?$$

Решение:

$PV = \nu RT$ - ур. Клапейрона.

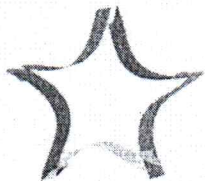
т.к. кер-во в-ва постоянно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \nu R = \text{const} \Rightarrow \frac{PV}{T} = \text{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0 V_0}{T_0} = \frac{\rho V}{T} \Rightarrow T = T_0 \frac{\rho V}{\rho_0 V_0} = T_0 \frac{2 \rho_0 V}{\rho_0 V_0} =$$

$$= T_0 \cdot \frac{2V}{V_0}$$

Когда достигнуто равнове-
сие



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-11-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 18

Справочник 8 из 8

Фокусы эллипса.

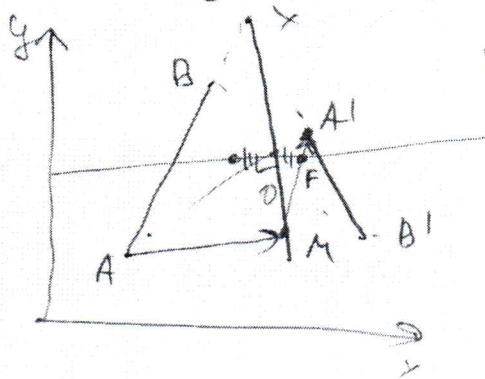
Найдем угл. центры AA' и BB' ; AB и $B'A'$:

$$AA': y = x$$

$$BB': y = -x + 40 \Rightarrow O = AA' \cap BB' = (35; 35)$$

$$AB': y = 4x - 30$$

$$A'B': y = -2x + 120 \Rightarrow X = AB \cap A'B' = (25; 70)$$



Пусть AM — отрезок $\perp XO \Rightarrow MA' \cap$ отн. ось —
одно ось в фокусе.

П. в. ранее мы получили
строили угловой угол $\Rightarrow$ можем
циркулем и линейкой построить
 M — проекцию A на OX .

$$\text{Уравн. } OX: y = -3,5x + 87,5$$

$$\text{Уравн. отн. оси: } y = -\frac{1}{3,5}x + 45. \quad (OX \neq \text{отн. оси}).$$

$$AM \parallel \text{отн. оси} \Rightarrow \text{Уравн. } AM: y = -\frac{1}{3,5}x + \frac{80}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = OX \cap AM$$

Составим уравнение MA' и пересечем MA' с
отн. осью, получаем F , а второе фокус —
симметрично F относительно XO —
2 фокусы.

Ответ: $O = (35; 35)$ и фокусы по алгоритму
находим.