



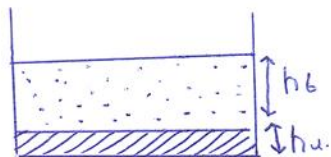
1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	12	0	0	40	10	45	12	59

ВАРИАНТ-2.

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-09-03

№6.



Обозначим высоту столба жидкости в сосуде за h_b , а высоту воздуха h_u . Тогда объем воды и воздуха равен соответственно: $V_u = h_u \cdot S$; $V_b = h_b \cdot S$. Массы воды равны $V_u \cdot \rho_u = h_u \cdot S \cdot \rho_u$; масса воздуха $V_b \cdot \rho_b = h_b \cdot S \cdot \rho_b$.

Ровный уровень на графике соответствует моменту, когда весь мед растаял, и уровень воды в стакане перестал понижаться. При этом установившаяся высота $h_k = 115$ см. В этой ситуации весь понуривший объем займает вода, а значит мы можем найти ее общую массу: $M = m_b + m_u = h_k \cdot S \cdot \rho_b$.

$$M = 115 \cdot 15 \cdot 1 = 1725 \text{ г.} \quad \checkmark$$

Известно, что уровень воды в стакане был 120 см, это $h_u + h_b$. ($\Rightarrow V_{\text{уп}} = (h_u + h_b) \cdot S = (120 \cdot 15 = 1800 \text{ см}^3)$). Отсюда можно составить систему уравнений на h_u и h_b :

$$\begin{cases} h_u + h_b = 120 \\ h_u \cdot S \cdot \rho_u + h_b \cdot S \cdot \rho_b = 1725 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_u + h_b = 120 \quad | \cdot (-13,5) \\ 13,5 h_u + 15 h_b = 1725 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_b = 70 \text{ см} \\ h_u = 50 \text{ см} \end{cases}$$

$1,5 h_b = 105$
 $h_b = 70 \text{ см}$

10

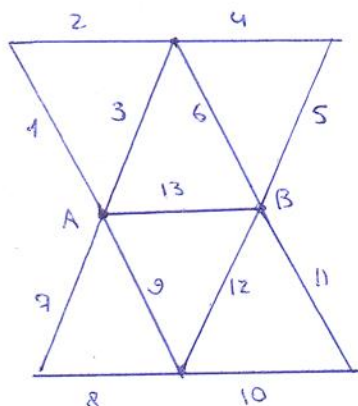
Зная высоты уровней воды и воздуха, найдем их массы:

$$m_u = h_u \cdot S \cdot \rho_u = 50 \cdot 15 \cdot 0,9 = 675 \text{ г}$$

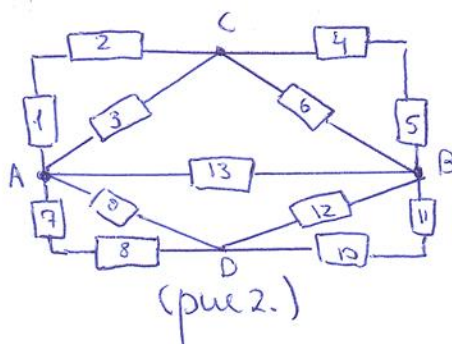
$$m_b = h_b \cdot S \cdot \rho_b = 70 \cdot 15 \cdot 1 = 1050 \text{ г}$$

Ответ: масса воды - 675 г, масса воздуха - 1050 г.

№7.



(рис 1.)



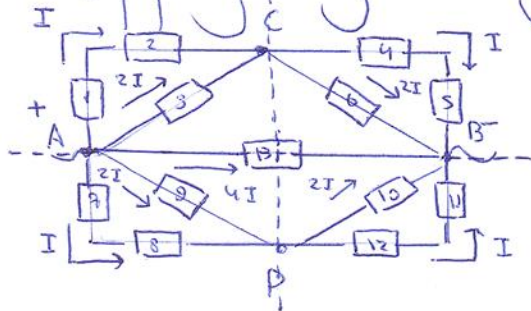
(рис 2.)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-09-03

Перерисуем изначальную схему в эквивалентную ей.



Получившаяся цепь симметрична относительно осей CD и AB. Относительно CD симметрия «плохая» — плюс попадет в минус. Симметрия AB — хорошая. (+ и ток — A; — B)

Пусть из точки A в точку C через резисторы 1 и 2 течет некий ток I. Тогда разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_C$ равна $2IR$ (напряж., набравшие ток I при прохождении через 2 резистора R). Резистор 3 подключен к тем же точкам, значит для одинаковой разности потенциалов через него течет ток $2I$. ($\frac{2IR}{R} = 2I$).

Т.к. схема симметрична по двум осям, через резисторы 4, 5, 7 и 8, 11 и 12 течет такой же ток I, а через резисторы 6, 9, 10 — ток $2I$.

Рассмотрим разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$. От A до B можно пройти через резисторы 3 и 6, набрав напряжения $4IR$, или через 1 и 2; 4 и 5, набрав также $4IR$. Значит через резистор 3 течет ток $4I$, т.к. он подключен прямо к A и B ($\frac{4IR}{R} = 4I$). (Закон Кирхгофа)

Общее напряжение между точками A и B равно $U_{\text{общ.}} = 4IR$. При этом общий ток будет: $I_{\text{общ.}} = I + I + 2I + 2I + 4I = 10I$.

Тогда найдем $R_{\text{общ.}} = \frac{U_{\text{общ.}}}{I_{\text{общ.}}}$; $R_{\text{общ.}} = \frac{4IR_0}{I \cdot 10} = 0,4R_0$.

$R_{\text{общ.}} = 0,4R_0 = 0,4 \cdot 8 = 3,2 \text{ Ом}$.

Ответ: $3,2 \text{ Ом}$.

✓8.

1) Построим графический ход решения (рис. 1.) и заметим, что пути I и II. (или продолжения) пересеклись в точке A (4; -1). Это можно доказать, решив систему уравнений функций f_I и f_{II} : $f_I(x) = 7 - 2x$; $f_{II}(x) = x - 5$.

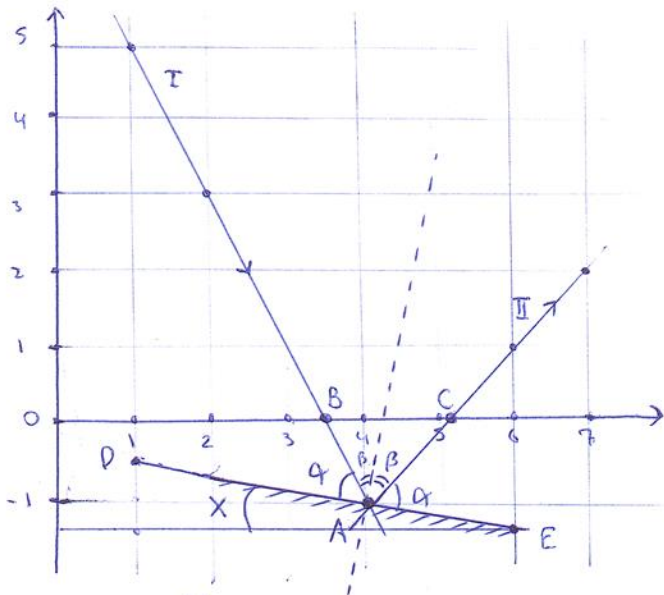
$$\begin{cases} y = 7 - 2x \\ y = x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

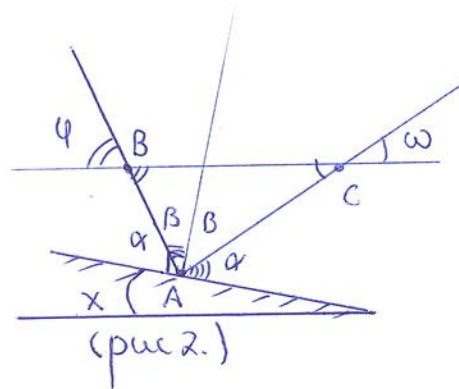


**Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»**

Шифр 36/1-09-03



(рис. 1.)



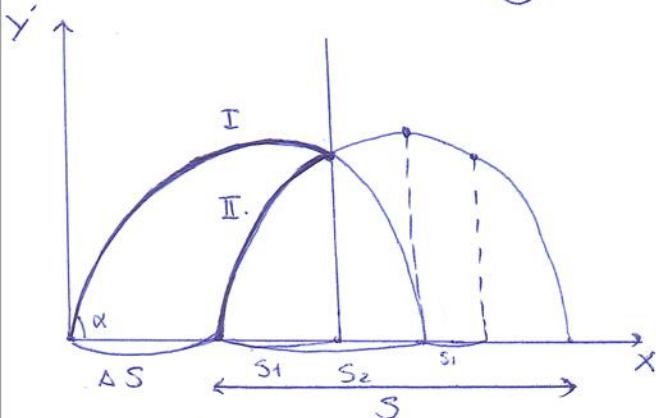
(рис. 2.)

2) Теперь рассмотрим падение луча на зеркало подробнее. Угол падения равен углу отражения и равен α . Тогда пусть оставшийся угол от перпендикуляра к зеркалу равен β , так $\alpha + \beta = 90^\circ$. Отметим точки A, B и C, получим треугольник ABC. Нам нужно найти $\angle X$. Проведем зеркало на плоскости, тогда его точки A и D перейдут координаты (4; -1) и (1; -0.5). Отсюда можно найти $\tan(X) : \tan(X) = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}$ (или по синусу). Тогда угол X можно найти, вписав арктангенс из $\frac{1}{6}$.

$$X = \arctan\left(\frac{1}{6}\right)$$

Ответ: (4; -1), $X = \arctan\left(\frac{1}{6}\right) \approx 9,5^\circ$

✓ 5.

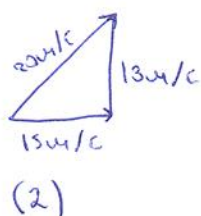
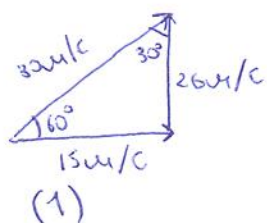


Рассмотрим движение шарика при ударе о стенку. Если это упругое столкновение, то дальнейшее движение шарика будет «отзеркаленным» продолжением изначальной параболы, по которой движение шарика. Таким образом можно построить две одинаковые параболы I и II, «изначальное» движение. Расстояние между ними равно расстоянию от броска до падения. При этом не имеет значения, в первый или второй раз шарик достиг скорости в 20 м/с (первая или вторая половина параболы).



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-09-03



Скорость шарика по оси X не изменяется, а по оси Y имеет вид функции: $V_y(t) = V_{0y} - 10t$, где t - время движения. Найдем V_{0y} - начальную скорость по Y : $V_{0y} = V \cdot \sin(60) = 30 \cdot \sin(60) \Rightarrow$

$V_{0y} \approx 26 \text{ м/с}$. В вершине парабола V_y

становится равной нулю, значит такое время движения по параболе:

$$0 = V_{0y} - gt \Rightarrow 0 = 26 - 10t; \quad t_0 = 2 \frac{V_{0y}}{g}; \quad t_0 = 2 \cdot \frac{26}{10} = 5,2 \text{ с}$$

Время до описанной точки 620 м/с можно найти по формуле:

$$t = \frac{V_y - V_{0y}}{-g}; \quad t_1 = \frac{\sqrt{20^2 - 15^2} - 26}{-10} = 1,3 \text{ с}. \quad (V_y - \text{катет векторного треугольника с гипотенуз. } 20 \text{ и другим катетом } V_x = 30 \cdot \cos(60) = 15 \text{ м/с})$$

Полученные расстояния ΔS равно разности S высоты и углового расстояния S_1 до точки удара.

Т.к. V_x постоянна и равна $V \cdot \cos \alpha = 30 \cdot \cos(60) = 15 \text{ м/с}$, то:

$$\Delta S = S - 2S_1 \Rightarrow \Delta S = V_x t_0 - 2 \cdot V_x \cdot t_1$$

$$\Delta S = V_x (t_0 - 2t_1)$$

$$\Delta S = 15 \cdot (5,2 - 2 \cdot 1,3) = 39 \text{ м.}$$

Ответ: 39 м.

$\sqrt{2}$.

Пусть до обеда I кассир обслужил x покупателей, тогда I кассир - $0,75x$.

Пусть после обеда I кассир обслужил y покупателей, тогда I кассир - $1,2y$.

Отсюда можно получить уравнение на разность их работы в 10%:

$$\frac{0,75x + 1,2y}{x + y} = 1,1$$

$$1,1x + 1,1y = 0,75x + 1,2y$$

$$0,35x = 0,1y$$

$$\frac{y}{x} = 3,5.$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-09-03

При этом т.к. людей пока еще мало, то $(X+Y) \leq 10$; $X \leq 4$; $Y \leq 5$

Значит нам нужно найти, удовлетворяющие всем условиям. До 250
всем условиям удовлетворяют $X=20, Y=70$ или $X=40, Y=140$.

1) I курс обучили: $20 \cdot 0,75 + 70 \cdot 0,2 = 20$ человек

2) I курс обучили: $40 \cdot 0,75 + 140 \cdot 0,2 = 108$ человек, но тогда второй обучили 180 человек, а $180 + 108 > 250$, что противоречит условию.

12 баллов

Ответ: I курс обучили 20 человек.

✓1

$$\begin{cases} X^2+2=(Y+2)^2; \\ Y^2+1=(X+2)^2; \\ Z^2+1=(X+Y)^2, \end{cases} \quad \begin{cases} X^2+2=Y^2+2Y+2^2 \quad (1) \\ Y^2+1=X^2+2X+2^2 \quad (2) \\ Z^2+1=X^2+2XY+Y^2 \quad (3) \end{cases}$$

Сложим уравнения (1) и (2); (2) и (3), (1) и (3) и получим:

1. $X^2+2+Y^2+1=Y^2+2Y+2^2+X^2+2X+2^2 \quad (1)+(2)$

$$3=2Z^2+2Y+2X$$

$$1,5=Z(X+Y+2) \quad (4)$$

2. $Y^2+1+Z^2+1=X^2+2X+2^2+X^2+2XY+Y^2 \quad (2)+(3)$

$$2=2X^2+2X+2XY$$

$$1=X(X+Y+2) \quad (5)$$

3. $X^2+2+Z^2+1=Y^2+2Y+2^2+X^2+2XY+Y^2 \quad (1)+(3)$

$$3=2Y^2+2Y+2XY$$

$$1,5=X(X+Y+2) \quad (6)$$

Из уравнений (4) и (6) видно, что $Z=Y$. Тогда в уравнение (5) подставим $Z=Y$.

$$\begin{cases} X^2+2=(2Y)^2; \\ Y^2+1=(X+Y)^2, \end{cases} \quad \begin{cases} X^2+2=4Y^2 \\ Y^2+1=X^2+2XY+Y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} X^2+2=4Y^2 \\ 1=X^2+2XY \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^2+2=4Y^2 \\ Y=\frac{1-X^2}{2X} \end{cases}$$

$$X^2+2=4\frac{(1-X^2)^2}{4X^2} \Rightarrow X^2+2=\frac{1-2X^2+4X^4}{X^2}$$

$$X^4+2X^2=1-2X^2+4X^4$$

0 баллов

Женя



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-09-03

$$3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

Пусть x^2 - это a . Тогда:

$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$D = 16 - 3 \cdot 4 = 4$$

$$a_1 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1 - \text{не лишние}$$

$$a_2 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}; x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} - \text{не лишние}$$

Из уравнений (4) и (5) видно, что $\frac{x}{2} = 1, 5$.

$$x_1 = 1 \Rightarrow z_1 = 1, 5 \Rightarrow y_1 = 1, 5$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow z_2 = 1, 5 \sqrt{\frac{1}{3}}; y_2 = 1, 5 \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Ответы: $(1; 1, 5; 1, 5)$ и $(\sqrt{\frac{1}{3}}; 1, 5 \sqrt{\frac{1}{3}}; 1, 5 \sqrt{\frac{1}{3}})$.

√4.

Если $f(2024) > 64$, то $x = 2024$.

Т.к. $g(x)$ имеет корни, то $D < 0$. $g = x^2 + 4x + 2024$.

$$x^2 + 4x + 2024 - g$$

$$D = 16 - 4(2024 - g) \Rightarrow g < 2020.$$

Предположим, что $f(2024) \leq 64$. Тогда 2024 можно представить как $g(x)$

$\Rightarrow g = 2024$, и $D = 0$ (по формуле выше). Тогда $x_1 = -2$ (это $\frac{-4}{2} = \frac{-b}{2a}$).

√3.

Для каждой из таких же точек, как A , можно составить такое же количество фигур, не содержащих эту точку, как и с A . Поэтому многоугольников без точки A больше, чем многоугольников с ней. Пусть с каждой из точек можно составить K комбинаций, не включающих её саму. Тогда всего комбинаций $2025K$, которые включают все точки. Тогда для A есть $(2025K - K = 2024K)$ комбинаций, не включающих эту точку.

О. Данилов

Где-то



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-09-03

Для одной точки можно составить 2023! комбинации (т.к. каждый вершинный многоугольник треугольник, дающие заданные точки увеличиваются. Тогда получается, что многоугольников, содержащих
Абсолют 2024. 2023! = 2024! комбинации
Ответ: 2024К или 2024!

0 баллов