



Многопрофильная  
инженерная олимпиада  
«Звезда»

шифр 77/5-11-08

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Всего |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| Баллы   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |

Вариант 1

### Задача №4.

Воспользуемся формулой для подсчета пересечений кубиков диагональю:

Кол-во кубиков =  $a + b + c - \text{НОД}(a; b) - \text{НОД}(b; c) - \text{НОД}(c; a) + \text{НОД}(a; b; c)$ ,  
где НОД - наибольший общий делитель.

Подставим числа:

$$\text{кол-во кубиков} = 6 + 7 + 11 - \text{НОД}(6; 7) - \text{НОД}(7; 11) - \text{НОД}(6; 11) + \text{НОД}(6; 7; 11) =$$

•  $\text{НОД}(6; 7) = 1$ , числа 6 и 7 имеют общ. наим. делитель 1

•  $\text{НОД}(7; 11) = 1$ , числа 7 и 11 имеют общ. наим. делитель 1

•  $\text{НОД}(6; 11) = 1$ , числа 6 и 11 имеют общ. наим. делитель 1

$$\Rightarrow 6 + 7 + 11 - 1 - 1 - 1 + 1 = 22 - \text{проткнет шина по диагонали.}$$

Ответ: 22 кубика.

### Задача №6.

Дано:

$$C = 200 \text{ мкФ}$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 40 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 210 \text{ В}$$

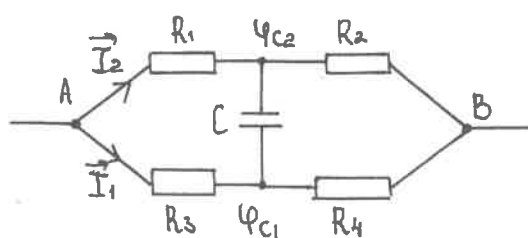
Найти:

$q$  - ?

ИИ:

$$2 \cdot 10^{-4} \text{ Ф}$$

Решение:



Из закона Ома  
для участка цепи:  
 $I = \frac{U}{R}$

$$1) I_1 = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{210}{30 + 40} = 3 \text{ А}$$

$$\Rightarrow U_{C1} = \frac{U_0}{R_3 + R_4} \cdot R_3 = \frac{210}{30 + 40} \cdot 30 = 90 \text{ В}$$

$$\Rightarrow U_{C2} = U_0 - U_{C1} = 210 - 90 = 120 \text{ В}$$

$$2) I_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \Rightarrow U_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \cdot R_1 = \frac{210 \cdot 10}{10 + 20} = 70 \text{ В} \Rightarrow U_{C1} = U_0 - U_1 =$$

$$= 210 - 70 = 140 \text{ В}$$

$$3) U_C = |U_{C1} - U_{C2}| = |140 - 120| = 20 \text{ В}$$

$$4) q = C U_C = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 20 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 4 \text{ мКл}$$

Ответ:  $q = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$ .

### Задача №3.

Квадратичная функция  $f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$  принимает неотрицательные значения для всех  $x$ , если:

- 1) коэффициент при  $x^2$  положительный:  $a > 0$ .
- 2) Дискриминант неположительный:  $D \leq 0$ .

Дискриминант квадратичной функции вычисляется по формуле:

$$D = b^2 - 4ac = (a+1)^2 - 4ab$$

Условие неотрицательности  $D \leq 0$ :  $(a+1)^2 - 4ab \leq 0$   
 $(a+1)^2 \leq 4ab$

Выразим  $b$  через  $a$ :  $b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$ , минимальное значение  $b$  достигается при равенстве:  $b = \frac{(a+1)^2}{4a}$ .

Подставим " $b$ " в выражение, значение которого надо найти:

$$2a + b + 1 = 2a + \frac{(a+1)^2}{4a} + 1 = 2a + \frac{a^2 + 2a + 1}{4a} + 1 = \frac{8a^2 + a^2 + 2a + 1 + 4a}{4a} =$$

$$= 2a + \frac{a}{4} + \frac{1}{4a} + \frac{3}{2}$$

Обозначим  $f(a) = 2a + \frac{a}{4} + \frac{1}{4a} + \frac{3}{2}$ , найдем производную:

$$f'(a) = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4a^2}, \text{ приравняем к нулю: } f'(a) = 0: 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4a^2} = 0$$

$$\frac{9}{4} = \frac{1}{4a^2}$$

$$36a^2 = 4$$

$$a = \pm \frac{1}{3}, \text{ т.к. } a > 0$$

то нам подходит  $a = \frac{1}{3}$

Найдем  $b$ , зная что  $a = \frac{1}{3}$ :  $b = \frac{(a+1)^2}{4a} = \frac{(\frac{1}{3}+1)^2}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{16 \cdot \frac{1}{9}}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$

Подставим значения в  $2a + b + 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{3}{3} = 3$

Ответ:  $2a + b + 1 = 3$ .

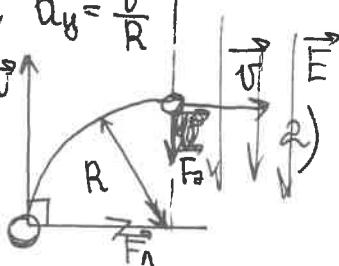
### Задача №5.

- 1) Когда частица движется вертикально вверх со скоростью  $v$ , в магнитном поле на частицу действует  $F_1 = qvB \sin 90^\circ$ , поскольку магнитное поле перпендикулярно скорости и магнитному полю, вызывая круговое движение:

$$ma_y = qvB; a_y = \frac{v^2}{R}$$

$$m \frac{v^2}{R} = qvB$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$



$$2) \frac{qE}{m} = a \Rightarrow \frac{at^2}{2} = R; t = \sqrt{\frac{2R}{a}}$$



Многопрофильная  
инженерная олимпиада  
«Звезда»

шифр 77/5-11-08

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Всего |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| Баллы   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |

Вариант 1

Продолжение решения задачи №5:

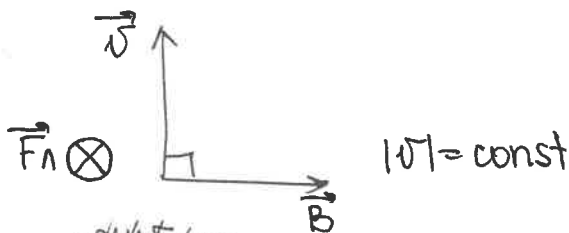
$$3) v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot m}{qB}$$

$$\gamma = \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{2qB}$$

$$5) T_{\text{общ}} = t + \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\text{общ}} = \sqrt{\frac{2R}{a}} + \frac{\pi m}{2qB} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}} + \frac{\pi m}{2qB}$$



~~$$T = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow t = \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{2qB}$$~~

4) После вылета из магнитного поля, частица попадает в эл. поле с напряженностью  $E$ :  $F_e = qE \Rightarrow ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m}$ , частица начнет двигаться вниз с ускорением  $a$ :

~~$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{qE}}$$~~

Я сделал вывод, что ответ зависит от скорости, поэтому оставлю её в ответе.

Ответ:  ~~$t = \sqrt{\frac{2h}{qE}}$~~   $t = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}} + \frac{\pi m}{2qB}$

Задача №8.

Дано:

$$D_p = -4 \text{ диоп}$$

$$d_1 = 5 \text{ см}$$

$$d_2 = 20 \text{ см}$$

Р.л. → Соб.л.

Найти:

$$D_c = ?$$

Решение:

$$D_p = \frac{1}{F_p} \Rightarrow F_p = \frac{1}{D_p} = \frac{1}{-4} = -0,25 \text{ м}$$

Увеличение  $\Gamma_p = \frac{d_2}{d_1} = \frac{20}{5} = 4$ , для рассеивающей линзы увеличение связано с расстоянием до экрана  $L$  и её  $F_p$ :  $\Gamma_p = \frac{L}{F_p} \Rightarrow$

$$L = \Gamma_p \cdot F_p = 4 \cdot 0,25 = 1 \text{ м}$$

После того, как линзу заменили с рассеивающей на собир:

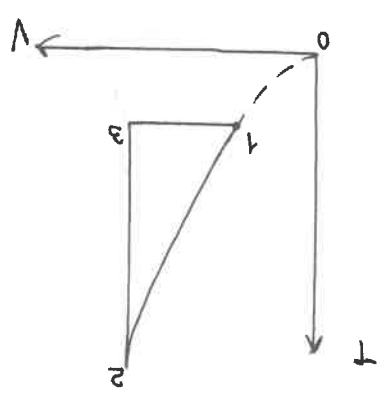
$\Gamma_p = \Gamma_c = 4$ , для собирающей линзы увеличение связано с расстоянием до экрана и  $F_c$ :  $\Gamma_c = \frac{L}{F_c} \Rightarrow F_c = \frac{L}{\Gamma_c} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м} \Rightarrow D_c = \frac{1}{F_c} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ диоп}$

Ответ:  $D_c = 4 \text{ диоп}$

[3]

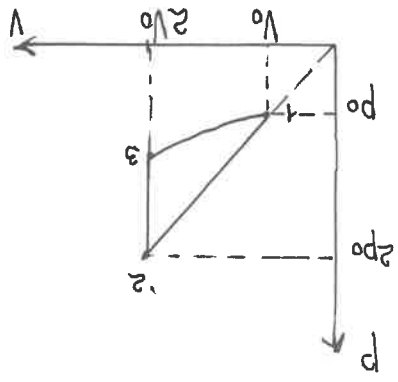
Задача №7

Дано:  
1-2:  $T = kV^2$   
2-3 - изот.  
3-1 - изот.  
 $A_{12} = 2,16 A_{31}$   
 $V_3 = 2V_1$   
Найти:  
 $\eta$  - ?



Решение:

непереносим



Из уравнения состояния - Клапейрона:  $PV = \nu RT$ , откуда  $T = kV^2 \Rightarrow$

$\frac{P}{V} = \nu R k = \text{const}, A_{12} = 2,16 A_{31}$

$V_1 = V_0, V_2 = 2V_0$

$Q_H = \Delta U_{12} + A_{12}$ ,  $\delta$  работа не складывается по кон. во уменьш.  $\delta$  работы, но в процессе с отрицательным значением, т.е.  $1=3$

$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot 3P_0V_0 = \frac{9}{2}P_0V_0$   
 $A_{12} = P_0 + 2P_0 \cdot V_0 = 3P_0V_0$

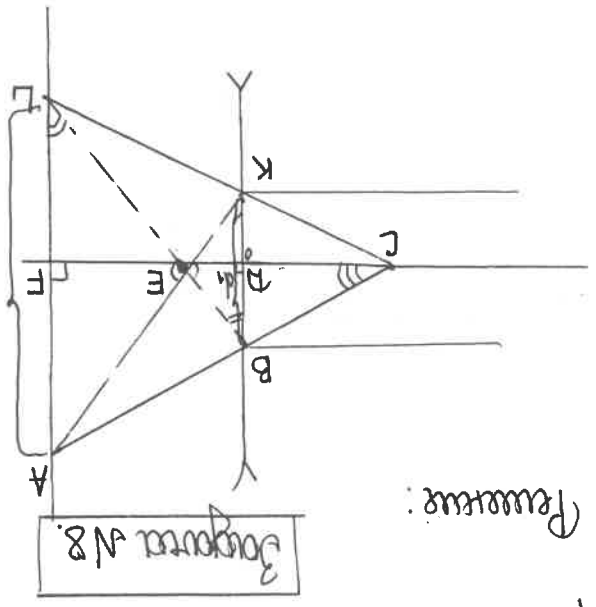
$3A_{12} = \Delta U_{12}$   
 $Q_H = 4A_{12}$   
 $A_{31} = A_{12}$

$A_{12} = A_{31} - \frac{A_{12}}{2,16}$   
 $A_{12} = A_{31} \cdot \frac{1,16}{2,16}$

$\eta = \frac{A_{12} \cdot 100\%}{Q_H} = \frac{A_{12} \cdot \frac{1,16}{2,16} \cdot 100\%}{4A_{12} \cdot \frac{1,16}{2,16} \cdot 100\%} = 0,134 \cdot 100\% = 13,4\%$

Ответ:  $\eta = 13,4\%$

Дано:  
 $D_p = -4 \text{ г/м}^3$   
 $d_1 = 5 \text{ см}$   
 $d_2 = 20 \text{ см}$   
Найти:  
 $D_c$  - ?



Решение:

4)  $D_c = \frac{1}{D_p} = \frac{1}{-4} = -0,25 \text{ г/м}^3$   
Ответ:  $D_c = 6,67 \text{ г/м}^3$

$\Rightarrow D_F = D_E \Rightarrow D_E = \frac{D_F}{5} = \frac{0,75}{5} = 0,15 \text{ м}$

$\frac{D_E}{D_F} = \frac{A_L}{A_R} = \frac{1}{4} : D_E = \frac{D_F}{4} \Rightarrow D_E = 4D_F$

3)  $\Delta BKE \sim \Delta ALE$

$\frac{D_E}{D_F} = \frac{A_L}{A_R} = \frac{1}{4} \Rightarrow D_E = \frac{D_F}{4} \Rightarrow D_F = 4D_E$

2)  $\Delta CBD \sim \Delta ACF$

$\frac{D_D}{D_F} = \frac{A_L}{A_R} = \frac{1}{4} \Rightarrow D_D = \frac{D_F}{4} \Rightarrow D_F = 4D_D$

--- сопоставим



Многопрофильная  
инженерная олимпиада  
«Звезда»

шифр 47/5-11-08

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Всего |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| Баллы   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |

Вариант 1

Задание №2.

Обозначим  $A_n$  - кол-во способов раскрасить строку из  $n$  - клеток, соблюдая условия.

Рекуррентные соотношения:

Рассмотрим как можно раскрасить последнюю клетку:

- ① Если последняя клетка белая, то перед ней может быть только серая или черная
- ② Если последняя клетка серая, то перед ней может быть белая или черная
- ③ Если последняя клетка черная, то перед ней может быть только серая или белая.

Запишем рекуррентные соотношения:

- Пусть  $a_n$  - кол-во способов раскрасить строку длиной  $n$ , заканчивая на белый.
- Пусть  $b_n$  - кол-во способов раскрасить строку длиной  $n$ , заканчив на серый
- Пусть  $c_n$  - кол-во способов раскрасить строку длиной  $n$ , заканчив на черный

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$$

$$c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$\Rightarrow$  общее кол-во способов раскрасить строку из  $n$  клеток:

$$A_n = a_n + b_n + c_n$$

Начальные условия:

для первой клетки:

$$a_1 = 1 \text{ (клетка белая)}$$

$$b_1 = 1 \text{ (клетка серая)}$$

$$c_1 = 1 \text{ (клетка черная)}$$

$$\Rightarrow A_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

для  $n=2$ .

$$a_2 = b_1 + c_1 = 1 + 1 = 2$$

$$b_2 = a_1 + c_1 = 1 + 1 = 2$$

$$c_2 = a_1 + b_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow A_2 = 2 + 2 + 2 = 6$$

где  $n=3$ :

$$\begin{cases} a_3 = b_2 + c_2 = 2 + 2 = 4 \\ b_3 = a_2 + c_2 = 2 + 2 = 4 \\ c_3 = a_2 + b_2 = 2 + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow A_3 = 4 + 4 + 4 = 12$$

где  $n=4$ :

$$\begin{cases} a_4 = b_3 + c_3 = 4 + 4 = 8 \\ b_4 = a_4 + c_4 = 4 + 4 = 8 \\ c_4 = a_4 + b_4 = 4 + 4 = 8 \end{cases} \Rightarrow A_4 = 8 + 8 + 8 = 24$$

и так далее до  $n=12$

Имеем геометрическую прогрессию, где  $q=2$  вида  $b_{n+1} = b_n \cdot q$ , т.к.  
3, 6, 12, 24,  $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{3} = 2$

$$A_{12} = S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(2^{12} - 1)}{2 - 1} = 12285$$

Всего клеток  $4 \cdot 12 = 48$ , общее кол-во способ раскраски:  $3^{48} = N$

$$p = \frac{A_{12}}{N} = \frac{12285}{3^{48}} = 1,54 \cdot 10^{-19} \quad \text{Ответ: } 1,54 \cdot 10^{-19}$$

### Задача №1.

$$9\sqrt{2 - \log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2 - \log_2 x} - 7|$$

Рассмотрим ОДЗ:  $\begin{cases} 2 - \log_2 x \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 x \leq 2, \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 4]$

Пусть  $\log_2 x = t$ :

$$9\sqrt{2-t} - 2|4t-7| \leq 9t - 2|4\sqrt{2-t} - 7|$$

Заметим, что  $2-t \geq 0 \Rightarrow t \in (-\infty; 2]$ :

$$9\sqrt{2-t} - 2(4t-7) - 9t + 2(4\sqrt{2-t} - 7) \leq 0, \quad 4t-7 \geq 0, \quad 4\sqrt{2-t} - 7 \geq 0$$

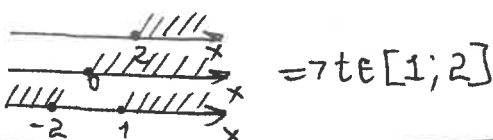
$$9\sqrt{2-t} - 8t + 14 - 9t + 8\sqrt{2-t} - 14 \leq 0$$

$$17\sqrt{2-t} - 17t \leq 0$$

$$17\sqrt{2-t} \leq 17t$$

$$\sqrt{2-t} \leq t$$

$$\begin{cases} 2-t \geq 0 & t \leq 2 \\ t \geq 0 & t \geq 0 \\ 2-t \leq t^2 & t \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases}$$



$$\Rightarrow t \in [1; 2]$$

$$1 \leq \log_2 x \leq 2$$

$$2 \leq x \leq 4$$

Ответ:  $x \in [2; 4]$

Через монотонность: заметим, что  $f(x) = 9\sqrt{2-t}$  убыв.,  $g(x) = 2|4t-7|$  убыв.,  $h(x) = 9t$  возраст.,  $k(x) = 2|4\sqrt{2-t} - 7|$  возраст., тогда равенство переносим

$$9\sqrt{2-t} - 2|4t-7| \leq 9t - 2|4\sqrt{2-t} - 7| \Leftrightarrow 9\sqrt{2-t} - 2(4t-7) \leq 9t - 2(4\sqrt{2-t} - 7)$$