Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 46-09-05

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Баллы | 12 | 12 | 13 | 10 | 8 | 10 | 10 | 6 | |

**Вариант** 2

## N 1

$x, y, z > 0$

$$\begin{cases} x^2+z=(y+z)^2 & (1) \\ y^2+1=(x+z)^2 & (2) \\ z^2+1=(x+y)^2 & (3) \end{cases}$$

Рассмотрим систему из уравнений (2) и (3):

$$\begin{cases} y^2+1=(x+z)^2, \\ z^2+1=(x+y)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1=(x+z)^2-y^2, \\ 1=(x+y)^2-z^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1=(x+z-y)(x+z+y), \\ 1=(x+y-z)(x+y+z). \end{cases}$$

$(x+z-y)(x+z+y)=(x+y-z)(x+y+z)$ Т.к. $x, y, z>0$, $x+y+z\neq 0$

$x+z-y=x+y-z;$

$2y=2z$

$\underline{y=z.}$

Рассмотрим систему из уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} x^2+2=4y^2, \\ y^2+1=(x+y)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2=4y^2, \\ y^2+1=x^2+2xy+y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2=4y^2, \\ x^2+2xy=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2=4y^2, \\ y=\frac{1-x^2}{2x} \ (x>0). \end{cases}$$

$x^2+2=4\cdot\frac{(1-x^2)^2}{4x^2};$

$x^2+2=\frac{1+x^4-2x^2}{x^2};$

$x^2+2=\frac{1}{x^2}+x^2-2;$

$\frac{1}{x^2}=4;$

$x^2=0{,}25;$

$$\left[\begin{array}{l} x=0{,}5 \\ x=-0{,}5 \text{ — не удовл. } x>0 \end{array}\right.$$

$y=\frac{1-0{,}25}{1}=0{,}75,\quad z=y=0{,}75.$

12

Ответ: $(0{,}5;\ 0{,}75;\ 0{,}75)$

№ 2

Пусть II кассир обслужил $x$ клиентов до обеда, $y$ после обеда. Используя данные из условия задачи, составим первое уравнение.

$$\underbrace{0{,}75x+1{,}2y}_{\text{I кассир всего}}=\overset{\text{коэффициент}}{1{,}1}\underbrace{(x+y)}_{\text{II кассир всего}}$$

Также по условию составим неравенство:

$$\underbrace{x+y}_{\text{II кассир}}+\underbrace{1{,}1(x+y)}_{\text{I кассир}}<250 \qquad 2{,}1(x+y)<250$$

Очевидно, что $x\in N$ и $y\in N$, потому что это количество клиентов. Тогда рассмотрим, используя данные нам условия, чему должен быть кратен $x$ и $y$, чтобы кол-во клиентов было целым.

$0{,}75x=\frac{3}{4}x \Rightarrow x\vdots 4$ $\qquad 1{,}1x=\frac{11}{10}x \Rightarrow x\vdots 10$

$1{,}2y=\frac{12}{10}y=\frac{6}{5}y \Rightarrow y\vdots 5$ $\qquad 1{,}1y=\frac{11}{10}y \Rightarrow y\vdots 10$

$\begin{cases} y\vdots 5\\ y\vdots 10\end{cases} \Rightarrow \underline{y\vdots 10}$ $\qquad \begin{cases} x\vdots 4\\ x\vdots 10\end{cases} \Rightarrow \underline{x\vdots 20}$

Теперь преобразуем уравнение, составленное вначале.

$0{,}75x+1{,}2y=1{,}1x+1{,}1y;$

$0{,}35x=0{,}1y;$

$y=3{,}5x.$

12б

Теперь покажем, что минимальное значение $x=20$ (т.к. $x\in N$ и $x\vdots 20$) и следующее из него значение $y=3{,}5\overset{20}{x}=70$ – это единственные значения, которые удовлетворяют составленному ранее неравенству.

Во-первых, $2{,}1(20+70)=2{,}1\cdot 90=189<250$ – верно

Возьмем следующее $x\in N$ и $x\vdots 20$ – это $x=40$. При нём $y=3{,}5\cdot 40=140$

$2{,}1(40+140)=2{,}1\cdot 180=378<250$ – неверно.

Очевидно, что с ростом $x$ растёт $y$, значит растёт и их сумма, поэтому ещё значения $x$ и $y$, при которых неравенство выполняется, больше не существует.

Тогда $x=20$, $y=70$

I кассир обслужил $0{,}75\cdot 20+1{,}2\cdot 70=15+84=99$ (клиентов)

Ответ: 99 клиентов

Шифр 46-09-05

№ 3

Каждая группа точек, которую мы возьмём, образует единственный выпуклый многоугольник. Группы точек, которые отличаются друг от друга порядком точек, образуют один и тот же многоугольник, то есть порядок не важен (чтобы он стал выпуклым, точки всё равно будут соединять последовательно идя по окружности). При этом важно, чтобы в группе точек их было как минимум 3.

Теперь посчитаем группы точек, образующие многоугольник с точкой A.

$n_a = 2^{2024} - 2024$

Пояснение: каждая из оставшихся 2024 точек может быть или включена в группу, или не включена ($2^{2024}$), и при этом мы исключаем случаи, в которых в группе только 2 точки - это точка A и еще какая-то (способов выбрать какую-то точку - 2024)

Посчитаем группы точек, не образующие многоугольник с точкой A

$n_б = 2^{2024} - 2024 - C^2_{2024}$

Пояснение: $2^{2024}$ (-11-), 2024 (-11-), $C^2_{2024}$ - исключаем случаи, когда в группе оказалось только 2 точки.

Видим, что $n_a > n_б$. И разница - это $C^2_{2024}$

$$C^2_{2024} = \frac{2024 \cdot 2023}{2} = 1012 \cdot 2023 = 2047276$$

13б

Ответ: 2047276.

46-04-05

# № 4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + 4x + 2024$

$f(g(x)) = (x^2+4x+2024)^3 + a(x^2+4x+2024)^2 + b(x^2+4x+2024) + c$ — растущая функция

определяется по коэф. перед старш

с увеличением $g(x)$ она тоже растёт. $g(x)$ - также растущая, поэтому с увеличением $x$ растёт $f(g(x))$

Минимальное значение $g(x)$:

$g(x) = (x^2+4x+4) + 2020 = (x+2)^2 + 2020$ - очевидно, минимальное значение 2020 при $x = -2$.

По условию $f(g(x))$ не имеет корней (пересечений с $Ox$). Т.к. $f(g(x))$ - растущ и у неё нет пересечений с $Ox$, все значения $f(g(x)) > 0$.

Минимальное значение $f(g(x))$ достигается при минимальном $g(x)$, т.к. $f(g(x))$ - растущая. Запишем неравенство:

$f(2020) = 2020^3 + a \cdot 2020^2 + b \cdot 2020 + c > 0$

~~Можем получить следующие факты:~~ $\cancel{a > -2020,\ b > -2020^2,\ c > -2020^3}$

Запишем $f(2024)$:

$(2020+4)^3 + (2020+4)^2 a + 2024b + c$

Теперь рассмотрим ~~их~~ разность $f(2024)$ и $f(2020)$:

$(2020+4)^3 - 2020^3 + (2020+4)^2 a - 2020^2 a + 2024b - 2020b = 3 \cdot 4 \cdot 2020^2 + 3 \cdot 2020 \cdot 16 + 16 + 8 \cdot 2020a + 16a + 4b$

Если какое-то из $a, b, c > 0$, то функция очень быстро растёт и $f(2024) > 64$.

иначе: $b > -2020^2$ $\quad a > -2020$ $\quad c > -2020^3$

$8 \cdot 2020a + 8 \cdot 2020^2 > 0$

$16a + 2020 \cdot 16 > 0$

$4b + 4 \cdot 2020^2 > 0$

$2 \cdot 2020 + 16 > 64$.

10б

**Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»**

Шифр 46-09-05

## № 5

Дано:

$V_0 = 30$ м/с

$\alpha = 60°$

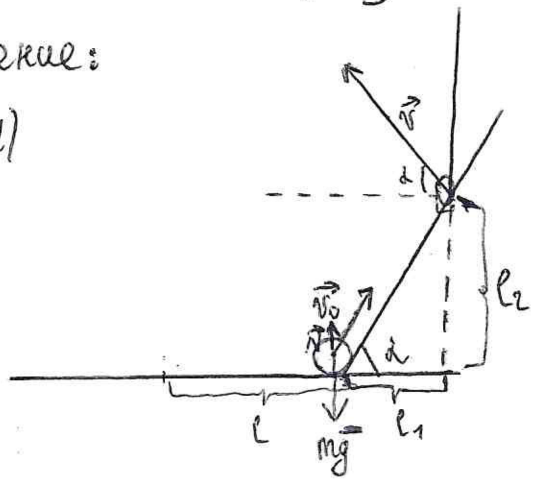
$V = 20$ м/с

$g = 10$ м/с²

$l$ - ?

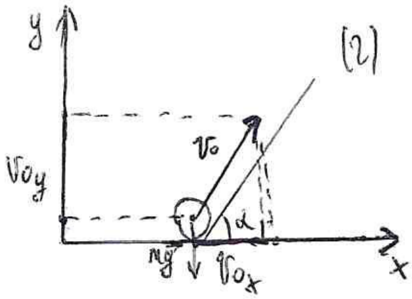
Решение:

(1)




Для начала найдём $l_1$ - расстояние от начальной точки до стены. Сделаем отдельный рисунок (2).

И $l_2$ - высоту удара




$V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha$; $V_{0y} = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ (м/с)

$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha$ $V_{0x} = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ (м/с)

$V_{0x}$ не изменяется, т.к. $V_{0x} \perp m\vec{g}$

$\Delta V = V_0 - V = V_{0y} - V$;

$V_{0y} - V = 10$;

$V_y = V_{0y} - 10$; $V_y = 15\sqrt{3} - 10$ (м/с)

$V_y = V_{0y} - gt$;

$t = \frac{V_{0y} - V}{g}$; $t = \frac{15\sqrt{3} - 15\sqrt{3} - 10}{10} = 1$ (с)

$l_1 = V_{0x} \cdot t$;

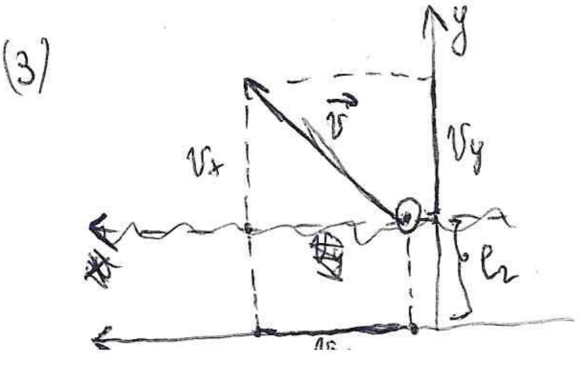
$l_1 = 15$ м

По рисунку (1) $l_2 = l_1 \cdot tg\,\alpha$;

$l_2 = 15\sqrt{3}$ (м)

Теперь посчитаем, через какое время шарик упадёт на землю.

(3)




$V_x = V_{0x} = 15$ м/с

$V_y = 15\sqrt{3} - 10$ (м/с)

~~$X_y = l_2 + V_y t + \frac{gt^2}{2}$;~~

~~$0 = 15\sqrt{3} + (15\sqrt{3} - 10)t - 5t^2$~~

Посчитаем, когда $V_y$ будет равен 0.

$V_{yк} = V_y - gt$;

~~$0 = 15\sqrt{3} - 10 - 10t$;~~

$t_1 = \frac{V_y - V_{yк}}{g} \approx 1,55$ с

46-09-05

~~В этот момент~~ $y = l_2$, т.к. движение происходит по параболе.

Теперь посчитаем, когда координата по $y$ станет $0$

$$x_y = l_2 + \frac{at^2}{2};$$

$$0 = 15\sqrt{3} - 5t^2;$$

$$5t^2 = 15\sqrt{3};$$

$$t^2 = 5\sqrt{3};$$

$$t^2 \approx 8{,}5;$$

$$t_2 \approx 2{,}9 \text{ (с)}$$

Посчитаем всё время полёта:

$$t_{общ} = 2t_1 + t_2;$$

$$t_{общ} = 1{,}55 \cdot 2 + 2{,}9 = 3{,}1 + 2{,}9 = 6 \text{ (с)}$$

Скорость $V_x$ не менялась, найдём изменение координаты по $x$.

$$x = V_x t_{общ};$$

$$x = 15 \cdot 6 = 90 \text{ (м)}$$

Чтобы найти $l$, вычтем расстояние от точки старта до стены.

$$l = x - l_1;$$

$$l = 90 - 15 = 75 \text{ (м)}$$

Ответ: 75 м.

8 б

## №6

Дано:

$S = 15$ см$^2$

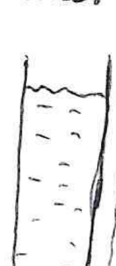
$\rho_в = ~~1000~~$ ~~кг/м$^3$~~ 1 г/см$^3$

$\rho_л = 0{,}9$ г/см$^3$

График $h(t)$

$m_л, m_в - ?$

Решение:



$h_в$

$h_л$

Высота столба воды уменьшилась из-за того, что лёд растаял. Мы знаем, что при таянии масса льда и образовавшейся воды не меняется. Запишем равенства масс до и после таяния льда (конкретно массы льда)

~~$\rho_л S (h_л - 5) = \rho_в S$~~

$$\rho_л S h_л = \rho_в S (h_л - 5);$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = 120 - 115 = 5 \text{ (см)}$$ по графику

$$\rho_л h_л = \rho_в h_л - \rho_в \cdot 5;$$

$$h_л (\rho_л - \rho_в) = -\rho_в \cdot 5;$$

$$h_л = \frac{5 \cdot \rho_в}{\rho_в - \rho_л}; \quad h_л = \frac{5 \cdot 1}{1 - 0{,}9} = \frac{5}{0{,}1} = 50 \text{ (см)}.$$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 46-09-05

Зная изначальную высоту столба льда, найдём массу льда.

$m_л = \rho_л \cdot S \cdot h_л$; $m_л = 0{,}9 \cdot 15 \cdot 50 = 675$ г

$h_в = h_1 - h_л$;

$h_в = 120 - 50 = 70$ (см)

Найдём массу воды:

$m_в = \rho_в \cdot S \cdot h_в$;

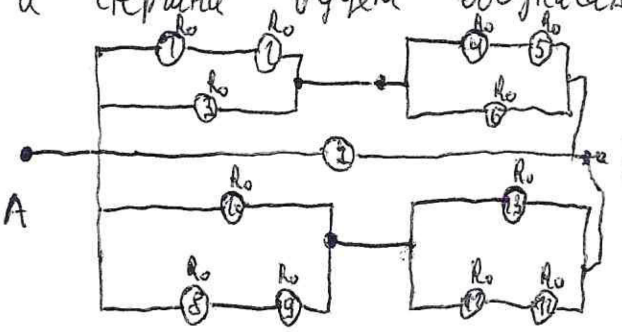
$m_в = 1 \cdot 15 \cdot 70 = 1050$ г

Ответ: 675 г; 1050 г.

10 б

№ 7

Нарисуем эквивалентную схему. Для удобства в построении схемы, представим, что все сопротивление стержня содержится в одной точке, и стержни будем обозначать этими точками.



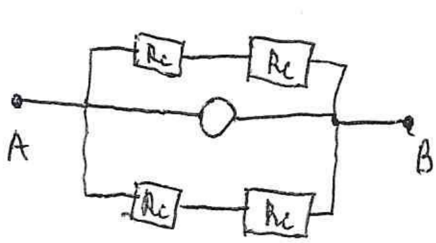
Стержни 1, 2, 3 и 4, 5, 6 и 8, 9, 10 и 11, 12, 13 образуют одинаковую структуру. Обозначим сопротивление такой структуры $R_c$ и посчитаем его.

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{R_0};$$

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8};$$

$$\frac{1}{R_c} = \frac{3}{16};$$

$$R_c = \frac{16}{3}.$$



Посчитаем сопротивление всей системы

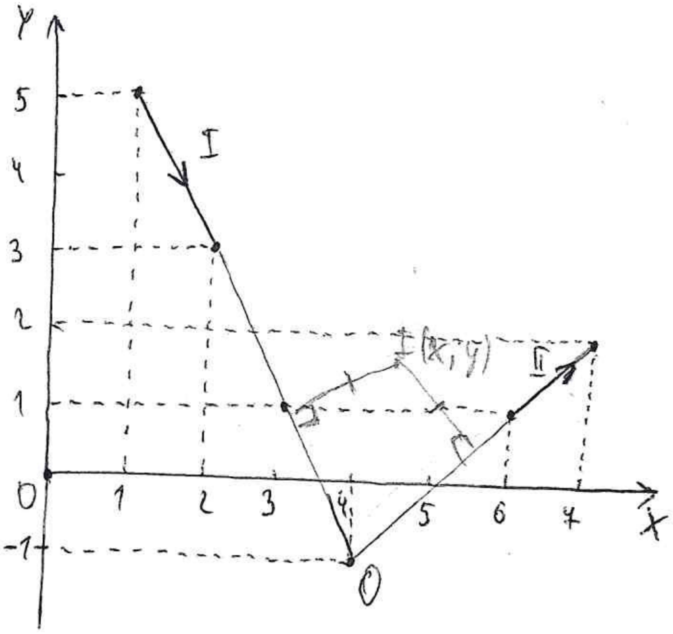
10 б

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{2R_c} + \frac{1}{R_0};$$

$$\frac{1}{R} = \frac{3}{16} + \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{R} = \frac{5}{16} \quad R = \frac{16}{5} = 3{,}2 \text{ (Ом)}$$

46-09-05

# № 8




Составим уравнения прямых, ~~зад~~ на которых лежат лучи I

I: $\begin{cases} 5=k+b, \\ 3=2k+b, \end{cases}$ $\begin{cases} b=7 \\ k=-2 \end{cases}$ I: $y=-2x+$

II: $\begin{cases} 2=7k+b, \\ 1=6k+b, \end{cases}$ $\begin{cases} b=-5 \\ k=1 \end{cases}$ II. $y=x-5$

Рассчитаем координаты их пересечения - эта точка и будет точкой отражения.

$\begin{cases} y=-2x+7, \\ y=x-5, \end{cases}$ $\begin{cases} x-5=-2x+7, \\ y=x-5, \end{cases}$ $\begin{cases} -3x=-12, \\ y=x-5, \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

O(4;-1)

65