

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-29

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	13	4	10	15	-	79

Вариант 2

Задание №1

$$\begin{cases} x^2 + 2 = (y + z)^2 \\ y^2 + 1 = (x + z)^2 \\ z^2 + 1 = (x + y)^2 \end{cases} \quad \text{где } x, y, z \geq 0$$

$$y^2 + 1 - z^2 - 1 = (x + z)^2 - (x + y)^2$$

$$(y - z)(y + z) = (z - y)(2x + z + y)$$

1. если $y \geq z$

$$\text{то } \underbrace{(y - z)}_{\geq 0} \underbrace{(y + z)}_{\geq 0} \geq 0, \text{ но тогда } \underbrace{(z - y)}_{\leq 0} \underbrace{(2x + z + y)}_{\geq 0} \leq 0$$

$$\text{так } (y - z)(y + z) \geq 0 \text{ и } (z - y)(2x + z + y) \leq 0$$

$$(y - z)(y + z) = (z - y)(2x + z + y)$$

$\Downarrow$

$$y - z = 0$$

$$y = z$$

$$x^2 + 2 = (y + z)^2 = (2y)^2$$

$$x^2 + 2 = 4y^2$$

$$y^2 = \frac{x^2 + 2}{4}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2 + 2}{4}} \quad \text{при этом } x^2 + 2 > 0 \text{ и } y \geq 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2}$$

$$\frac{x^2 + 2}{4} + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2}\right)^2$$

$$\frac{x^2 + 2}{4} + 1 = x^2 + \frac{2x\sqrt{x^2 + 2}}{2} + \frac{x^2 + 2}{4}$$

$$1 = x^2 + \frac{2x\sqrt{x^2 + 2}}{2}$$

$$1 - x^2 = x\sqrt{x^2 + 2}$$

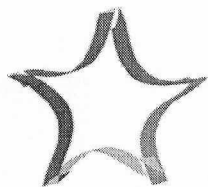
$$\begin{aligned} (1 - x^2)^2 &= x^2(x^2 + 2) \\ 1 - 2x^2 + x^4 &= x^4 + 2x^2 \end{aligned}$$

$$4x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \text{ при этом } x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = z = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{2} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2} ; y = \frac{3}{4} ; z = \frac{3}{4}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-29

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача №2

Пусть до обеда 2-ой обсерватории x , тогда 1-ой обсерватории $0,75x$. После обеда 2-ой обсерватории y , тогда 1-ой обсерватории $1,2y$. Поскольку по мнению 1-ой кассир обсерватории на 10% больше, то: $0,75x + 1,2y = 1,1(x + y)$

$$0,75x + 1,2y = 1,1x + 1,1y$$

$$0,1y = 0,35x$$

$$10y = 35x$$

$$y = \frac{7}{2}x$$

$$\text{Тогда } \frac{7}{2}x + x < 250$$

$$\frac{9}{2}x < 250$$

$$x < \frac{500}{9}$$

$$x \leq 55$$

$$\frac{7}{2}x + x + \frac{75}{100}x + \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{2}x < 250$$

$$\frac{133}{20}x < 250 \Rightarrow x \leq 30$$

Тогда x может принимать только значения 0, при этом $x \leq 55$

1. если $x = 50 \Rightarrow y = \frac{7 \cdot 50}{2} = 175$, но $0,75x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ противоречие

2. если $x = 40 \Rightarrow y = \frac{7 \cdot 40}{2} = 140$; $0,75x = 30 \in \mathbb{Z}$, $1,2y \in \mathbb{Z}$

Тогда $x = 40$ подходит

3. если $x = 30$, то $0,75x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ противоречие

4. если $x = 20$, то $y = \frac{7 \cdot 20}{2} = 70$; $0,75x = 15 \in \mathbb{Z}$, $1,2y \in \mathbb{Z}$; Тогда $x = 20$ тоже подходит

5. если $x = 10$, то $0,75x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ противоречие

Тогда 1 обсерватории $30 + 168 = 198$ или $15 + 84 = 99$

Ответ: ~~30 или 15~~ ~~198 или 99~~

Заменим, что $0,75x$ — целое число тогда $\frac{75 \cdot x}{100} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 75 \cdot x$ делится на два нуля (в их десятичной записи)

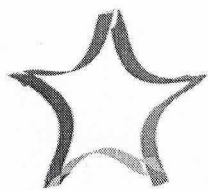
Тогда x оканчивается на 0 или на 2 (так $5 \cdot 0 = 0$ и $5 \cdot 2 = 10$)

При этом $1,2y$ тоже целое число почитаемой

$$\text{тогда } \frac{12 \cdot 7}{2 \cdot 10} x \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{6 \cdot 7x}{10} \in \mathbb{Z}$$

Или $\frac{42x}{10} \in \mathbb{Z}$, тогда $42x$ оканчивается на 0 $\Rightarrow x$ оканчивается на 0 или на 5 (так $2 \cdot 0 = 0$ и $5 \cdot 2 = 10$)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-29

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача 13

Заметим, что из точек n точек на окружности
можно составить единственный многоугольник вписанный
Тогда кол-во различных многоугольников без $T.A$
равно $C_3^{2024} + C_4^{2024} + C_5^{2024} + C_6^{2024} + \dots + C_{2023}^{2024} + C_{2024}^{2024}$

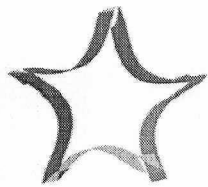
(кол-во способов выбрать 3 т. $\Rightarrow$ кол-во различных треугольников)
 $\Rightarrow C_m^{2024}$ — кол-во m -угольников

При этом кол-во вписанных многоугольников
содержащих $T.A$ равно $C_2^{2024} + C_3^{2024} + C_4^{2024} + \dots + C_{2023}^{2024} + C_{2024}^{2024}$

(так для составленного треугольника нужно выбрать еще
две точки, для составленного 4-х угольника еще 3 и т.д.)

Тогда кол-во вписанных многоугольников содержащих
 $T.A$ больше кол-ва многоугольников не содержащих $T.A$ на C_2^{2024}

$$C_2^{2024} = \frac{2024!}{2! \cdot 2022!} = \frac{2023 \cdot 2024}{2} = 2023 \cdot 1012 = \cancel{24276} \quad 2047276$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-29

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача №4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных корня
тогда $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, где x_1, x_2, x_3 — его действительные
корни

Рассмотрим $g(x)$:

$$g(x) = x^2 + 4x + 2024$$

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 + 2020$$

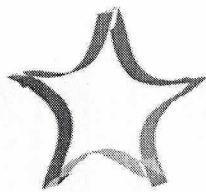
$$g(x) = (x+2)^2 + 2020 \Rightarrow g(x) \geq 2020 \text{ при любых значениях } x$$

(так $(x+2)^2 \geq 0$)

Тогда так $f(g(x))$ корней не имеет
а $g(x) \geq 2020$, то корни $f(x) < 2020$ (очевидно, что такое $g(x)$ будет иметь корни)
рассмотрим $f(2024)$:

$$f(2024) = (2024-x_1)(2024-x_2)(2024-x_3)$$

при этом $x_1, x_2, x_3 < 2020 \Rightarrow 2024-x_1 > 4, 2024-x_2 > 4, 2024-x_3 > 4$
тогда $f(2024) > 4^3 = 64$, что и требовалось доказать



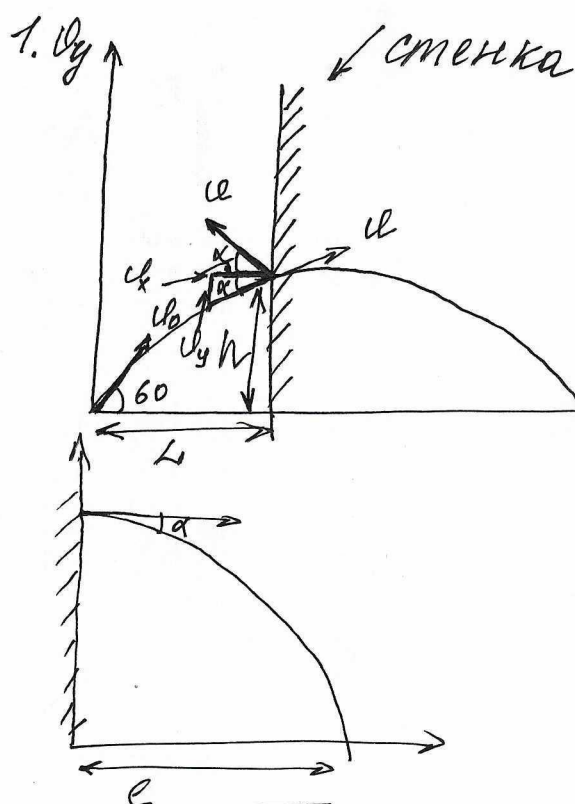
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-29

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 5

~~Максимальная дистанция:~~



$$v_{0x} = v_0 \cos 60 = \frac{v_0 \sqrt{3}}{2} = \frac{v_0 \cdot 1}{2} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

пусть шарик ударился об стенку

под углом α

$$v_x = v_{0x}, \text{ тогда } \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Пусть h — высота где он достиг скорости v

тогда $v_y = v_{0y} + gt$
 $v_y = v_0 \sin 60 - gt$

$$v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2} = \sqrt{20^2 - 15^2} = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$$

$$5\sqrt{7} = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{2} - 10t$$

$$L = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \leftarrow v_0 \sqrt{\frac{h}{5}} = 20\sqrt{\frac{h}{5}} \quad t = \frac{15\sqrt{3} - 5\sqrt{7}}{10} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$$

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{20(3\sqrt{3} - \sqrt{7})}{2} - \frac{5(3\sqrt{3} - \sqrt{7})^2}{4}$$

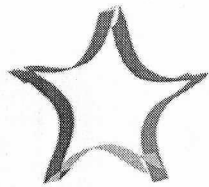
$$h = 45\sqrt{3} - 15\sqrt{7} - \frac{5 \cdot 27}{4} + \frac{5 \cdot 3\sqrt{21}}{2} = \frac{35}{4}$$

$$h = 45\sqrt{3} - 15\sqrt{7} - \frac{160}{4} + \frac{15\sqrt{21}}{2}$$

$$h = 45\sqrt{3} - 15\sqrt{7} - 40 + \frac{15\sqrt{21}}{2}$$

$$L = v_{0x} t = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} \cdot v_{0x} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} \cdot 15$$

$\Delta L = L - e$ — что и требовалось найти



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-29

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача №6

Заметим, что через 20 минут лед полностью растаял. При этом уровень воды уменьшился на 5 см.

Пусть изначально высота льда равна h_1

Тогда $h_1 S_{пл} \rho_{л} = m_1 = (h_1 - 5) S_{пв} \rho_{в} = m_2$ (так m_1 не изменяется)
т.е. m_2 в которой образовалась при таянии льда m_1

$$h_1 \rho_1 = (h_1 - 5) \rho_2$$

$$0,9 h_1 = h_1 - 5$$

$$5 = 0,1 h_1$$

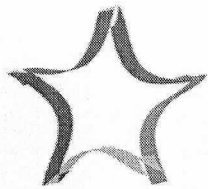
$$\underline{h_1 = 50}$$

Тогда исходная высота воды равна $120 - 50 = 70$
тогда исходная масса воды и льда равна:

$$m_2 = h_2 \cdot S \cdot \rho_2 = 70 \cdot 15 \cdot 1 = 1050 \text{ граммы}$$

$$m_1 = h_1 S \rho_1 = 50 \cdot 15 \cdot 0,9 = 675 \text{ граммы}$$

Ответ: $m_2 = 1050$ граммы, $m_1 = 675$ граммы



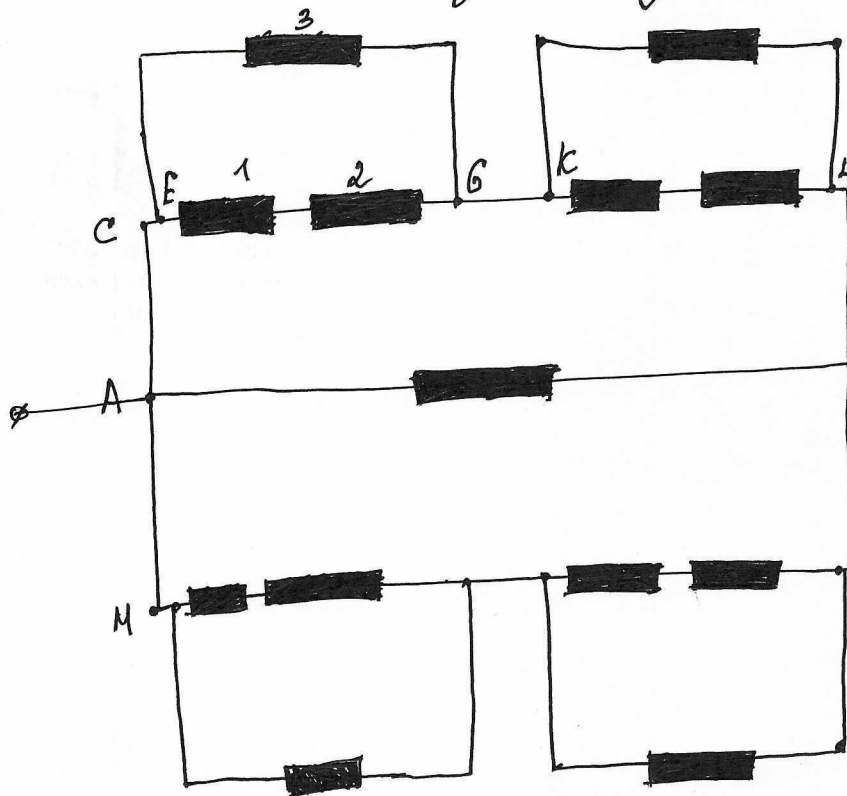
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-29

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Преобразуем нашу схему! Задача № 7



Запишем
максимальные
сечения на проводах
и резисторах
сопротивление каждого
из которых равно $R_0 = 8 \text{ Ом}$

Сопротивление участка
 $EG = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3}$ (мк 1 и 2
параллельно)
3

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 8 + 8 = 16$$

$$R_3 = 8$$

$$R_{EG} = \frac{16 \cdot 8}{24} = \frac{16}{3}$$

Сопротивление $KL =$ сопротивлению $EG = \frac{16}{3}$

Тогда сопротивление $CD = KL + EG = \frac{32}{3}$ (мк KL и EG соединены
последовательно)

Сопротивление $MN =$ сопротивлению $CD = \frac{32}{3}$

Тогда пусть сопротивление $AB = R$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{CD}} + \frac{1}{R_{MN}} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{6}{32} + \frac{1}{8} = \frac{10}{32}$$

$$R = 3,2 \text{ Ом}$$

Ответ: $3,2 \text{ Ом}$