

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-144

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	8	3	10	10	15	15	83

Вариант 2

$$N1. \quad 7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$$

Пусть $\sqrt{2-\log_3 x} = t, t \geq 0$

тогда $2-\log_3 x = t^2 \Rightarrow \log_3 x = 2-t^2$

$$7t - 3|2(2-t^2) - 5| \leq 7(2-t^2) - 3|2t - 5|$$

построим таблицу знаков

нули: $2(2-t^2) - 5 = 0$ $2t - 5 = 0$

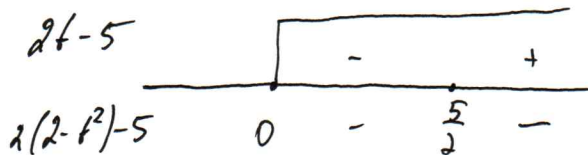
$$4 - 2t^2 - 5 = 0$$

$$t = \frac{5}{2}$$

$$2t^2 = -1$$

$$t^2 = -\frac{1}{2}$$

$$t^2 > -\frac{1}{2} \text{ при } t \in \mathbb{R}$$



$\Rightarrow$ получаем систему неравенств:

$$(1) \begin{cases} 7t + 6(2-t^2) - 15 \leq 14 - 7t^2 + 6t - 15 \\ t \in [0; \frac{5}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7t + 12 - 6t^2 - 14t + 7t^2 - 6t \leq 0 \\ t \in [0; \frac{5}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + t - 2 \leq 0 \\ t \in [0; \frac{5}{2}] \end{cases} \Rightarrow \boxed{t \in [0; 1]}$$

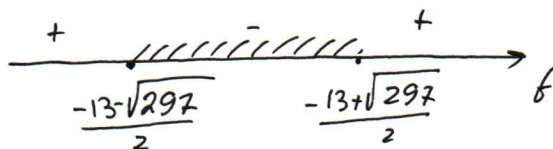
$$(2) \begin{cases} 7t + 12 - 6t^2 - 15 \leq 14 - 7t^2 - 6t + 15 \\ \text{если } t > \frac{5}{2} \\ t^2 + 13t - 32 \leq 0 \quad (*) \\ t > \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$(*) \quad t^2 + 13t - 32 \leq 0$$

$$D = 169 + 32 \cdot 4 = 169 + 128 = 297$$

$$\begin{cases} t = \frac{-13 + \sqrt{297}}{2} \\ t = \frac{-13 - \sqrt{297}}{2} \end{cases}$$

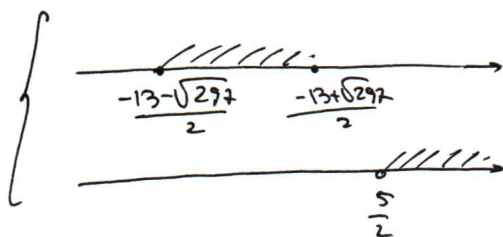
$$\begin{array}{r} 17,3 \quad 2 \\ \times 17,3 \quad 2 \\ \hline 519 \quad 5 \\ 1211 \\ \hline 299,29 \end{array}$$



$$\sqrt{297} > \sqrt{289} \Rightarrow \sqrt{297} > 17 \quad 17,3^2 = 299,29 \Rightarrow 17,2 < \sqrt{297} < 17,3$$

$$\Rightarrow \frac{-13 + \sqrt{297}}{2} \approx \frac{-13 + 17,2}{2} \approx \frac{4,2}{2} \approx 2,1$$

вернемся к началу (2)



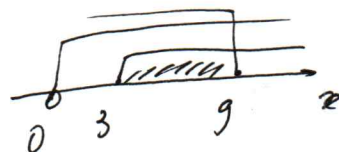
$\Rightarrow$ решение есть $\emptyset$



$$\Rightarrow t \in [0; 1]$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} \sqrt{2 - \log_3 x} \geq 0 \\ \sqrt{2 - \log_3 x} \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{эквивалентно} \quad \begin{cases} \log_3 x \leq 2 \\ \log_3 x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 9 \\ x \geq 3 \\ x > 0 \end{cases}$$



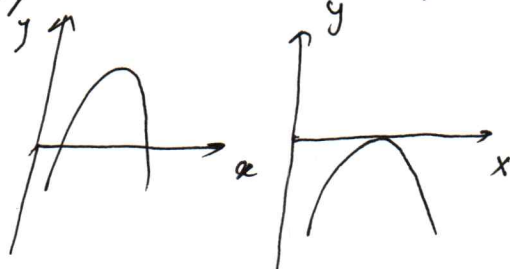
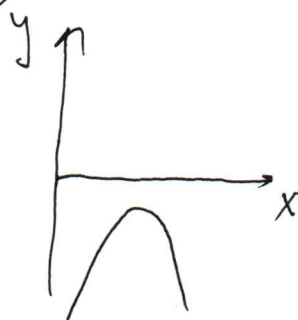
$$\Rightarrow x \in [3; 9]$$

$$\text{Ответ: } [3; 9]$$

№3. $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + 6$ - квадратичная функция, график - парабола

Рассмотрим случаи:

1) $a < 0 \Rightarrow$ графиком $f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз $\Rightarrow$ она не может принимать неотрицательные значения для всех x :



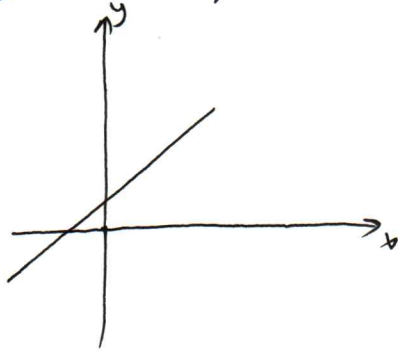


лист 2

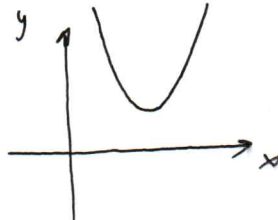
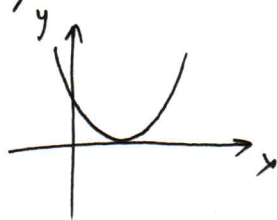
11-22-24T

63-11-144

2) $a=0 \Rightarrow$ графиком $f'(x)$ является прямая $f'(x)=x+b$ и она не может принимать неотрицательные значения для всех x



3) $a > 0 \Rightarrow$ графиком является парабола, ветви которой направлены вверх $\Rightarrow$ она принимает неотрицательные значения, когда $D \leq 0$



$$D = (3a+1)^2 - 4ab = 9a^2 + 6a + 1 - 4ab$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4ab \leq 0 \quad (1)$$

Пусть $4a+b=t$ выразим b и подставим в (1)

$$b = t - 4a$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4a(t - 4a) \leq 0$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4at + 16a^2 \leq 0$$

$$25a^2 + 6a + 1 - 4at \leq 0$$

$$t \geq \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$$

Введем функцию $f(a) = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$

Исследуем данную функцию $f(a)$ на монотонность на $a \in (0; +\infty)$

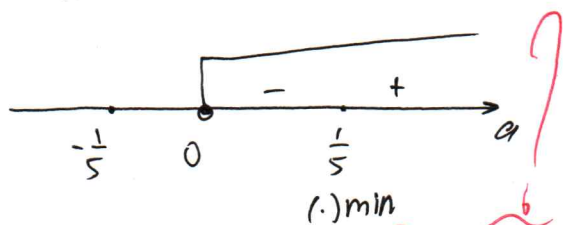
$$f'(a) = \frac{(50a+6) \cdot 4a - 4(25a^2+6a+1)}{16a^2} = \frac{200a^2 + 24a - 100a^2 - 4a - 4}{16a^2} =$$

$$= \frac{100a^2 - 4}{16a^2}$$

нуль функции: $100a^2 - 4 = 0$

$$a^2 = \frac{4}{100}$$

$$a = \pm \frac{2}{10} \quad a = \pm \frac{1}{5}$$



т.к. $a = \frac{1}{5}$ - единственная (.) мин на $a \in (0; +\infty) \Rightarrow b$ не достигается наименьшее значение функции $f(a)$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{5} + 1}{4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1 + \frac{6}{5} + 1}{\frac{4}{5}} = \frac{16 \cdot 5}{5 \cdot 4} = 4$$

$$\Rightarrow 4 \geq 4 \Rightarrow 4a + 6 \geq 4$$

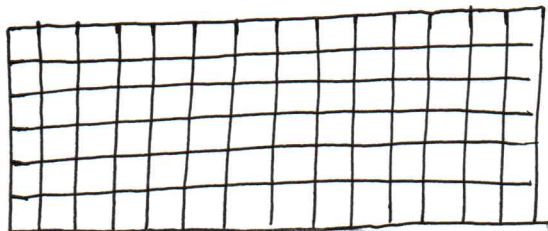
$\Rightarrow$ наименьшее значение выражения $4a + 6 = 4$

Ответ: 4.

14

на

6

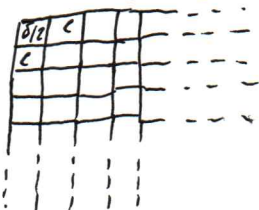


вероятности условия, N - вообще количество возможных раскрасок

т.к. на каждой из клеток т.к. каждая из клеток может быть раскрашена в один из 3-х цветов, а всего клеток $14 \cdot 6 = 84 \Rightarrow N = 3^{84}$

Рассмотрим вариант раскраски, удовлетворяющий условию, что соседние клетки разного цвета и при этом нет резкой смены цвета.

1) если в углу стоит белая или черная клетка:
 $\Rightarrow$ рядом с этой клеткой справа от границы стоять серая клетка
 б/ч - белая или черная
 с - серая



$\Rightarrow$ рядом с серыми могут также стоять

белая или черная клетки.

То есть серые клетки будут располагаться в шахматном порядке и их количество равно 42



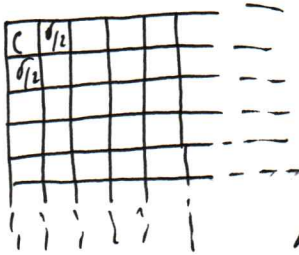
лист 3

14-22-247

тогда количество клеток, на которых можно расставить белую белую или черную равно $84-42=42$

т.к. ~~на~~ одну из 42 клеток можно поставить в одну из двух цветов, количество комбинаций равно 2^{42}

а) если в левый верхний угол поставить серую клетку:



в данном случае получаем симметричные фигуры и количество "раскрасок" равно также 2^{42}

$$\Rightarrow N_1 = 2^{42} + 2^{42} = 2^{43}$$

$$\Rightarrow P = \frac{N_1}{N} = \frac{2^{43}}{3^{84}}$$



Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$

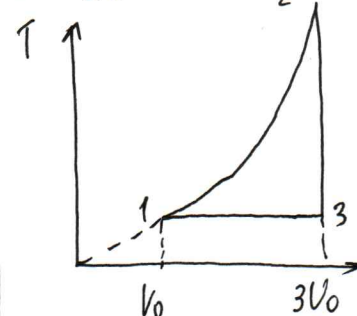
№7 Дано:
 $V_3=3V_1$
 $T=kV^2$

$V_{23}=const$
 $T_{31}=const$
 $A_{12}=3,64 \cdot A_{31}$

$\eta = ?$

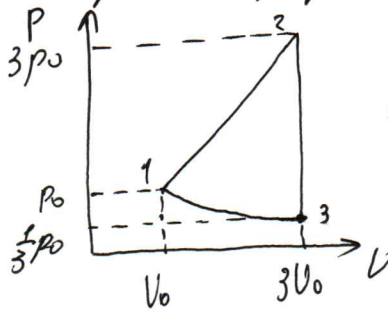
Решение:

$$\eta = \frac{A}{Q_{in}} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{Q_{in}} = 1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}$$



построим

построим график в координатах P-V:



для 3-й Менделеев-Классификации:

$pV = \nu RT$
 $pV = \nu R k V^2$
 $p = \nu R k V$ - прямо пропорциональная зависимость

Пусть V_0 - ~~данный~~ объем в точке 1, p_0 - давление в точке 1 $\Rightarrow$ для процесса 1-2: $p_1 V_1 = p_2 V_2$
при увеличении объема в 3 раза $p_1 V_1 = p_2 V_2$
давление тоже увеличится в 3 раза $\Rightarrow p_2 = 3p_0$

зад процесс 3-1: $T = \text{const} \Rightarrow p_3 V_3 = p_1 V_1$
 $p_3 \cdot 3V_0 = p_0 V_0$
 $p_3 = \frac{1}{3} p_0$

$Q_H = Q_{12}$

$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$

$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} (p_0 \cdot 3V_0 - p_0 V_0) = \frac{3}{2} \cdot 8 p_0 V_0 = 3 \cdot 4 p_0 V_0$

$A_{12} = \frac{p_0 + 3p_0}{2} \cdot 2V_0 = 4p_0 V_0$ (по формуле для изохоры)

$\Rightarrow \Delta U_{12} = 3A_{12}$

$\Rightarrow Q_H = 4A_{12} = 4 \cdot 3,64 A_{31} = 14,56 A_{31}$

$$\begin{array}{r} 3,64 \\ + 3,64 \\ \hline 14,56 \end{array}$$

$|Q_H| = |Q_{12}| + |Q_{23}| + |Q_{31}|$

$|Q_{23}| = |\Delta U_{23} + A_{23}| = \left| \frac{3}{2} (p_3 V_3 - p_2 V_2) \right| = \left| \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} p_0 \cdot 3V_0 - p_0 \cdot 3V_0 \right) \right| = \left| \frac{3}{2} \cdot (-8 p_0 V_0) \right| = 3 \cdot 4 p_0 V_0 = 3A_{12}$
 $A_{23} = 0$ т.к. $V = \text{const}$

$|Q_{31}| = |\Delta U_{31} + A_{31}| = A_{31}$

$\Rightarrow |Q_H| = 3A_{12} + A_{31} = 3 \cdot 3,64 A_{31} + A_{31} = 11,92 A_{31}$

$$\begin{array}{r} 3,64 \\ + 3 \\ \hline 10,92 \end{array}$$

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{11,92 A_{31}}{14,56 A_{31}}$

$\eta \approx 1 - 0,8186 \approx 0,1814$

$\eta = 18,14\%$

Ответ: 18,14%

$$\begin{array}{r} 11,92 \mid 14,56 \\ - 0 \\ \hline 11,920 \\ - 11,648 \\ \hline 27'20 \\ - 1456 \\ \hline 121640 \\ - 11648 \\ \hline 99120 \\ - 8736 \\ \hline 11940 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,8186 \\ 1,0000 \\ - 0,8186 \\ \hline 0,1814 \end{array}$$

№. Дано:

$R_p = -5 \text{ Ом}$

$d_1 = 6 \text{ см}$

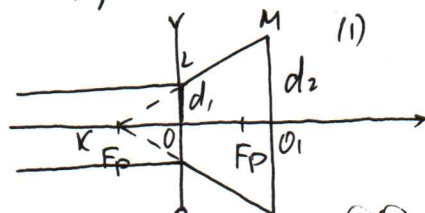
$d_2 = 12 \text{ см}$

$R_1 = ?$

Решение:

F_p - фокусное расстояние рассеивающей линзы

$F_p = \frac{1}{R_p}$; $F_p = -\frac{1}{5}$



из подобия $\triangle KLO$ и $\triangle KMO$ (по двум углам):

$\frac{d_2}{d_1} = \frac{|F_p| + OO_1}{|F_p|}$

$\frac{12}{6} = \frac{|F_p| + OO_1}{|F_p|} \Rightarrow 2|F_p| = |F_p| + OO_1$
 $|F_p| = OO_1$

$OO_1 = \frac{1}{5}$

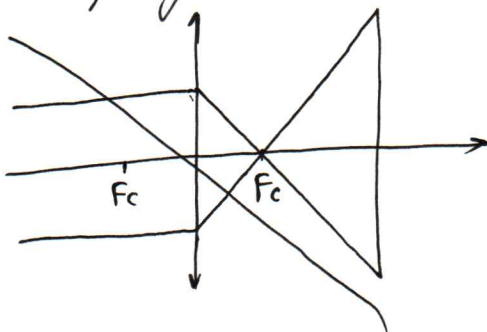


11-22-24 Т

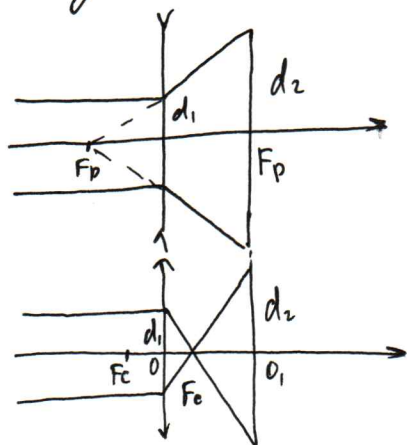
63-11-144

лист 4

F_c - фокусное расстояние рассеивающей линзы



перепишем (1) для того изображения с действительной линзой:



аналогично из подобия 4 треугольников:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{00_1 - |F_c|}{|F_c|}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{00_1 - |F_c|}{|F_c|}$$

$$2|F_c| = 00_1 - |F_c|$$

$$3|F_c| = 00_1$$

$$F_c = \frac{1}{5.3} = 0.28$$

$$R_c = \frac{\rho}{F_c} = \frac{1 \cdot 15}{1} = 15 \text{ Ом}$$

Ответ: 15 Ом

№6. Дано:

$$C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

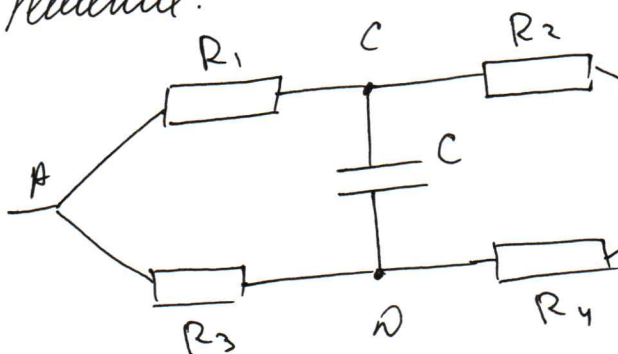
$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 40 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 30 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 420 \text{ В}$$

Решение:



через диэлектрик
трассировки внешнего
конденсатор заземлен
В и тем в цепи
теперь не будет

$$I_{12} = I_1 = I_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{420}{30} = 14 \text{ А (т.к. соединены } R_1 \text{ и } R_2 \text{ последовательно, а } I_{12} \text{ - сила тока через } R_1 \text{ и } R_2 \text{ резисторы } R_2 \text{ и } R_3 \text{ соединены параллельно)}$$

$$I_{34} = I_3 = I_4 = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{420}{70} = 6 \text{ А } I_{34} \text{ - сила тока через } R_3 \text{ и } R_4$$

9-?

$\varphi_c, \varphi_A, \varphi_D$ — потенциалы в узлах C, A, D, соответственно

$$\varphi_c - \varphi_A = \gamma_{12} \cdot R_1 = 14 \cdot 20 = 280 \text{ В} \quad (1)$$

$$\varphi_D - \varphi_A = \gamma_{34} \cdot R_3 = 6 \cdot 40 = 240 \text{ В} \quad (2)$$

Вычтем (2) из (1):

$$\varphi_c - \varphi_D = 280 \text{ В} - 240 \text{ В} = 40 \text{ В}$$

$$q = C \cdot (\varphi_c - \varphi_D)$$

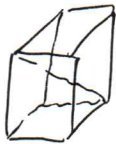
$$q = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Кн}$$

Ответ: $20 \cdot 10^{-3} \text{ Кн}$

нч. Рассмотрим другие варианты:

1) параллелепипед $1 \times 1 \times 1$

он пересекает



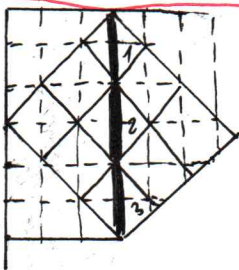
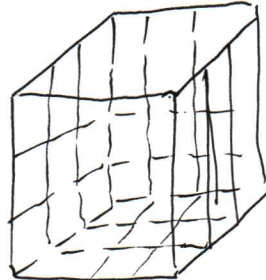
одну диагональ единичного куба

диагональ

он пересекает по трем ребрам

2) рассмотрим параллелепипед $3 \times 3 \times 3$

легко видно, что диагональ пересекает 3 единичных куба



формула для вычисления кол-ва ^{единичных} кубов, которые пересекает диагональ:

$$a + b + c - \underbrace{\text{НОД}(a; b)}_{\text{ребра}} - \text{НОД}(a; c) - \text{НОД}(b; c) + \text{НОД}(a; b; c)$$

где a, b, c — ~~стороны~~ ^{ребра} параллелепипеда

проверим её на примерах 1 и 2 : 1) $1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 = 1$ верно.

2) $3 + 3 + 3 - 3 - 3 - 3 + 3 = 3$ верно.

$$\text{НОД}(3; 3) = 3$$

$$\text{НОД}(3; 3; 3) = 3$$



лист 5.

11-22-247
63-11-144

для параллелепипеда со сторонами a, b, c
ребрами $7 \times 8 \times 13$ $\cos(7;8) = 1$; $\cos(7;13) = 1$; $\cos(8;7) = 1$
 $\cos(7;8;13) = 1$

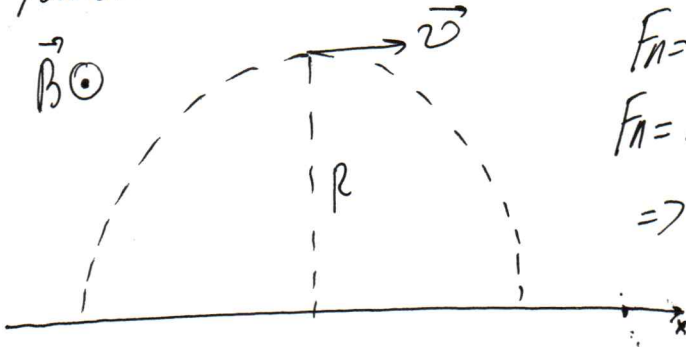
$$7+8+13 - 1 - 1 - 1 + 1 = 28 - 2 = 26$$

Ответ: 26 единичных кубиков



№5. Дано:

Решение:



$$F_n = Bqv \sin \alpha$$

$$F_n = ma_y \quad a_y = \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow Bqv = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{Bq}$$

т.к. частица вошла из магнитного поля, достигнув наибольшей точки, ~~то~~ это произошло, когда высота была равна радиусу окружности и частица к тому времени прошла путь, равный $\frac{1}{4}$ длины окр-ти $\Rightarrow$ она движется в магнитном поле

$$t_1 = \frac{1}{4} T$$

$$T = \frac{2\pi R}{v}; \quad T = \frac{2\pi \cdot \frac{mv}{Bq}}{v} = \frac{2\pi m}{Bq}$$

$$t_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi m}{Bq} = \frac{\pi m}{2Bq}$$

когда, частица вошла в магнитное поле, её скорость равна v , т.к. магнитное поле не изменяет кинетическую энергию.

$R = \frac{av_2^2}{a}$ t_2 - время движения частицы в магн. поле

$$t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2}{a} \cdot \frac{mv}{Bq}}$$

43 ПЗ. Мюммена:

$$Eq = mg$$

$$a = \frac{Eq}{m}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2m}{BqEq}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

при глупении в 90. поле: $\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

зат.:
 $\frac{mv^2}{2} = qU \Rightarrow$

$$U = \frac{kq}{R}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qkq}{mR}} = \sqrt{\frac{2k}{mR}}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2}{BE} \sqrt{\frac{2k}{mR}}}$$

$f = t_1 + t_2$ - полное время

$$f = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2q}{BE} \sqrt{\frac{2k}{mR}}}$$

Ответ: $\frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2q}{BE} \sqrt{\frac{2k}{mR}}}$