

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-143

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	9	0	10	10	15	8	74

Вариант 1

$$1) 9\sqrt{2-\log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7|$$

$$9\sqrt{2-\log_2 x} + 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7| \leq 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 7|$$

Заметим, что в левой и правой части неравенства находятся ~~выражения~~ ^{выражения} вида $9a + 2|4a - 7|$, где a - переменная. При раскрытии модуля ~~выражение~~ ^{выражение} распадается на ~~два~~ ^{два} ~~случая~~ ^{случая} функции.

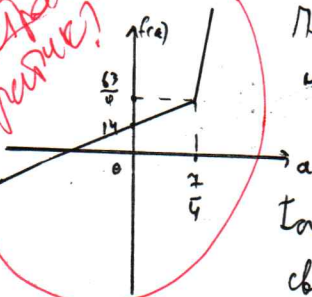
Проверим данную ф-ю на непрерывность, сравнив ее значения в возможной точке разрыва $a = \frac{7}{4}$:

$$\frac{17 \cdot 7}{4} - 14 = \frac{63}{4}$$

$$\frac{9}{4} + 14 = \frac{63}{4}$$

Т.к. значения функции в возможной точке разрыва совпадают, ф-я непрерывна.

Как построить график?



По графику ф-и видно, что функция монотонно возрастает на своем ОДЗ и непрерывна; значит, большему аргументу ф-и соответствует большее значение ф-и. П.1.1)

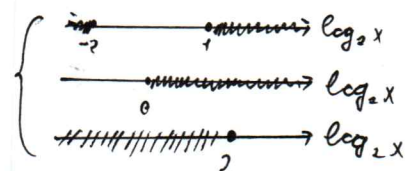
Тогда неравенство $9\sqrt{2-\log_2 x} + 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7| \leq 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 7|$ сводится к неравенству $f(\sqrt{2-\log_2 x}) \leq f(\log_2 x)$, где $f(a) = 9a + 2|4a - 7|$. По доказанному выше (П.1.1), данное неравенство эквивалентно

$$\begin{cases} \sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x \\ \log_2 x \geq 0 \\ 2-\log_2 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geq 0 \\ \log_2 x \geq 0 \\ 2-\log_2 x \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $x \in [2; 4]$

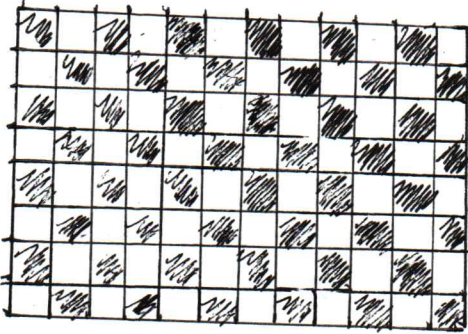
$$\begin{cases} (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 2) \geq 0 \\ \log_2 x \geq 0 \\ \log_2 x \leq 2 \end{cases}$$



$\log_2 x \in [1; 2]$, когда $x \in [2; 4]$

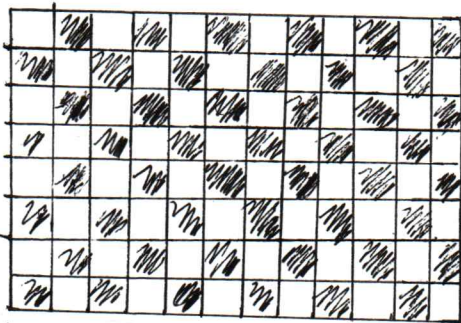
- 2) На каждую из клеток прямоугольника 8×12 у Пети есть 3 варианта раскраски. Значит, всего вариантов раскрасить фигуру у Пети 3^{48} . Если не было резких переходов, Пете раскрасит половину клеток в серый 2 способами, как показано на рисунке:

1 способ



Затраченные клетки - серые. Их ровно половина, то есть 48. Можно закрашивать серой только четные номера, т.к. тогда на фигуре появятся резкий переход. На оставшиеся 48 клеток у Пети 2 варианта раскраски: первый или белый. Таким образом, общее кол-во комбинаций в этом случае будет равно $1^{48} \cdot 2^{48}$ (т.к. 48 клеток с доступными цветами и 48 с 2 доступными)

2 способ



Затраченные клетки - серые. Можно заметить, что два способа закрашивать фигуру симметричны, а значит и общее кол-во комбинаций совпадет. Их всего $1^{48} \cdot 2^{48}$.

Вероятность посчитают как отношение числа черных комбинаций к их общему числу: $P = \frac{2^{48} \cdot 2^{48}}{3^{96}} = \frac{2^{49}}{3^{96}}$ Ответ: $\frac{2^{49}}{3^{96}}$

3) $f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$; Пусть $y = 2a + b + 1 \Rightarrow b = y - 2a - 1$

Если при $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$, $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)^2 - 4ab \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$

Подставив b , искомое принимает вид:

$$\begin{cases} (a+1)^2 - 4a(y-2a-1) \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 1 - 4ay + 8a^2 + 4a \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a^2 + 6a + 1 \leq 4ay \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{(3a+1)^2}{4a} \\ a > 0 \end{cases}$$

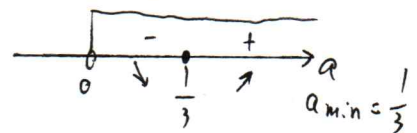
Т.к. $y \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$, $y \rightarrow \min$, когда $y = \frac{(3a+1)^2}{4a}$, $a = a_{\min}$. Найдем $a_{\min}$ (концы минимума) где $\frac{(3a+1)^2}{4a}$: y' : $\frac{6(3a+1) - 4(3a+1)^2}{4a^2} = 0$

Или

Ответ: 3

полезно
фрагмент

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$



$$y_{\min} = \frac{(a_{\min} + 1)^2}{4a_{\min}} = \frac{(1 + 1)^2}{4 \cdot \frac{1}{3}} = 3$$

$$U_{R_3} = I_3 \cdot R_3 = I_{34} R_3 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ V}$$



С, продолжение)

$$\begin{cases} U_{K3} = \varphi_0 - \varphi_A \\ U_{K1} = \varphi_C - \varphi_A \end{cases} \Rightarrow U_{K1} = \varphi_C - \varphi_0 + U_{K3}$$

$$\varphi_0 - \varphi_C = U_{K3} - U_{K1}$$

Заметим, что $(\varphi_0 - \varphi_C) = U_{C3}$, то есть напряжение на конденсаторе; тогда найдем заряд на конденсаторе из $q = C U$:

$$q = C \cdot U_{C3} = C(\varphi_0 - \varphi_C) = C(U_{K3} - U_{K1}) = 200 \cdot 10^{-6} \cdot (90 - 70);$$

$$= 4000 \text{ мкФ.}$$

Р) Дано:

$R_p = -5 \text{ гнтр}$

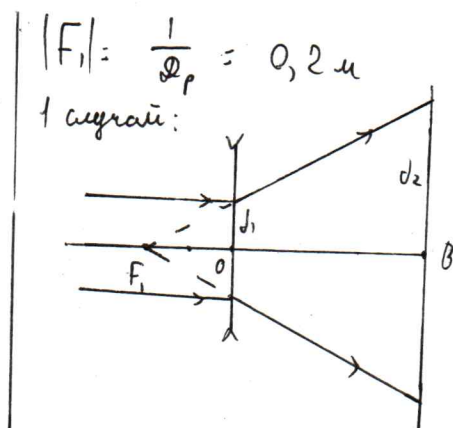
$d_1 = 5 \text{ см}$

$d_2 = 20 \text{ см}$

$d_1' = d_1$

$d_2' = d_2$

$R_C = ?$

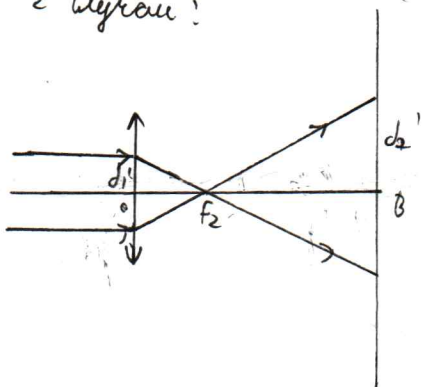


$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_1}{F_1 + OB} = \frac{5}{20}$$

$$4F_1 = F_1 + OB$$

$$OB = 3F_1 = 0,6 \text{ м}$$

2 случай:



$$\frac{d_1'}{d_2'} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{OB - F_2} = \frac{5}{20}$$

$$4F_2 = OB - F_2$$

$$5F_2 = OB$$

$$F_2 = \frac{OB}{5} = \frac{0,6}{5} = 0,12 \text{ м}$$

Ответ: 8,34 гнтр

$$R_C = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{0,12} = 8,34 \text{ гнтр}$$

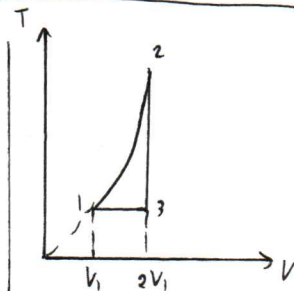
4) Дано:

$$T = k V^2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 2$$

$$\eta = ?$$

$$V_2 = V_3$$



$$1) \eta = \frac{A}{Q_H}$$

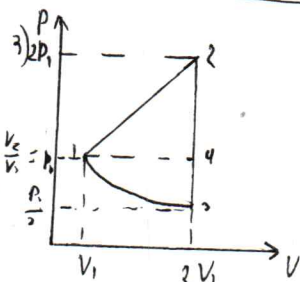
$$2) PV = \nu RT$$

$$T = k V^2 \Rightarrow P = k \nu R V$$

$$\text{для 1-2 пропорционально } \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1} = 2$$

$$1-3: T = \text{const}$$

$$P_3 V_3 = P_1 V_1 \Rightarrow P_3 = \frac{P_1 V_1}{V_3} = \frac{P_1}{2}$$



4) Найдем работу как площадь под графиком: $A = A_{1241} + A_{1431}$

$$A_{1241} = \frac{1}{2} (2V_1 - V_1) (2P_1 - P_1) = \frac{1}{2} P_1 V_1 = \frac{1}{2} \nu R T_1$$

$$A_{1431} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R T_1 \ln 2$$

$$5) Q_H = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}; A_{12} = \frac{2P_1 + P_1}{2} (2V_1 - V_1) = \frac{3}{2} P_1 V_1 = \frac{3}{2} \nu R T_1$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = \frac{i}{2} (4P_1 V_1 - P_1 V_1) = \frac{3i}{2} P_1 V_1 = \frac{3i}{2} \nu R T_1$$

$$Q_H = Q_{12} = \frac{3}{2} \nu R T_1 (i + 1);$$

11-21-247



7, продолжение) для 1-аэричного газа: $i = 3$ 163-11-143
 Тогда $Q_{12} = \frac{3}{2} \cdot DRT_1 \cdot (3+1) = 6DRT_1$

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{1,2 DRT_1}{6 DRT_1} = \frac{1,2}{6} = 0,2 = \underline{20\%}$$

для двухаэричного газа: $i = 5$

Тогда $Q_{12} = \frac{5}{2} DRT_1 \cdot (5+1) = 9DRT_1$

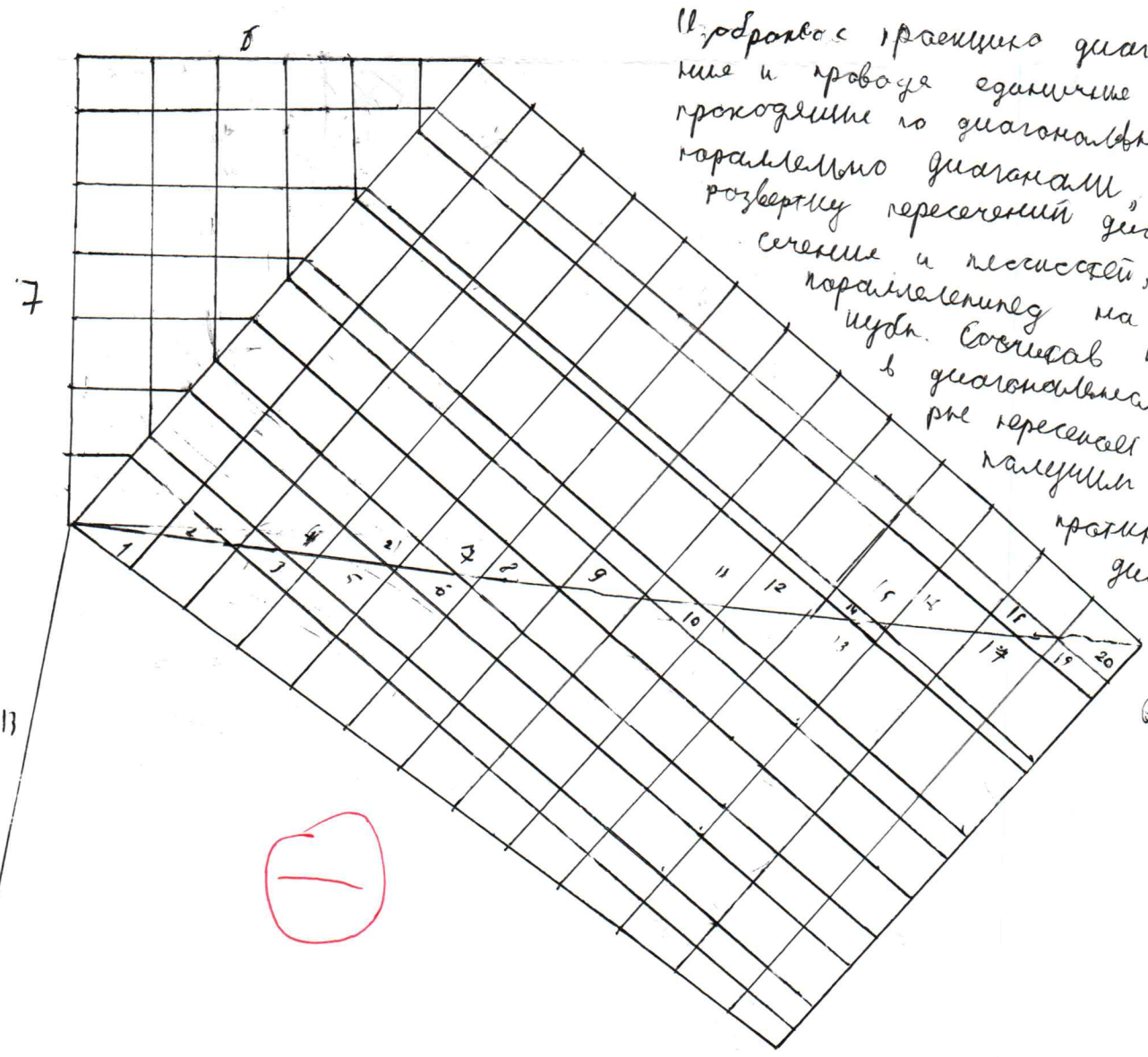
$$\eta = \frac{1,2 DRT_1}{9 DRT_1} = \frac{1,2}{9} = 0,133 \approx \underline{13,3\%}$$

для многоаэричного газа: $i = 6$

Тогда $Q_{12} = \frac{6}{2} DRT_1 \cdot (6+1) = \frac{21}{2} DRT_1$

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{1,2 \cdot 2 DRT_1}{21 DRT_1} \approx 0,114 \approx \underline{11,4\%}$$

4) Изобразили проекцию диагонального сечения и единичные кубы на четную плоскость:



Изобразили проекцию диагонального сечения и проведе единичные сечения, продолжим по диагональному сечению параллельно диагонали, найдем разветку пересечений диагонального сечения и плоскостей, делящих параллелепипед на единичные кубы. Соединив к-во квадратов в диагональном сечении, к-во при пересечении диагонали, найдем к-во кубов, проходящих этой диагональю.

Ответ: 21

