



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 27-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача 1.

Лист 1 из 9

Заметим, что сократить дробь можно при на-
личии общих множителей в числителе и знаменате-
ле. Разложим знаменатель на простые множители:
 $40^{40} = 2^{80} \cdot 5^{40}$. Таким образом, сократить дробь
можно только на 2 и на 5 (не более 80 раз на каждое
число). Теперь разложим числитель на простые
множители и найдём в разложении степени 2
и 5. Для этого сначала представим все чётные
множители в $80!$ через произведения с 2:

$\underbrace{2 \cdot 1}_{2}, \underbrace{2 \cdot 2}_{4}, \underbrace{2 \cdot 3}_{6}, \dots, \underbrace{2 \cdot 40}_{80}$; — теперь представим каждый чёт-
ный сомножитель двойкой так же
через произведения с 2:

$\underbrace{2 \cdot 1}_{2}, \underbrace{2 \cdot 2}_{4}, \dots, \underbrace{2 \cdot 20}_{40}$; — продолжим повторять алгоритм

$\underbrace{2 \cdot 1}_{2}, \underbrace{2 \cdot 2}_{4}, \dots, \underbrace{2 \cdot 10}_{20}$;

$\underbrace{2 \cdot 1}_{2}, \underbrace{2 \cdot 2}_{4}, \dots, \underbrace{2 \cdot 5}_{10}$;

$\underbrace{2 \cdot 1}_{2}, \underbrace{2 \cdot 2}_{4} \rightarrow \underbrace{2 \cdot 1}_{2}$.

Теперь посчитаем кол-во двоек как первых сомно-
жителей во всех строчках (подчёркнуты ~). Полу-
чим число $78 \Rightarrow$ в $80!$ разложении $80!$ на простые
множители 78 двоек.

Проведём аналогичный алгоритм для 5:

$\underbrace{5 \cdot 1}_{5}, \underbrace{5 \cdot 2}_{10}, \dots, \underbrace{5 \cdot 16}_{80} \rightarrow \underbrace{5 \cdot 1}_{5}, \underbrace{5 \cdot 2}_{10}, \underbrace{5 \cdot 3}_{15}$. Получаем 13 пятёрок
в разложении $80! \Rightarrow 80!$ можно представить как



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 27-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	14					

Вариант 1

Поскода $\frac{80!}{10^{80}} = \frac{x \cdot 2^{78} \cdot 5^{19}}{2^{80} \cdot 5^{80}} = \frac{x}{2^2 \cdot 5^{61}}$

(+). 11

мест 2 из 9

Таким образом, после максимального возмозможного сокращения дроби останется знаменатель $2^2 \cdot 5^{61}$.

Ответ: $2^2 \cdot 5^{61}$.

Задача 2.

Пусть x - кол-во школьников в кружке "Школьная математика", а y - кол-во школьников в кружке "Абстрактные математики", тогда ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$) можно по условию записать систему неравенств:

$$\begin{cases} x+y > 29 & (1) \\ x-2 > 3y & (2) \\ 3x < 2y+60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 29-y & (2) \\ x > 3y+2 \\ x < \frac{2}{3}y+20 \end{cases}$$

Из 2-й системы относительно x справедлива следующая система:

$$\begin{cases} 3y+2 < \frac{2}{3}y+20 \\ 29-y < \frac{2}{3}y+20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y < 54 \\ 5y > 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 7\frac{5}{7} \\ y > 5\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow y=6 \text{ или } y=7.$$

Запишем 2-ю систему (2) в явном виде:

Если $y=6$, то:

$$\begin{cases} x > 23 \\ x > 20 \\ x < 24 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Если $y=7$, то:

$$\begin{cases} x > 22 \\ x > 23 \\ x < 24\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x=24.$$

Следовательно, $y=7$, $x=24$ в 1-м кружке 24 человека.

(+). 12



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

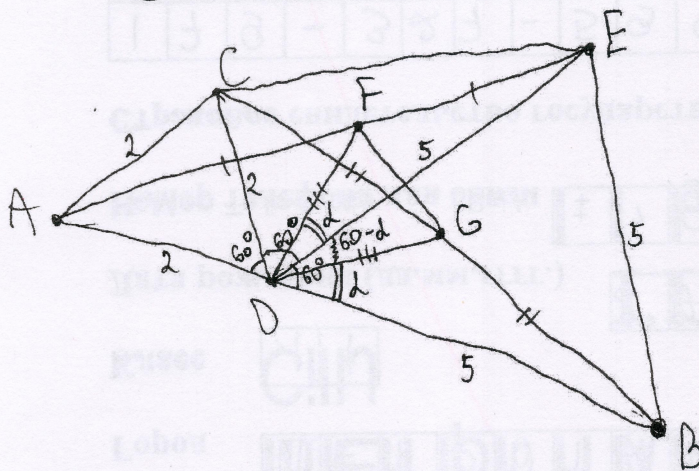
шифр 24-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача 3.

Лист 3 из 9



Дано: $D \in AB$; $\triangle ACD$ и $\triangle DEB$ — равносторон. треугольники со сторонами 2 и 5 соответств.; F и G — середины AE и CB соответств.
Д-ть: $\triangle DFG$ — равносторон.
Найти: сторону $\triangle DFG$.

Д-ство:

По условию $\triangle ACD$ и $\triangle DEB$ — равносторон. $\Rightarrow AC=CD=AD=2$,
 $DE=EB=BD=5$, $\angle ADC = \angle BDE = 60^\circ \Rightarrow \angle CDE = 180^\circ - \angle ADC - \angle BDE = 60^\circ$, т.к.
 $D \in AB \Rightarrow \angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = 120^\circ = \angle CDE + \angle BDE = \angle CDB$.

Рассмотрим $\triangle ADE$ и $\triangle CDB$:

$AD=CD=2$
 $DE=BD=5$
 $\angle ADE = \angle CDB = 120^\circ$ } $\triangle ADE = \triangle CDB$ (по I приг.) $\Rightarrow DF=DG$ как соответствующие медианы в равных треугольниках.

Рассмотрим $\triangle DFE$ и $\triangle DGB$:

$DG=DF$
 $DB=DE=5$
 $BG=FE = \frac{CB}{2} = \frac{AE}{2}$, т.к. $\triangle ADE = \triangle CDB$ } $\triangle DFE = \triangle DGB$ (по III приг.) $\Rightarrow \angle FDE = \angle GDB$.

Пусть $\angle FDE = \angle GDB = \alpha$, тогда, т.к. $\angle BDE = 60^\circ$, $\angle GDE = 60^\circ - \alpha \Rightarrow \angle FDG = \angle FDE + \angle GDE = \alpha + 60^\circ - \alpha = 60^\circ \Rightarrow \triangle FDG$ — равносторон. с углом в 60° при



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 24-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Вершины $\Rightarrow \triangle FDG$ — равносторонний. ■

Лист 4 из 9

Решение:

По теореме косинусов: $AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2 \cdot AD \cdot DE \cdot \cos \angle ADE =$
 $= 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 39 \Rightarrow AF^2 = \left(\frac{AE}{2}\right)^2 = \frac{AE^2}{4} = 9,75.$

По теореме косинусов: $CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2 \cdot CD \cdot DE \cdot \cos \angle CDE =$
 $= 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 19.$

По теореме косинусов: $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2 \cdot AC \cdot AE \cdot \cos \angle CAE \Rightarrow$
 $\cos \angle CAE = \frac{AC^2 + AE^2 - CE^2}{2 \cdot AC \cdot AE} = \frac{4 + 39 - 19}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{39}} = \frac{24}{4\sqrt{39}} = \frac{6}{\sqrt{39}}.$

Пусть $\angle CAE = \alpha$, тогда $\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{39}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{36}{39}} =$
 $= \sqrt{\frac{3}{39}}.$

Тогда: $\cos \angle EAD = \cos(\angle CAD - \angle CAE) = \cos(60^\circ - \alpha) = \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha =$
 $= \frac{3}{\sqrt{39}} + \frac{3}{2\sqrt{39}} = \frac{9}{2\sqrt{39}}.$

По теореме косинусов: $DF^2 = AF^2 + AD^2 - 2 \cdot AF \cdot AD \cdot \cos \angle EAD = 9,75 +$
 $+ 4 - 2 \cdot \sqrt{9,75} \cdot 2 \cdot \frac{9}{2\sqrt{39}} = 13,75 - \frac{\sqrt{39} \cdot 2 \cdot 9}{2 \cdot \sqrt{39}} = 4,75 = \frac{19}{4} \Rightarrow DF = \frac{\sqrt{19}}{2} \Rightarrow$
сторона треугольника FDG равна $\frac{\sqrt{19}}{2}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{19}}{2}.$

Задача 4.

Если у каждого ребёнка только 2 друга,
но при этом с каждым из других детей у
него есть общий друг, то получится, что хотя бы



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

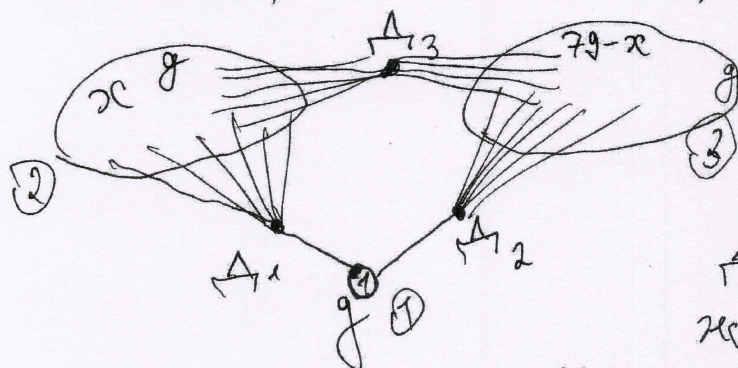
шифр 24-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

у одного из его родов не менее 41 вну- (лист 5 из 9)
ка (и внучек).

Разобьём всех детей на 3 группы: в
одной будет только 1 ребёнок, во 2-й x де-
тей, а в 3-й ($79-x$):



* A_1 — дед, A_2 — ребёнок

Пусть у ребёнка из 1-й
группы есть два дед:
 A_1 и A_2 , причём A_1 так-
же приходится дедом всем

из группы с x детьми, а A_2 — дед для всех
из группы с $79-x$ детьми (считать, что группы
изначально и выделены по родственным связям
 A_1 и A_2). В таком случае у ребёнка из группы
1 есть со всеми общий дед. Однако общий дед дол-
жен быть ещё и у каждого из группы « x » с каж-
дым из группы « y ». Тогда пусть ещё есть дед
 A_3 , «соединяющий» родственными связями груп-
пы 2 и 3. Заметим, что ещё одного деда «между»
этими группами быть не может, иначе у каж-
дого внука A_3 из одной группы не будет общего
деда с каждым внуком, например, какого-нибудь
 A_4 из другой группы. Таким образом получаем,
что на всех детей приходится всего 3 деда.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 27-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Следовательно, на $80 \cdot 2 = 160$ "ред-лист 6 из 9
твекных связей" (от каждого дётёньша их "ис-
ходит" по две) так же придется всего 3 реда-
хотя бы у одного реда не менее 54 втуков (и в
ек), т.к. $53 < \frac{160}{3}$. ■

Задача 5.

Дано:

$$L = 30^\circ$$

$$v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

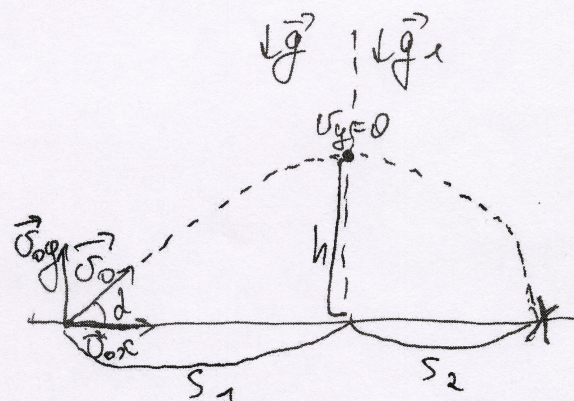
$$S = 5,196 \text{ м}$$

Найти:

g_1 - ?

Решение:

Пусть h - высота самой
верхней точки траектории,
 g_1 - ускорение свобод. пад. в
аккумуляции, S_1 - горизонтальная
пути камня на ось Ox в перемалывной зоне, а
 S_2 - в аккумуляции. Тогда $S = S_1 + S_2$.



$$v_{0y} = v_0 \sin L = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \frac{\text{м}}{\text{с}}, v_{0x} = v_0 \cos L = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$\text{В верхней точке траектории } v_y = 0 \Rightarrow v_{0y} - g_1 \cdot t_{\text{пад}} = 0 \Rightarrow t_{\text{пад}} = \frac{v_{0y}}{g_1} = 0,5 \text{ с} \Rightarrow h = v_{0y} \cdot t_{\text{пад}} - \frac{g_1 t_{\text{пад}}^2}{2} = 2,5 - 1,25 = 1,25 \text{ м. } S_1 = v_{0x} \cdot t_{\text{пад}} = 5\sqrt{3} \times 0,5 = 2,5\sqrt{3} \text{ м.}$$

$$v_y \text{ в верх. точке} = 0 \Rightarrow h = \frac{g_1 t_{\text{пад}}^2}{2} \text{ (время падения). } S_2 = v_{0x} \cdot t_{\text{пад}} = S - S_1 = 5,196 - 2,5\sqrt{3} \Rightarrow t_{\text{пад}} = \frac{5,196 - 2,5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \approx 0,1 \text{ с} \Rightarrow \text{т.к. } h = \frac{g_1 t_{\text{пад}}^2}{2}, g_1 = \frac{2h}{t_{\text{пад}}^2} = \frac{2 \times 1,25}{0,1^2} = 250 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\text{Ответ: } 250 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

10 б.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 27-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача 6.

Лист 7 из 9

Дано:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$$

$$L = 0,5 \text{ м}$$

$$D = 0,002 \text{ м}$$

$$U = 220 \text{ В}$$

$$I = 5 \text{ А}$$

Найти:

T - ?

Решение:

По закону Джоуля-Ленца: $Q = I^2 R \tau = U I \tau$ (по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$), где τ - время в [с].

$$S_{\text{пов. пр.}} (\text{площадь поверхности проволоки}) = L_{\text{свр.}} \cdot L = \pi D \cdot L.$$

Тогда, за время τ тело излучает энергию

$$Q_1 = \sigma \cdot S_{\text{пов. пр.}} \cdot \tau = \sigma \cdot T^4 \cdot \pi D \cdot L \cdot \tau.$$

Тогда, составив уравнение теплового баланса:

$$Q_1 = Q;$$

$$\sigma \cdot T^4 \cdot \pi D \cdot L \cdot \tau = U I \tau; \quad 1: \tau$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{U I}{\sigma \cdot \pi D \cdot L}} \approx \sqrt[4]{6,175 \cdot 10^{12} \text{ К}} \approx 1,5763946 \cdot 10^3 \text{ К} \approx 1576,39$$

Ответ: $1576,3946 \text{ К}$. 105

Задача 7.

Дано:

$i = 3$
циклы
1-2-3-1 и

1-3-4-1

(по часовой)

Найти:

$\frac{\eta_2}{\eta_1}$ - ?

Решение: По ^{уп-10} закону Менделеева-Клапейрона, а также ^{уп-2} Следующим процессам Кел-ва теплоты в изохорных процессах по I закону термодинамики:

$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{12}$ (пусть ν - кол-во газа). Запишем ^{уп-2} закон Менделеева-Клапейрона для точек 1, 2, 3 и 4

$$1) p_0 V_0 = \nu R T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{p_0 V_0}{\nu R} \quad 2) 2 p_0 V_0 = \nu R T_2 = 2 \nu R T_1 \Rightarrow T_2 = 2 T_1$$

$$3) 4 p_0 V_0 = \nu R T_3 = 4 \nu R T_1 \Rightarrow T_3 = 4 T_1 = 2 T_2 \quad 4) 2 p_0 V_0 = \nu R T_4 = 2 \nu R T_1$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 27-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

$$\begin{aligned}
 Q_{12} &= \Delta U_{12} = \frac{3}{2} R \Delta T_{12} = \frac{3}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} R T_1 = \frac{3}{2} p_0 V_0 \quad (\text{исм 8 из 9}) \\
 Q_{23} &= A_{23} + \Delta U_{23} = 2 p_0 \Delta V_{23} + \frac{3}{2} R \Delta T_{23} = 2 p_0 V_0 + 3 p_0 V_0 = 5 p_0 V_0. \\
 |Q_{31}| &= |A_{31} + \Delta U_{31}| = \frac{3}{2} p_0 V_0 + \frac{3}{2} R \Delta T_{31} = \frac{3}{2} p_0 V_0 + \frac{9}{2} p_0 V_0 = 6 p_0 V_0. \\
 Q_{13} &= |Q_{31}| = 6 p_0 V_0. \\
 |Q_{34}| &= |\Delta U_{34}| = \frac{3}{2} R \Delta T_{34} = 3 p_0 V_0. \\
 |Q_{41}| &= |A_{41} + \Delta U_{41}| = p_0 V_0 + \frac{3}{2} R \Delta T_{41} = 2,5 p_0 V_0. \\
 \eta_1 &= \frac{Q_{H1} - |Q_{K1}|}{Q_{H1}} = \frac{Q_{12} + Q_{23} - |Q_{31}|}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{0,5 p_0 V_0}{6,5 p_0 V_0} = \frac{1}{13} \quad (\text{КПД считаем не в \%}) \\
 \eta_2 &= \frac{Q_{H2} - |Q_{K2}|}{Q_{H2}} = \frac{Q_{23} - |Q_{34}| - |Q_{41}|}{Q_{23}} = \frac{0,5 p_0 V_0}{6 p_0 V_0} = \frac{1}{12}. \\
 \text{Погда } \frac{\eta_2}{\eta_1} &= \frac{1 \cdot 13}{12 \cdot 1} = \frac{13}{12}. \\
 \text{Ответ: } \frac{13}{12}.
 \end{aligned}$$

155

Задача 8.

Дано:

АБ-машина

$n = 1,5$

Найти:

y_0 - ?

Решение:

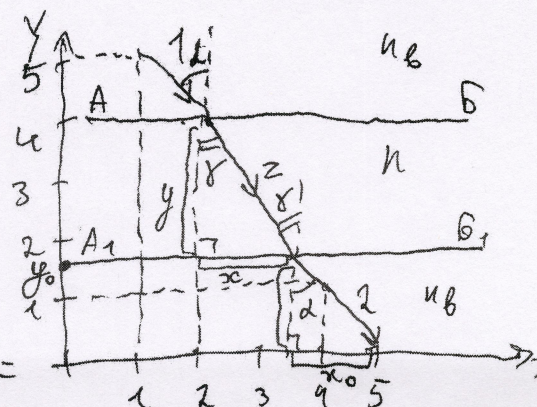
По закону Снеллиуса:

$$n_B \sin \alpha = n \sin \gamma \quad (\text{рис. 1})$$

Из рисунка видно, что $\alpha = 45^\circ$, а $n_B = 1 \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{x}{z} \quad (\text{рис. 1}) = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{z^2} = \frac{2}{9} \cdot z^2 = y^2 + x^2$ по теореме

$$\text{Пифагора} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{7}{2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{7}{2}} x.$$

* y_0 - координата на ОУ в момент включения...





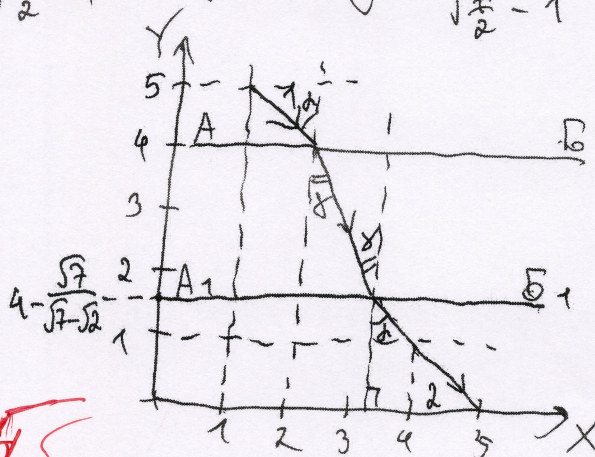
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 27-10-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Теперь замечание, что еще 2 так- лист 9 из 9
нее идёт под углом $45^\circ \Rightarrow y_0 = x_0$ (рис. 1) $\Rightarrow 4 - y = 3 - x$
Следовательно, $x = y - 1 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{7}{2}} x = \sqrt{\frac{7}{2}} (y - 1) = \sqrt{\frac{7}{2}} y - \sqrt{\frac{7}{2}}$
 $y(\sqrt{\frac{7}{2}} - 1) = \sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{\frac{7}{2}} - 1} \Rightarrow y_0 = 4 - y = \frac{4(\sqrt{\frac{7}{2}} - 1)}{\sqrt{\frac{7}{2}} - 1} - \frac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{\frac{7}{2}} - 1} = \frac{3\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{\frac{7}{2}} - 1}$
 $= 4 - \frac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{\frac{7}{2}} - 1} = 4 - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$
Ответ: $4 - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$



155