

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 23-11-06

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	10	10	12	15	10	4	4	77

Вариант 2

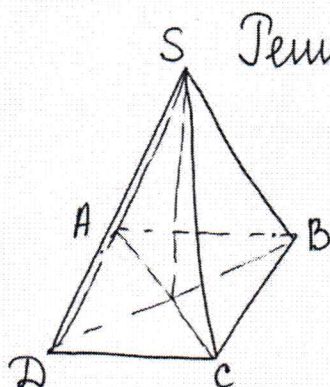
№1.

Дано:

$$SM:MA = 1:2$$

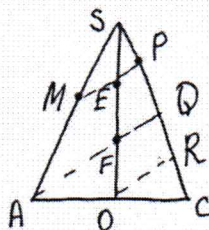
$$SN:NB = 1:3$$

$$P:PC = 1:4$$



Решение:

1) Сначала рассмотрим $\triangle ACS$.
Пусть точка O будет пересечением диагоналей DB и AC .



2) Поскольку $ABCD$ является параллелограммом, то точка O будет серединой AC .

3) $AQ \parallel MP$, $OR \parallel MP$. Пусть $EMP \cap SO$, точка F является пересечением AQ и SO .

4) Используя теорему Палеса, имеем: $\frac{SP}{PQ} = \frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$; $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{SE}{EF}$;

$$\frac{QR}{RC} = \frac{AO}{OC} = \frac{1}{1}; \quad \frac{SP}{PC} = \frac{1}{4} \Rightarrow PC = 4SP; \quad \frac{SP}{PQ} = \frac{1}{2} \Rightarrow PQ = 2SP;$$

$$CQ = PC = PQ = 2SP; \Rightarrow QR = \frac{1}{2} \cdot CQ = SP \Rightarrow PR = 3SP \Rightarrow \frac{SE}{EF} = \frac{SQ}{PR} = \frac{1}{3}$$

5) $P, M \in (MPN) \Rightarrow E \in MPN$; $N, E \in (MNP)$.

Точка K является пересечением SD и NE , тогда

$$\frac{SN}{NB} = \frac{1}{3} = \frac{SE}{EO} \Rightarrow NE \parallel BD \Rightarrow \frac{SK}{KD} = \frac{SN}{NB} = \frac{1}{3} \Rightarrow SN:NB = 1:3$$

Ответ: 1:3.



№6.

Дано:

$q_1; q_2;$
 $m_1; m_2$

$v_1 = ?$

$v_2 = ?$

Решение:

Воспользуемся законом сохранения энергии,
имеем: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{L} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$.

Через достаточно большой промежуток времени заряды удалятся друг от друга на бесконечность, потенциальная энергия станет равной 0.

По закону сохранения импульса:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{L} = \frac{m_1 \cdot \left(\frac{m_2^2 v_2^2}{m_1^2}\right)}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{L} = \frac{m_2 v_2^2}{2} \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right), \text{ отсюда:}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{L} \cdot \frac{1}{m_2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)}} \Rightarrow v_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \left(\sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot L \cdot m_2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)}} \right)$$

Ответ:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot L \cdot m_2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)}};$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot L \cdot m_2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)}}.$$

№4.

Дано:

$$x_1 = \cos 10^\circ$$

Решение:

Примем период за 360° .

Рассмотрим пример к данной формуле: $b_n = (10^n)^\circ$

$$b_3 = 1000 = 2 \cdot 360 + 280$$

Воспользовавшись методом математической индукции, полагаем, что $b_n = 360 \cdot x + 280$, $x \in \mathbb{R}$. ? *целое.*

Для $n=3$ выражение выполнилось, тогда нужно проверить работает ли это где $n=k$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 10^{n+1} = 10 \cdot 10^n = 10 \cdot b_n = 360 \cdot 10^x + 2800 = \\ &= 360 \cdot 10x + 1800 + 1000 = 360 \cdot 10^x + 5 \cdot 360 + 2 \cdot 360 + 280 = 360(10^x + 5 + 2). \end{aligned}$$

Тогда мы видим, что данная формула будет верной где все $n \geq 3$. Следовательно,

$$a_{2023} = \cos 280^\circ = \cos(270^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ$$

$$a_{2024} = \cos 280^\circ = \sin 10^\circ$$

$$a_2 = \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x &= \cos 10^\circ \cdot \cos x + (-\sin 10^\circ + \sin 10^\circ + \sin 10^\circ) \cdot \sin x \\ &= \cos 10^\circ \cdot \cos x + \sin 10^\circ \cdot \sin x = \cos(x - 10^\circ) \end{aligned}$$

Тогда минимальное значение будет (-1) , а

ответ: ± 1 .

$\pm$

125

Пример! $a=25$, $b=5$; $z=125$

он 3!

$$\begin{cases} \frac{\log_{25} x \cdot \log_3 y}{\log_{27} (xy)} = 1 \\ \frac{\log_5 y \cdot \log_{49} z}{\log_7 (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{\log_5 y \cdot \log_{49} z}{\log_{81} (zx)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} \cdot \log_5 x \cdot \log_3 y}{\frac{1}{3} \log_3 (xy)} = 1 \\ \frac{\log_5 y \cdot \frac{1}{2} \log_7 z}{\log_7 (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{\frac{1}{3} \log_5 z \cdot \log_3 x}{\frac{1}{4} \log_3 (zx)} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3 \log_5 x}{2 \log_y (xy)} = 1 \\ \frac{\log_5 y}{2 \log_2 (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{4 \log_5 z}{3 \log_x (zx)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3 \log_5 x}{2 \log_5 (xy)} = 1 \\ \frac{\log_5 y}{2 \log_5 (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{4 \log_5 z}{3 \log_5 (zx)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3 \log_5 x \cdot \log_5 y}{2 \log_5 x + 2 \log_5 y} = 1 \\ \frac{\log_5 y \cdot \log_5 z}{2 \log_5 y + 2 \log_5 z} = \frac{3}{5} \\ \frac{4 \log_5 z \cdot \log_5 x}{3 \log_5 z + 3 \log_5 x} = 1 \end{cases}$$

Пусть

$$\log_5 x = a; \log_5 y = b; \log_5 z = c$$

$$\begin{cases} \frac{3ab}{2a+2b} = 1 \\ \frac{bc}{2b+2c} = \frac{3}{5} \\ \frac{4ca}{3c+3a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b = 3ab \\ 6b+6c = 5bc \\ 3c+3a = 4ca \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(2-3b) = -2b \\ a = \frac{2b}{3b-2} \\ c(6-5b) = -6b \\ c = \frac{6b}{5b-6} \end{cases}$$

108.

$$\frac{3 \cdot 2b}{3b-2} + \frac{3 \cdot 6b}{5b-6} = \frac{4 \cdot 6b}{5b-6} \cdot \frac{2b}{3b-2}$$

$$6b(5b-6) + 18b(3b-2) = 48b^2$$

$$30b^2 - 36b + 54b^2 - 36b = 48b^2$$

$$36b^2 - 72b = 0$$

$$b = 0 \text{ (не может быть)} \\ b = 2$$

Вернемся к замене!

$$1) \log_5 x = 1 \\ x = 5$$

$$a = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2 - 2} = 1$$

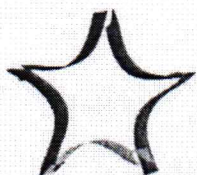
$$\boxed{a=1}$$

$$c = \frac{6 \cdot 2}{5 \cdot 2 - 6} = 3$$

$$\boxed{c=3}$$

$$2) \log_5 y = 2 \\ y = 25$$

$$3) \log_5 z = 3 \\ z = 125$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-06

5. Поскольку ускорение шарика непостоянно, то в процессе движения действует сила сопротивления, пропорционально скорости: $F_c = kV$

Виды в крайней точке траектории имеют вид:

II закон Ньютона: (начальный момент времени)
 $ma_0 = mg + kV_0$ (~ 1)

Через 2 секунды после начала движения ускорение шарика становится равным ускорению свободного падения $= 10 \text{ м/с}^2$ соответственно скорость $V=0$ (достигнута верхняя точка траектории).

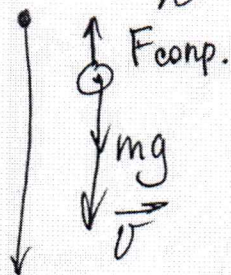
Изменение скорости равно площади под графиком соответственно по можно вычислить с помощью интегралов: $a \frac{dV}{dt} = dV = a dt$

$$V = \int_0^0 a \cdot dt = - \int_0^2 a dt \text{ (убывающая скорость).}$$

$$V_0 = \frac{1}{2} (20 + 10) \cdot 2 = 30 \text{ м/с} \text{ (площадь трапеции).}$$

Когда $a=0$, данная скорость будет достигнута $\Rightarrow mg - kV_y = 0 \Rightarrow$

$$V_y = \frac{mg}{k}$$



Из равенства ~ 1 получаем:

$$ma_0 - mg = kV_0$$

$$m(a_0 - g) = k \cdot V_0$$

$$\frac{m}{k} = \frac{V_0}{a_0 - g} = \frac{30}{20 - 10} = 3 \text{ с} \Rightarrow V_y \approx 30 \text{ м/с}$$

Ответ: 30 м/с

Дано:

$$T = 373 \text{ K}$$

$$p_{\text{H}_2} = 10^5 \text{ Па}$$

$$h_0 = 0,6 \text{ м}$$

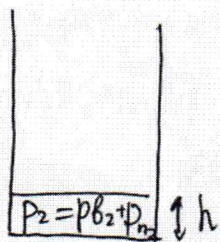
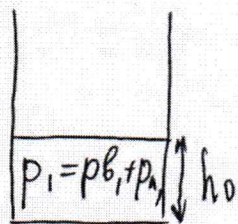
$$h = 0,15 \text{ м}$$

$$p_{\text{H}_2} = 2p_{\text{H}_1}$$

$$S = 500 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$m_{\text{H}} = ?$$

Решение:



Будем считать, что воздух под поршнем был при $\neq$ окружающей среде.

Поскольку наступает тепловое и механическое равновесие, считаем, что пар остынет до $\neq$ окружающей среды, а давление будет равно атмосферному.

В процессе сжатия пар был ненасыщенным.

По закону Дальтона:

$$p_1 = p_{\text{в}1} + p_{\text{H}1} ; p_1 < p_0$$

$$p_2 = p_0 = p_{\text{в}2} + p_{\text{H}2} = p_{\text{в}2} + 2p_1$$

Так как температура T_0 в начале и в конце эксперимента под поршнем оставалась постоянной, то

$$p_{\text{в}1} V_1 = p_{\text{в}2} V_2 \quad V_1 = S \cdot h_0 ; V_2 = S \cdot h \Rightarrow p_{\text{в}1} S h_0 = p_{\text{в}2} S h$$

$$p_{\text{в}1} = p_{\text{в}2} \cdot \frac{h}{h_0}$$

Для пара:
$$\frac{p_{\text{H}1} \cdot S h_0}{T} = \frac{2p_{\text{H}1} \cdot S \cdot h}{T_0}$$

По закону Менделеева - Клапейрона:

$$pV = \nu RT$$

$$h_1 = 0,6 - 0,15 = 0,45 \text{ м}$$

$$p_{\text{H}1} \cdot S \cdot h_1 = \frac{m_{\text{H}}}{M_{\text{H}}} \cdot R \cdot T \Rightarrow m_{\text{H}} = \frac{p_{\text{H}1} \cdot S h_1 \cdot M_{\text{H}}}{RT}$$

$$m_{\text{H}} = \frac{10^5 \cdot 500 \cdot 10^{-4} \cdot 0,45 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 373} = 0,013 \text{ кг} = 13 \text{ г}$$

Ответ: 13 г.

Чтобы построить перпендикуляр
от точки A к прямой mn .
Чтобы построить перпендикуляр
к прямой mn , проведем прямые AB и $A'B'$
до пересечения, а плоскость прямой
через точку пересечения M , соединив
точку M построим прямую mn и ее
перпендикуляр.

Восстанавливаем изображение от предмета АВ с помощью
лучей параллельных з.о.о. до пересечения с линзой, с точками
F¹ и B¹.

При помощи циркуля построим передний фокус F_n .
 x_n, y_n .
 (48; 26).

Orbiter: $(x_4, y_4) = (44, 24)$; $(x_3, y_3) = (50, 22)$; $(x_n, y_n) = (48, 26)$

13.

Дано:

$$1^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 25$$

Доказать:

$$1^x - 4 \sin^2 y + 8 \ln^2 z \leq 45$$

Докажем это:

$$\text{Пусть } z^2 = t, \sin^2 y = m, \ln^2 z = n$$

тогда $t^2 + m^2 + n^2 = 5^2$ (это есть сфера с центром в начале координат), радиус = 5.

$t - 4m + 8n \leq 45$ (ограниченная $t - 4m + 8n - 45 = 0$ плоскостью часть пространства).

недостаточно
обославшие

$$d = \frac{|0 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 45|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2}} = \frac{45}{\sqrt{81}} = \frac{45}{9} = 5 = R$$

(расстояние от центра сферы до данной плоскости)

Поскольку $0 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 8 \leq 45$, то сфера удовлетворяет вышеуказанной условию:

$t - 4m + 8n \leq 45$, что и требовалось доказать.

10