



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-11-23

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	11	10	10	15	4	0	12	74

Вариант 1

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\log x \log y \log 2}{\log 3 \log 4 \log (xy)} = \frac{1}{3} \\ \frac{\log y \log z \log 5}{\log 3 \log 25 \log (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{\log z \log x \log 16}{\log 27 \log 2 \log (zx)} = 1 \end{cases}$$

Пусть $\log x = a$;
 $\log y = b$;
 $\log z = c$, где
 $x > 0$
 $y > 0$
 $z > 0$
 $x, y, z \neq 1$

$$\begin{cases} \frac{ab \log 2}{2 \log 3 \log 2 (a+b)} = \frac{1}{3} \\ \frac{bc \log 5}{2 \log 3 \log 5 (b+c)} = \frac{3}{5} \\ \frac{4 \log 16 ca}{3 \log 3 \log 2 (c+a)} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2 \log 3 b}{3b - 2 \log 3} \\ c = \frac{6 \log 3 b}{5b - 6 \log 3} \\ \frac{8 \log 3 ((\log 3)^2 b^2)}{(5b - 6 \log 3)(3b - 2 \log 3)} = 1 \end{cases}$$

Подставим а и с
в 3 выражение и
найдем b.

= 1

$$\pm$$

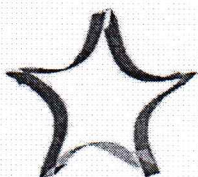
$$\frac{8b}{(5b - 6 \log 3)(3b - 2 \log 3)} = \frac{9b - 6 \log 3 + 5b - 6 \log 3}{(5b - 6 \log 3)(3b - 2 \log 3)} \quad | \cdot (5b - 6 \log 3)(3b - 2 \log 3)$$

$$8b = 9b - 6 \log 3 + 5b - 6 \log 3$$

$$-6b = -12 \log 3$$

$$b = 2 \log 3 \Rightarrow \log y = 2 \log 3; y = 9$$

1436



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-11-23

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

$$a = \frac{2\lg 3 \lg 9}{3\lg 9 - 2\lg 3} = \frac{2\lg 3 \lg 9}{6\lg 3 - 2\lg 3} = \frac{2\lg 3 \lg 9}{4\lg 3} = \lg 3$$

$$\Rightarrow \lg x = \lg 3$$

$$x = 3$$

$$c = \frac{6\lg 3 \lg 9}{5\lg 9 - 6\lg 3} = \frac{6\lg 3 \lg 9}{4\lg 3} = 3\lg 3$$

$$\lg z = 3\lg 3$$

$$z = 27$$

Ответ: $x = 3$; $y = 9$; $z = 27$.

$$a_2 = \cos 100^\circ \Rightarrow a_{2023} = \cos(10^{2023})^\circ, a_{2024} = \cos(10^{2024})^\circ$$

$$10 = 10 \pmod{360}$$

$$10^2 = 100 \pmod{360}$$

$$10^3 = 280 \pmod{360}$$

$$10^4 = 280 \pmod{360}$$

$$10^5 = 280 \pmod{360}$$

$$\cos(10^{2023})^\circ = \cos 280^\circ$$

$$\cos(10^{2024})^\circ = \cos 280^\circ$$

$$a_1 \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \sin x = \cos 10^\circ \cos x + (\cos 10^\circ + \cos 280^\circ + \cos 280^\circ) \sin x =$$

$$= \cos 10^\circ \cos x + (\cos 10^\circ - \cos(100 + 180)^\circ - \cos(90 + 10)^\circ) \sin x = \cos 10^\circ \cos x$$

$$\textcircled{+} \sin 10^\circ \sin x = \cos(10 - x)$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos(10 - x) \leq 1$$

наименьшее значение (-1)

Ответ

2436

15

33-11-23

17.11.2023

По графику видно, что на тело действуют силы сопротивления воздуха;
в момент времени $t=2(c)$ $a=10(m/c^2)$, что равно $g=10(m/c^2)$ —
ускорению свободного падения $\Rightarrow$ в момент времени $t=2(c)$

тело находилось в ~~высшей~~ точке траектории полета и $v=0(m/c)$
ускорение тела направлено вверх

Изменение скорости равно площади фигуры под графиком

$$v_{кон} = S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a_1+a_2}{2} \cdot t = \frac{20+10}{2} \cdot 2 = 30(m/c)$$

Ответ: 30 м/с.

$$(2^x)^2 + (\sin^2 y)^2 + (\ln^3 z)^2 = 16; \quad \text{Пусть } \begin{cases} 2^x = a \\ \sin^2 y = b \\ \ln^3 z = c \end{cases} \text{ где } a > 0, b \geq 0$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 16 \text{ (выразим } a)$$

$$a = \sqrt{16 - b^2 - c^2} \quad (\text{где } b^2 + c^2 < 16)$$

$$2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z = 2 \cdot 2^x + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z = 13 \text{ (по условию)} \quad 2a + 3b - 6c =$$

$$= 2\sqrt{16 - b^2 - c^2} + 3b - 6c = f(b, c)$$

$$f'_b = \frac{2 \cdot (-2b)}{2\sqrt{16 - b^2 - c^2}} + 3$$

$$f'_c = \frac{2 \cdot (-2c)}{2\sqrt{16 - b^2 - c^2}} - 6$$

$$\begin{cases} \frac{-2b}{\sqrt{16 - b^2 - c^2}} + 3 = 0 \\ \frac{-2c}{\sqrt{16 - b^2 - c^2}} - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2b}{\sqrt{16 - b^2 - c^2}} = 3 \\ \frac{2c}{\sqrt{16 - b^2 - c^2}} = -6 \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$\Downarrow$
 $c = -2b$, тогда

Тогда $\frac{2b}{\sqrt{16 - b^2 - (-2b)^2}} = 3$

$$2b = 3\sqrt{16 - b^2 - 4b^2} \quad (\text{т.к. } b \geq 0)$$

$$4b^2 = 9(16 - 5b^2)$$

$$49b^2 = 9 \cdot 16$$

$$b = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{24}{7}$$

Пусть $u(\frac{12}{7}, -\frac{24}{7})$, тогда она критическая точка

$$A = f''_{bb} = \frac{-2\sqrt{16 - b^2 - c^2} + 2b \cdot 1 \cdot (-2b)}{16 - b^2 - c^2} = \frac{-2(16 - b^2 - c^2) - 2b^2}{(16 - b^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-32 + 2c^2}{(16 - b^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3 из 6

55-11-23

$$AC - B^2 = \frac{(-32 + 2c^2)(-32 + 2b^2)}{(16 - b^2 - c^2)^3} - \frac{4b^2c^2}{(16 - b^2 - c^2)^3} = \frac{4(b^2c^2 - 16c^2 - 16b^2 + 16^2) - 4b^2c^2}{(16 - b^2 - c^2)^3} = \frac{16}{(16 - b^2 - c^2)^2} > 0$$

(+) we are done

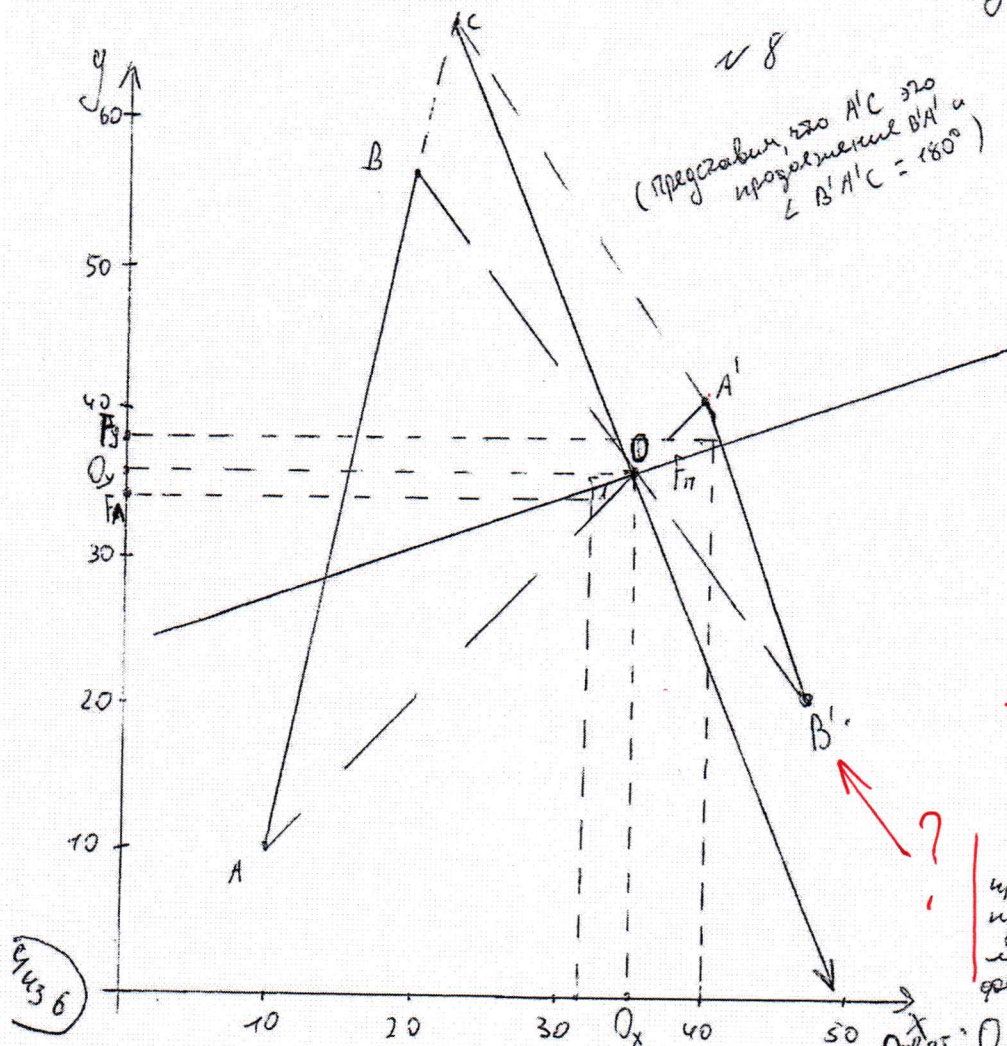
исследования
и локальный
эксперим.
не годятся
для анализа.

$$f\left(\frac{12}{3}, -\frac{24}{3}\right) = 2\sqrt{16 - \left(\frac{12}{3}\right)^2 - 1\left(-\frac{24}{3}\right)^2} + 3\frac{12}{3} - 6\left(-\frac{24}{3}\right) = 2\sqrt{16 - \frac{144 \cdot 5}{9}} + \frac{36 \cdot 5}{3}$$

$$= \frac{16}{4} + \frac{180}{4} = \frac{196}{4} = 28$$

Значит $2a + 3b - 6c \leq 28$ и $2^{x+1} + 35 \ln^2 y - 6 \ln^3 z \leq 28$

Order: Z.T.D.

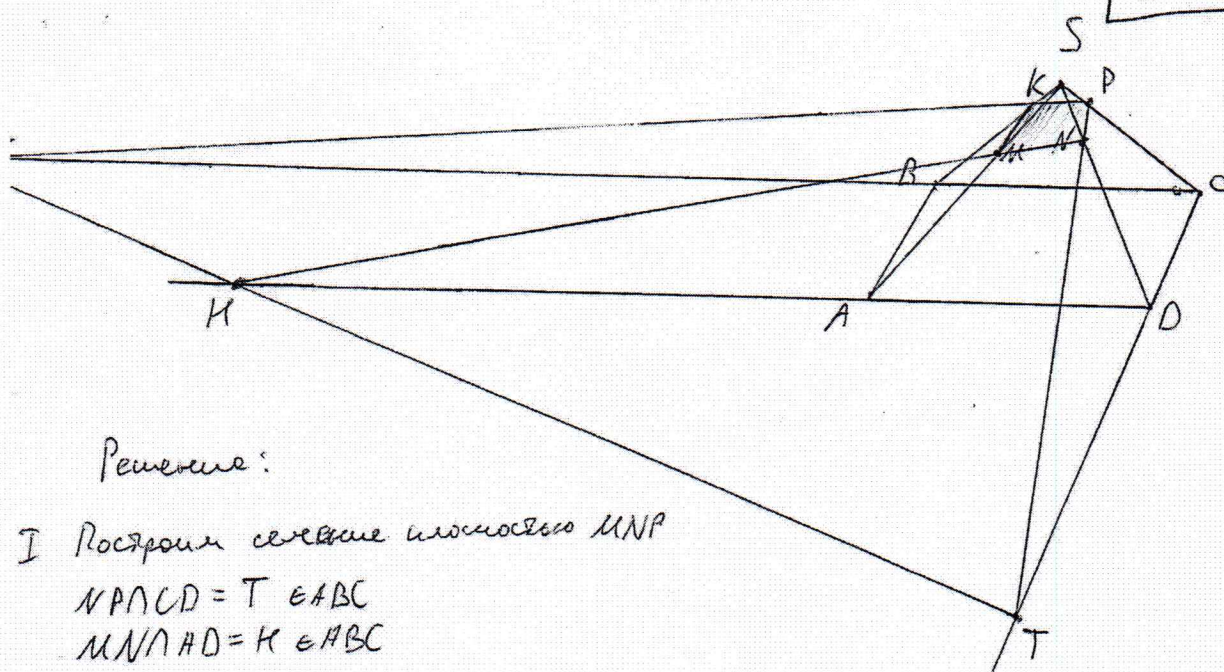


1) Изображение $A'B'$
 чинные, чем AB и пере-
 вернутое относительно AB
 $\Rightarrow$ линза собирающая.
 центр линзы - точка пересечения
 преломленных лучей AA' и BB' .

2) Если через все точки AB проходит луг, применя-
ясь, проходит через все
точки $A'B'$, следовательно
точки пересечения продол-
жений AB и $A'B'$ лежат на
линии

3) Экзоды определяют процессы линзы
проверили из А. Кривую, перпенди-
кулярную линзы, т.е. после при-
ложения она пройдет через
фокус линзы.

$$n_{\text{other}}: O(35; 36), F_1(32; 35), F_{II}(40; 39)$$



Решение:

I Построим сечение плоскостью MNP

$$NP \cap CD = T \in ABC$$

$$MN \cap AD = K \in ABC$$

$$TH \subset ABC, BC \subset ABC$$

$$TH \cap BC = L$$

$$LP \cap SB = K$$

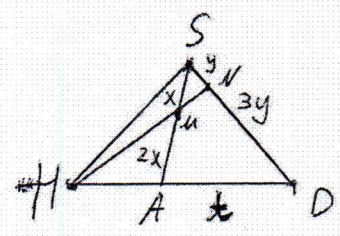
MNPK - искомое сечение

II рассмотрим некоторые треугольники отдельно:

$$1) \frac{SM}{AM} \cdot \frac{AH}{HD} \cdot \frac{DN}{NS} = 1 \quad (\text{по т. Менелая})$$

$$\frac{x}{2x} \cdot \frac{AH}{HD} \cdot \frac{3y}{y} = 1$$

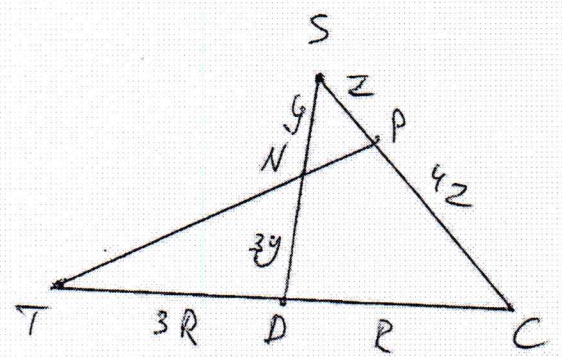
$$\Rightarrow \frac{AH}{HD} = \frac{2}{3}$$



$$2) \frac{SP}{PC} \cdot \frac{CT}{TD} \cdot \frac{DN}{NS} = 1 \quad (\text{по т. Менелая})$$

$$\frac{2}{42} \cdot \frac{CT}{TD} \cdot \frac{3y}{y} = 1$$

$$\frac{CT}{TD} = \frac{4}{3}$$

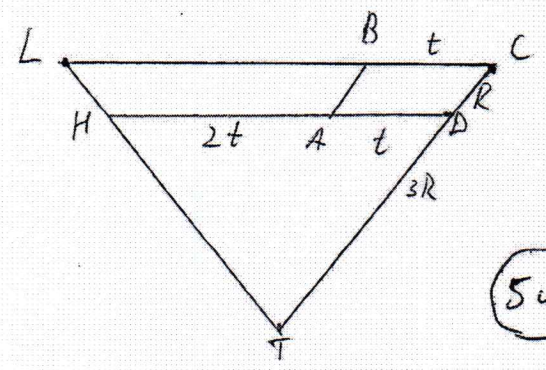


$$3) PD \parallel LC \text{ (т.к. } AD \parallel BC)$$

$$\Rightarrow \triangle TDH \sim \triangle TCL$$

$$\frac{TD}{TC} = \frac{HD}{LC}$$

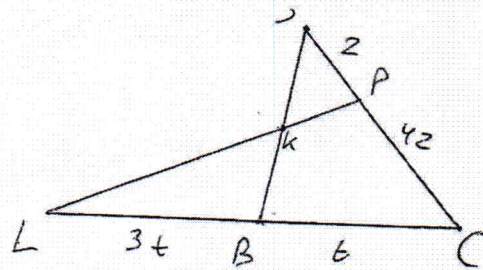
$$\frac{3R}{4R} = \frac{3t}{LC}, \quad LC = 4t$$



$$4) \frac{SP}{PC} \cdot \frac{CL}{BL} \cdot \frac{BK}{KS} = 1 \text{ (по П. Менелая)}$$

$$\frac{2}{42} \cdot \frac{46}{36} \cdot \frac{BK}{KS} = 1$$

$$\frac{BK}{KS} = 3$$



Ответ: $\frac{1}{3}$ или 3 .

и 6

1) Будем считать, что шары находятся в вакууме; так как шары заряжены одинаково, то между ними будут действовать силы отталкивания. Оба шарика будут двигаться с ускорением (у первого оно будет направлено вдоль прямой, соединяющей с центрами шаров. Пусть ускорение шариков равно, тогда можно применить импульс. Т.к. ко шары после соударения не действуют другие тела, то их импульс - const.

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = 0 \quad + 3$$

2) Со временем шары удаляются друг от друга на большое расстояние, а значит взаимодействие между ними пропорц. $\Rightarrow$ согласно закону сохранения энергии, тем больше E_k увеличился, тем больше E_p уменьшился (т.е. $\Delta E_k = \Delta E_p$)

3) Потенциал электрического поля равен $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

4) На основе принципа суперпозиции, при потенциале бесконечно удаленного от заряда точки, можно утверждать, что в момент времени t_* (когда соприкоснулись шары), потенциал электрического поля равен $\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 L} \Rightarrow$ после пропорциональное длительному времени:

$$- \quad \boxed{q_1 V_1 + q_2 V_2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \quad + 1$$

$$\frac{q_1 \cdot q_1}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q_2 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 L} = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2$$

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{4\pi\epsilon_0 L} = m_1 V_1^2 + \frac{m_2 \cdot m_1^2 V_1^2}{m_2^2}$$

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{m_1 V_1^2 (m_2 + m_1)}{m_2}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{m_2 (q_1^2 + q_2^2)}{4\pi\epsilon_0 L (m_1 + m_2)}}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{m_2 (q_1^2 + q_2^2)}{4\pi\epsilon_0 L \cdot m_1 (m_1 + m_2)}}$$

$$\frac{m_1}{m_2}$$

6 из 6