

Задача 1

$x, y, z > 0$ (no $y < n$)

27-09-18

B1.

$$\begin{cases} x^2 + 2 = (y+z)^2 \\ y^2 + 3 = (x+z)^2 \\ z^2 + 4 = (x+y)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-y-z)(x+y+z) + 2 = 0 \quad (1) \\ (y-x-z)(x+y+z) + 3 = 0 \quad (2) \\ (z-x-y)(x+y+z) + 4 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(3) - (2):

$$(x+y+z)(z-x-y-y+x+z) + 1 = 0$$

$$(x+y+z)(z-y) = -\frac{1}{2}$$

т.к. $x+y+z > 0$ ($x, y, z > 0$), $z-y < 0$, $z < y$

(3) - (1):

$$(x+y+z)(z-x-y-x+y+z) + 2 = 0$$

$$(x+y+z)(z-x) = -1$$

т.к. $x+y+z > 0$ ($x, y, z > 0$), $z-x < 0$, $x > z$

(2) - (1):

$$(x+y+z)(y-x-z-x+y+z) + 1 = 0$$

$$(x+y+z)(y-x) = -\frac{1}{2}, \quad \text{т.к. } x+y+z > 0 \text{ (} x, y, z > 0 \text{),}$$

$$y-x < 0, y < x$$

Итого:

$$\begin{cases} z < y \\ z < x \\ y < x \end{cases} \Rightarrow z < y < x$$

Задача 1

Заметим, что

$$(3) - (2) = (2) - (1) :$$

$$(x+y+z)(z-y) = (x+y+z)(y-x), \text{ т.к. } x+y+z \neq 0;$$

$$z-y = y-x$$

$$2y = x+z$$

$$y = \frac{x+z}{2}, \text{ подставляем в (2):}$$

$$\frac{(x+z)^2}{4} + 3 = (x+z)^2$$

$$\frac{3(x+z)^2}{4} = 3; \quad (x+z)^2 = 4, \text{ т.к. } x+z > 0;$$

$$x+z=2, \quad y = \frac{2}{2} = 1.$$

$$x = 2-z.$$

Подставляем x и y в (3):

$$z^2 + 4 = (2-z+1)^2$$

$$z^2 + 4 = 9 - 6z + z^2, \quad 6z = 5, \quad z = \frac{5}{6}, \quad x = \frac{7}{6}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{7}{6}; 1; \frac{5}{6}\right)$$

+ 125.

До обеда 1 кассир обслужил на 25% меньше, чем второй: пусть второй обслужил $4x$ посетителей, тогда первый обслужил $3x$ посетителей. При этом x — целое, т.к. $\text{НОД}(4,3)=1$; $x > 0$

После обеда 1 кассир обслужил на 20% больше, чем 2: пусть второй обслужил $6y$, тогда первый обслужил $5y$, y — целое, т.к. $\text{НОД}(5,6)=1$, $y > 0$.

Всего Первый обслужил на 10% больше, чем второй:

$$3x + 6y = \frac{11}{10} (4x + 5y)$$

Общее кол-во покупателей за день меньше 250:

$$3x + 6y + 4x + 5y < 250. \quad \text{Получили:}$$

$$\begin{cases} 3x + 6y = \frac{11}{10} (4x + 5y) \quad | \cdot 10 \\ 7x + 11y < 250 \end{cases} \quad \begin{cases} 5y = 14x \\ 7x + 11y < 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{14}{5}x \\ 7x + \frac{11 \cdot 14}{5}x < 250 \end{cases} \quad \begin{cases} 5y = 14x \\ x < 6 + \frac{116}{189} \end{cases}$$

т.к. x — целое: $x \leq 6$.

т.к. x — целое, y — целое, $x = 5$, т.к. $x > 0$, $x = 5$.

$y = 14$. Тогда второй кассир обслужил

всего $4 \cdot 5 + 5 \cdot 14 = 90$ покупателей. Ответ: 90

125

Задача 3.

Заметим, что количество многоугольников -
 это кол-во способов выбрать 3 и более
 точки из отмеченных, т.е. число сочетаний.

1. Количество многоуг., содержащих т. А.

Заметим, что теперь мы выбираем из 2023
 точек (1 уже выбрана), при этом нам
 нужно выбрать хотя бы ещё 2 точки.

Т.е. всего таких многоугольников:

$$S_1 = C_{2023}^2 + C_{2023}^3 + \dots + C_{2023}^{2023}, \text{ где } C_n^m - \text{число} \\ \text{сочетаний из } n \text{ по } m$$

2. Кол-во многоугольников, не содержащих т. А.

Заметим, что в отсутствие точки А, мы делаем
 выбор из 2023 точек, при этом для минималь-
 ного многоугольника нам нужно 3 точки.

Значит кол-во таких многоугольников:

$$S_2 = C_{2023}^3 + C_{2023}^4 + \dots + C_{2023}^{2023}$$

(+). 135.

Вернёмся заметить, что $S_1 = S_2 + C_{2023}^2 =$

$$= S_2 + \frac{2023!}{2021! \cdot 2!} = S_2 + \frac{2022 \cdot 2023}{2} = S_2 + 2045253$$

Ответ: кол-во многоуг., содержащих т. А. на
 2045253 больше, чем многоуг., не
 содержащих т. А. 1431

Задача 4.

$$g(x) = x^2 + 6x + 2024 = (x+3)^2 + 2015.$$

Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $f(x)$,
 Тогда, т.к. $f(g(x))$ не имеет корней,

$$x_1, x_2, x_3 < 2015 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{l} \text{это — минимальная граница} \\ D(g) = [2015; +\infty) \end{array} \right)$$

Заметим, что на промежутке

$(\max(x_1, x_2, x_3); +\infty)$ $f(x)$ возрастает,
 т.е. возрастает и на промежутке $[2015; +\infty)$

Также заметим, что $g(0) = 2024$.

$$\text{т.е. } f(2024) = f(g(0))$$

$$\text{т.к. } f(\max(x_1, x_2, x_3)) = 0, \quad f(2015) > 0.$$

$$729 = 3^6$$

05. ~~12/2018~~

1 43 1

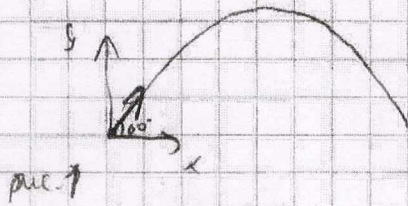
$$m_B = 1,185 - m_A = 1,05 - 1,35 = 0,3 \text{ кг}$$

$$\text{Ответ: } m_A = 1,35 \text{ кг, } m_B = 0,3 \text{ кг}$$

2 из 2

Задача 5

Заметим, что если запустить шарик под углом к горизонту, он будет лететь по параболе:



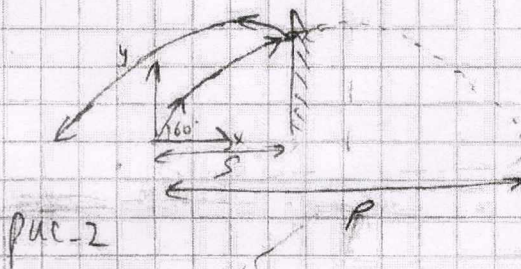
А т.к. удар о стену абсолютно упругий, шарик продолжит лететь по параболе (см. рисунок 2)

Знай, если расстояние от точки запуска до стены обозначить за s ,

а длину всей траектории по оси Ox за P (см. рис. 2),

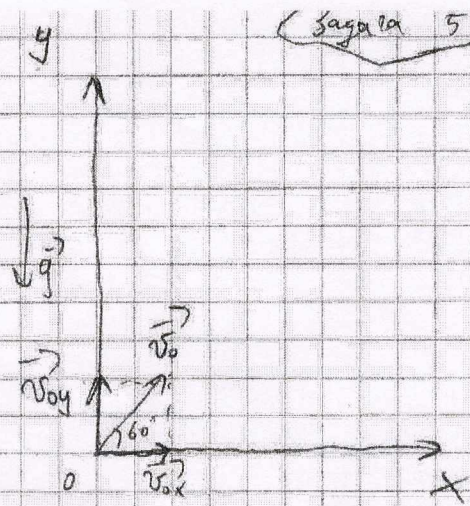
то искомое расстояние от места падения шарика до места старта ~~шарика~~ (P_k) равно $P - s$

$$P_k = P - s = |s - (P - s)| = |2s - P|$$



1 из 4

Задача 5



$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0y} + \vec{v}_{0x}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 20 \text{ м/с}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 20\sqrt{3} \text{ м/с}$$

Используя:

$$v_x = v_0 \cos \alpha = 15 \text{ м/с}$$

$$v_y = 20\sqrt{3} \text{ м/с} = 15\sqrt{3} \text{ м/с}$$

По оси Ox шарик движется равноускоренно

$$S_x = v_x t = 15\sqrt{3} t = (20\sqrt{3})^2 = 11,25 \text{ м}$$

Высота от горизонтальной поверхности шарика до горизонтальной поверхности $S_y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = 11,25$

Решив это квадратное уравнение получим 2 корня: $t_1 = 0,34 \text{ с}$, $t_2 = 6,58 \text{ с}$

1. Шарик пролетит в стену через $0,34 \text{ с}$

~~Вдоль оси Ox шарик движется равноускоренно~~

Тогда $S_x =$

Вдоль оси Oy шарик движется равноускоренно.

Найдём макс. высоту подъёма и время макс. подъёма шарика (если нет стены).

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{20 \cdot 20 \cdot 3}{20} = 60 \text{ м} = v_{0y} t_m - \frac{gt_m^2}{2}$$

$$5t_m^2 - 20\sqrt{3}t_m + 60 = 0; t_m^2 - 4\sqrt{3}t_m + 12 = 0 \quad 2 \text{ и } 4$$

$$(t - 2\sqrt{3})^2 = 0$$

$$t = 2\sqrt{3} \text{ с.}$$

3а. Это время будет, если шарик пройдет

$$t_m \cdot v_{0x} = 40\sqrt{3} \text{ м (т.к. движение равномерное)}$$

$$\text{Скорее всего } l = 40\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 80\sqrt{3} \text{ м}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

$$v_x = v \cos \beta = 20 \text{ м/с}$$

$$v_y = v \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$v_y = 30 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 10\sqrt{5} \text{ м/с}$$

$$S_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{-2g} = \frac{400 \cdot 5 - 100 \cdot 5}{-20} = 35 \text{ м - высота}$$

от места старта до места столкновения со стеной.

$$35 \text{ м} = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad 5t^2 - 20\sqrt{3}t + 35 = 0$$

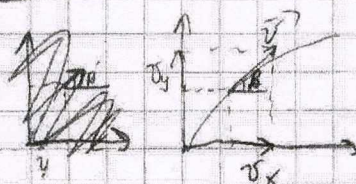
$$t^2 - 4\sqrt{3}t + 7 = 0, \quad D = 48 - 28 = 20$$

$$t_1 = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} = 3,46 - 2,24 = 1,23 \text{ с}$$

$$t_2 = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} = 5,7 \text{ с} \quad \text{Б 434}$$

задача 3

27-09-18



(задача 5)

27-09-18

Т.е. у нас есть 2 ситуации:

1. Шарик врежется в стену через $t_1 = 1,23$ с.

Тогда вдоль оси Ox он пролетит $v_{0x} t_1 = 24,6$ м

до стены. Т.е. $S = 24,6$

$$\text{Тогда } r_k = |2 \cdot 24,6 - 80\sqrt{3}| =$$

$$= |49,2 - 138,6| = 89,4 \text{ м}$$

2. Шарик врежется в стену через $t_2 = 5,7$ с.

$$\text{Тогда } S = v_{0x} \cdot t_2 = 114 \text{ м}$$

$$r_k = |2 \cdot 114 - 80\sqrt{3}| = |228 - 138,6| =$$

$$= 89,4 \text{ м.}$$

~~Ответ: $r_k = 89,4$ м~~

В обоих случаях расстояние совпало.

Ответ: $r_k = 89,4$ м

10

4 43 4

Задача 6

$$\rho_B = \frac{m_B}{h_B \cdot S}, \quad h_B = \frac{m_B}{\rho_B \cdot S}$$

$$\rho_A = \frac{m_A}{h_A \cdot S}, \quad h_A = \frac{m_A}{\rho_A \cdot S}$$

Обозначения:

 h_B - начальная высота ^{до} воды h_A - начальная высота ^{до} льда m_A - начальная масса льда m_B - начальная масса воды

Заметим, что начальный уровень воды равен

$$h_B + h_A = 1,2 \text{ м} \quad (\text{значение взято из графика}),$$

а конечный уровень воды равен:

$$\frac{m_B + m_A}{\rho_B S} = 1,1 \text{ м} \quad (\text{т.к. масса не меняется; значение взято из графика})$$

Имеем:

$$\begin{cases} \frac{m_B}{\rho_B S} + \frac{m_A}{\rho_A S} = 1,2 \\ \frac{m_B + m_A}{\rho_B S} = 1,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_B \rho_A + m_A \rho_B = 1,2 \rho_B \rho_A S \\ m_B + m_A = 1,1 \rho_B S \quad | \cdot \rho_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_A \rho_B - m_A \rho_A = 1,2 \rho_B \rho_A S - 1,1 \rho_B \rho_A S \\ m_B + m_A = 1,1 \rho_B S \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_A = \frac{0,1 \rho_B \rho_A S}{\rho_B - \rho_A} = \frac{0,1 \cdot 1000 \cdot 900 \cdot 15 \cdot 10^{-4}}{1000 - 900} = 1,35 \text{ кг} \\ m_B + m_A = 1,1 \rho_B S \end{cases}$$

1 из 2

Задача 8

27-09-18

$$m_b = 1,1965 - m_n = 1,65 - 1,35 = 0,3 \text{ кг}$$

$$\text{Ответ: } m_n = 1,35 \text{ кг}, m_b = 0,3 \text{ кг}$$

2 из 2

5