Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Ю-ЕН-10-100

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	8	10	6	15	14	90

Вариант 2

1

$$7\sqrt{4-3x}-3|2x-5| \le 7x-3|2\sqrt{4-3x}-5|$$

$$4-3x\ge 0 \Rightarrow x\le \frac{4}{3} \Rightarrow 2x-5\le 0.$$

$$7\sqrt{4-3x}+6x-15\le 7x-3|2\sqrt{4-3x}-5|$$

Раскроем модуль:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sqrt{4-3x}-5\ge 0\\ 7\sqrt{4-3x}+6x-15\le 7x-6\sqrt{4-3x}+15\end{cases}\\ \begin{cases}2\sqrt{4-3x}-5<0\\ 7\sqrt{4-3x}+6x-15\le 7x+6\sqrt{4-3x}-15\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -\frac{3}{4}\\ 13\sqrt{4-3x}\le x+30\end{cases}\\ \begin{cases}x>-\frac{3}{4}\\ \sqrt{4-3x}\le x\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -\frac{3}{4}\\ \sqrt{4-3x}\le \frac{x}{13}+30\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ 4-3x-x^2\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left[1;\frac{4}{3}\right]$$

+

Ответ: $x\in\left[1;\frac{4}{3}\right]$.

3

$$a=\frac{4b-1}{b},\quad b=\frac{c-1}{c},\quad c=\frac{4d-1}{d},\quad d=\frac{a-1}{a}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\frac{4c-4-c}{c}}{\frac{c-1}{c}}=\frac{3c-4}{c-1}=\frac{\frac{12d-3-4d}{d}}{\frac{4d-1-d}{d}}=\frac{8d-3}{3d-1}=\frac{\frac{8a-8-3a}{a}}{\frac{3a-3-a}{a}}=\frac{5a-8}{2a-3}$$

$$a=\frac{5a-8}{2a-3}\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow (a-2)^2=0\Rightarrow a=2$$

$$d=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2};\ c=2;\ b=\frac{1}{2}$$

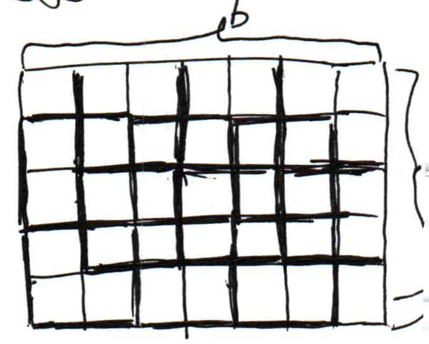
+

Ответ: $a=2;\ b=\frac{1}{2};\ c=2;\ d=\frac{1}{2}$.

лист 1

№4 Начнем заполнять с лев. нижн. угла. Расположим „~~с~~крайние" квадратики рядом, т. к. если их наложить, будет общими 2 клет

Далее разместим квадраты так, чтобы ~~каждый ква~~ максимальное кол-во квадратов (все, кроме крайних) делили 4 клетки с 4 квадратами.



Всего квадратов будет $N = 2(b//2)(a//2)$, где // — операция деления без остатка. Итого может быть $2(23//2)(25//2) = $ квадрат

№5 Для гола нужно попасть в промежуток h_1 высот $h + d < h_1 < H$.

Выведем траекторию движения мяча:

$$\left.\begin{aligned} y &= v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \\ x &= v_0 \cos\alpha t \end{aligned}\right| \Rightarrow y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = S\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)}{2v_0^2} = h_1$$

Нижняя граница:

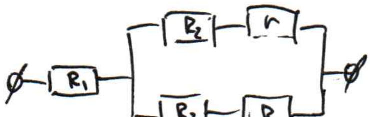
$$S\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gS^2(\mathrm{tg}^2\alpha+1)}{2v_0^2} = h + d \Rightarrow \left[\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\alpha &= 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \mathrm{tg}\,\alpha &= 2 + \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} \alpha &= 22{,}7^\circ \\ \alpha &= 74{,}4^\circ \end{aligned}\right.$$

Верхняя граница:

$$S\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gS^2(\mathrm{tg}\,\alpha + 1)}{2v_0^2} = H \Rightarrow \left[\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\alpha &= 2 + 0{,}4\sqrt{15} \\ \mathrm{tg}\,\alpha &= 2 - 0{,}4\sqrt{15} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} \alpha &= 24{,}3^\circ \\ \alpha &= 74{,}3^\circ \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\alpha \in (22{,}7^\circ; 24{,}3^\circ) \cup (74{,}3^\circ; 74{,}4^\circ)$.

№8 Преобразуем схему с помощью преобр. „звезда-треугольник",



$$R_1 = \frac{rR}{r+R+R_x} \quad R_2 = \frac{RR_x}{r+R+R_x} \quad R_3 = \frac{rR_x}{r+R+R_x}$$

Тогда $R_0 = R_x = R_1 + \frac{(R_2+r)(R_3+R)}{R_2+r+R_3+R}$

числа?

$$R_x = \frac{rR}{r+R+R_x} + \frac{\left(\frac{RR_x + r^2 + rR + rR_x}{r+R+R_x}\right)\left(\frac{rR_x + Rr + R^2 + RR_x}{r+R+R_x}\right)}{\frac{RR_x + rR_x + rR + r^2 + rR_x + rR + R^2 + RR_x}{r+R+R_x}} \Rightarrow R_x = 8\,\Omega.$$

$= \frac{rR}{r+R+R_x} +$

Ответ: $8\,\Omega$.

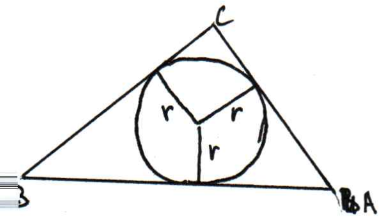
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 10-ЕИ-10-100

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

2



Радиус вписанной окружности равен $\frac{d}{2} = 4$.
Выразим длины сторон, приняв a как декремент прогрессии:

$AC = 8 + a$
$BC = 8 + 2a$
$AB = 8 + 3a$.

Выразим площадь ΔABC через радиус впис. окр:

$S = \frac{r}{2}(AB + BC + AC) = 2(24 + 6a) = 48 + 12a.$

$S^2 = 2304 + 1152a + 144a^2$

По теореме Герона:

$S = \sqrt{p(p-8-a)(p-8-2a)(p-8-3a)}$, где p – полупериметр ΔABC, $p = 12 + 3a$.

$S = \sqrt{(12+3a)(4+2a)(4+a)(4)} \Rightarrow S^2 = 4(48 + 24a + 12a + 6a^2)(4+a) = 24(8 + 6a + a^2)(4+a) =$

$= 24(32 + 24a + 4a^2 + 8a + 6a^2 + a^3) = 24(a^3 + 10a^2 + 32a + 32)$

$\frac{S^2}{24} = a^3 + 10a^2 + 32a + 32 = 96 + 48a + 6a^2 \Rightarrow a^3 + 4a^2 - 16a - 64 = 0$

$(a-4)\underbrace{(a^2 + 8a + 16)}_{D=0} = 0 \Rightarrow (a-4)(a+4)^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 4$

$\left[\begin{array}{l} P = 24 + 6a = 48 \\ P = 24 + 6a = 0 \text{ (не уд.)} \end{array}\right.$

$\boxed{\text{Ответ: } 48.}$

+

6

$\eta = \frac{A_{пол}}{Q_{затр}} = \frac{\lambda m}{C\Delta T} \Rightarrow \lambda m = \eta C \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\lambda m}{C\eta} = 13{,}2\,K$

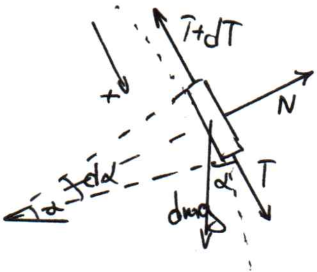
Ответ: $\Delta T = 13{,}2K$.

6

лист 2

№7

Рассмотрим кусок каната бесконечно малой длины dl, лежащий на блоке и составляющий угол α между прямыми OB и прямой, соединяющей его с точкой O:



Условие равновесия: (пр. на x):

$-T-dT+T+dmg\cos\alpha=0=ma$ $(a=0)$.

$dmg\cos\alpha=dT$

Канат однороден $\Rightarrow dm=dl\cdot\rho_l=\frac{dl}{l}\cdot m=\frac{d\alpha}{\pi}\cdot\frac{m}{l}\cdot\pi R=$

$\frac{Rmg}{l}\cos\alpha\cdot d\alpha=dT.$

$\int\limits_{T_B}^{T_A}dT=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{Rmg}{l}\cos\alpha\cdot d\alpha\Rightarrow T_A-T_B=\frac{R}{l}mg\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)$, где T_A и T_B – силы натяжения каната в точке A и B соотв.

$T_A=T_B+\frac{Rmg\sqrt{2}}{2l}$

$T_B=Mg$, где M – масса свеш. части каната $\Rightarrow T_B=\frac{mg}{2l}(l-\pi R)$.

$T_A=\frac{mg}{2l}\left(\sqrt{2}R+l-\pi R\right)=\frac{mg}{2l}\left(R(\sqrt{2}-\pi)+l\right)=4{,}6\ Н$

Ответ: $T_A=4{,}6Н.$