Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 58-08-15

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	0	10	10	15	15	87

Вариант 1

№1.

Пусть n - кол-во студентов.

Пусть x (тысяч руб.) - изначальная доля денег каждого студента.

Пусть S (тысяч руб.) - стоимость „умной" колонки.

$nx = S$.

Оказалось, что двое отказались участвовать и забрали свою долю денег, а остальные внесли дополнительно по одной тысяче руб, значит:

$2x = 1\cdot(n-2)$

$n = 2x+2$

$x(2x+2) = S$

$2x^2+2x = S$

$x^2+x-\frac{S}{2} = 0$

$D = 1+4\cdot\frac{S}{2} = 1+2S$

$x = \frac{-1+\sqrt{1+2S}}{2}$ или $x = \frac{-1-\sqrt{1+2S}}{2} < 0$, значит такое не возможно.

$1+2S$ должно быть квадратом целого числа, иначе x будет нецелым числом, но тогда S тоже будет нецелым ($nx=S$), а это противоречит условию задачи.

Сказано, что $8 < S < 20$.

Только при $S = 12$, выражение $1+2S$ будет квадратом целого числа.

Следовательно цена колонки 12000 руб.

Ответ: 12000 руб.

№2

Ответ: 9999 7 48 49 50 51 ... 79 80.

Чтобы число было наибольшим в начале должно стоять максимально-возможное кол-во 9. Наибольшее возможное кол-во 9 в начале числа — 4, т.к чтобы было 5 девяток необходимо зачеркнуть минимально 84 цифры, а $84 > 80$.

После того как мы зачеркнули цифры так, чтобы в начале стояли 4 девятки мы получили последовательность: 9999 40 41 42 ... 80. При этом осталось

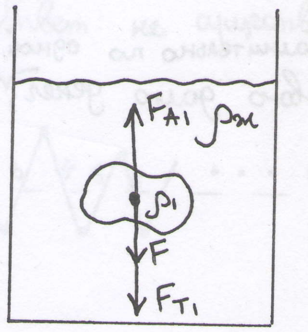
$80 - 8 - 3 \cdot 19 = 72 - 57 = 15$ цифр, которые мы можем зачеркнуть.

Нам необходимо поставить на 5 место наибольшею возможную цифру. Это цифра 7. Чтобы это сделать уберем все цифры до нее (кроме 9-ок), то есть последовательность 40 41 42 ... 46 4. Это как раз 15 цифр. Значит больше мы не сможем походить. Поставить на 5 место цифру большую 7 не получится, т.к они стоят после 47, а значит на них нужно потратить большее число ходов, а убрать больше цифр не получится, т.к. всего 80 цифр можно убрать. Следовательно, наибольшее число, которое мы можем получить 999974849... 80.

№7.

Рассмотрим два случая: когда приложенная сила действует вниз, то есть не дает телу всплыть; когда приложенная сила действует вверх, то есть не дает телу утонуть, сильнее погрузиться в жидкость.

1).



$F_{A1} = F + F_{T1}$

$F_{A1} = \rho_ж \cdot V \cdot g$

$F_{T1} = mg$

$m_1 = \rho_1 \cdot V$

$\rho_ж \cdot V \cdot g = F + \rho_1 \cdot V \cdot g$

$\rho_1 = \dfrac{\rho_ж \cdot V \cdot g - F}{Vg}$

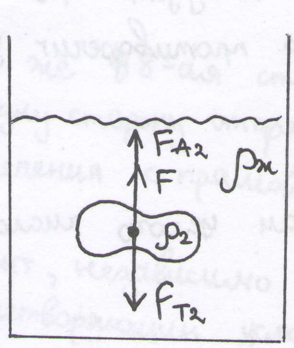
Пусть F_{A1}, F_{T1} – силы архимеда и тяжести соответственно (в 1-ом случае), действующие на тело.

Пусть ρ_1 – плотность тела в 1-ом случае.

Пусть m_1 – масса тела в 1-ом случае.

$$\rho_1 = \rho_ж - \frac{F}{Vg} = 1000\ кг/м^3 - \frac{2\,Н}{1л \cdot 10\frac{Н}{кг}} = 1000\ кг/м^3 - \frac{2\,Н}{\frac{1}{1000}м^3 \cdot 10\frac{Н}{кг}} =$$
$$= 1000\ кг/м^3 - 200\ кг/м^3 = 800\ кг/м^3$$

2).



$F_{A2} + F = F_{T2}$

$F_{A2} = F_{A1} = \rho_ж \cdot V \cdot g$

$F_{T2} = m_2 g$

$m_2 = \rho_2 \cdot V$

$\rho_ж \cdot V \cdot g + F = \rho_2 \cdot V \cdot g$

$\rho_2 = \dfrac{\rho_ж \cdot V \cdot g + F}{Vg}$

Пусть F_{A2}, F_{T2} – силы архимеда и тяжести соответственно (во 2-ом случае), действующие на тело.

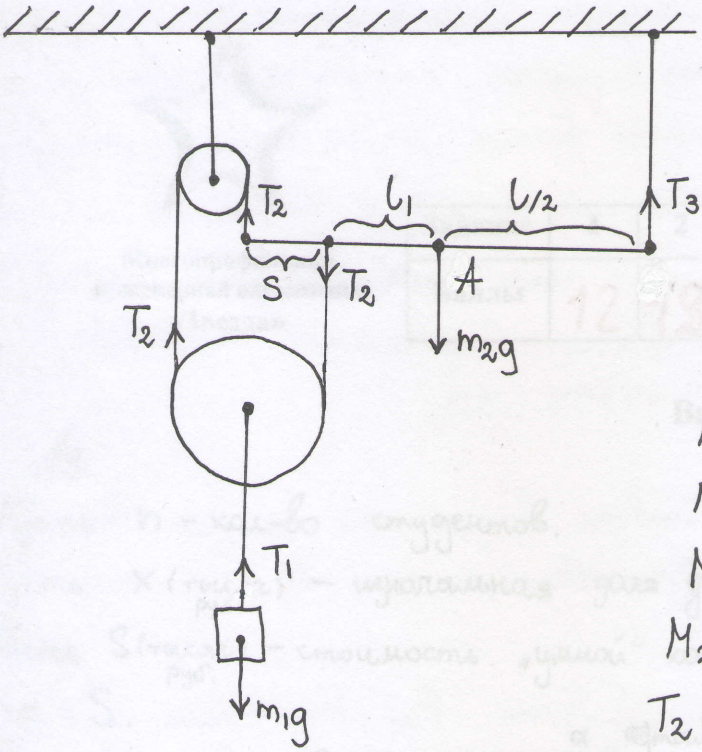
Пусть ρ_2 – плотность тела во 2-ом случае.

Пусть ~~m~~ m_2 – масса тела во 2-ом случае.

$$\rho_2 = \rho_ж + \frac{F}{Vg} = 1000\ кг/м^3 + \frac{2\,Н}{1л \cdot 10\frac{Н}{кг}} = 1000\ кг/м^3 + \frac{2\,Н}{\frac{1}{1000}м^3 \cdot 10\frac{Н}{кг}} =$$
$$= 1000\ кг/м^3 + 200\ кг/м^3 = 1200\ кг/м^3$$

Ответ: 1) $800\ кг/м^3$; 2) $1200\ кг/м^3$.

№8



$$T_1 = m_1 g$$

$$2T_2 = T_1 \quad \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{m_1 g}{2}$$

Запишем условие равновесия стержня.

$$T_3 + T_2 = m_2 g + T_2$$

$$T_3 = m_2 g$$

Запишем правило моментов для стержня (A)

$$M_1 = T_2 \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_2 = T_2 \cdot l_1 \qquad l_1 = \frac{l}{2} - S$$

$$M_3 = T_3 \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_2 + M_3 = M_1$$

$$T_2\left(\frac{l}{2} - S\right) + T_3 \cdot \frac{l}{2} = T_2 \frac{l}{2}$$

$$\frac{m_1 g}{2}\left(\frac{l}{2} - S\right) + m_2 g \cdot \frac{l}{2} = \frac{m_1 g}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

$$\frac{m_1}{2} - \frac{m_1 S}{l} + m_2 = \frac{m_1}{2}$$

$$m_2 = \frac{m_1 S}{l} = \frac{1кг \cdot 10см}{50см} = \frac{1}{5}кг = 0,2кг$$

Ответ: 0,2кг.

№5

$$m_1 = m_1^1 + m_1^2$$

$$m_1^1 = V_1^1 \cdot \rho_1$$

$$V_1^1 = S_1 \cdot h$$

$$S_1 = \pi r^2$$

$$m_1^2 = V_1^2 \cdot \rho_2$$

$$V_1^2 = V_1^3 - V_1^1$$

$$V_1^3 = S_2 \cdot h$$

$$S_2 = \pi R^2$$

$$m_2 = m_2^1 + m_2^2$$

$$m_2^1 = V_1^1 \cdot \rho_2$$

$$V_1^1 = S_1 h$$

$$S_1 = \pi r^2$$

$$m_2^2 = V_1^2 \rho_1$$

$$V_1^2 = V_1^3 - V_1^1$$

$$V_1^3 = S_2 \cdot h$$

$$S_2 = \pi R^2$$

$$\rho_1 = 2000кг/м^3 = 2г/см^3$$

$$\rho_2 = 4000кг/м^3 = 4г/см^3$$

$$m_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \rho_1 + (\pi \cdot R^2 \cdot h - \pi r^2 h)\rho_2 = \pi \cdot h \cdot (r^2 \cdot \rho_1 + (R^2 - r^2)\rho_2)$$

$$m_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \rho_2 + (\pi \cdot R^2 \cdot h - \pi r^2 h)\rho_1 = \pi \cdot h (r^2 \cdot \rho_2 + (R^2 - r^2)\rho_1)$$

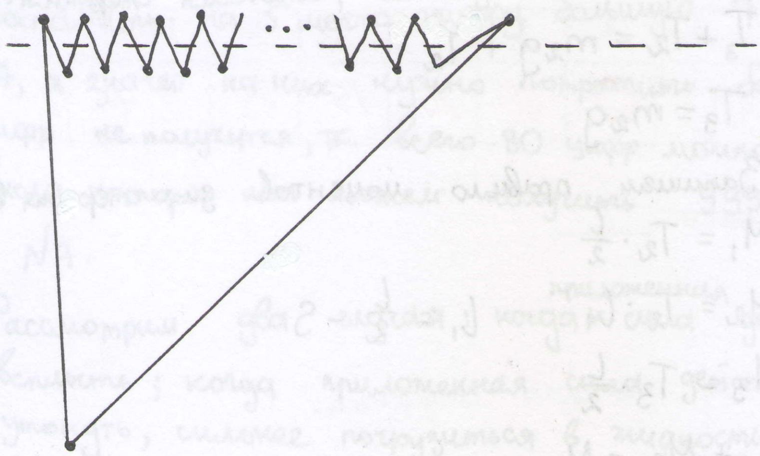
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\pi \cdot h \cdot (r^2 \cdot \rho_1 + (R^2 - r^2)\rho_2)}{\pi \cdot h \cdot (r^2 \cdot \rho_2 + (R^2 - r^2)\rho_1)} = \frac{r^2 \cdot \rho_1 + (R^2 - r^2)\rho_2}{r^2 \cdot \rho_2 + (R^2 - r^2)\rho_1} = \frac{2 + (4-1)4}{4 + (4-1)2} =$$

$$= \frac{2+12}{4+6} = \frac{14}{10} = 1,4$$

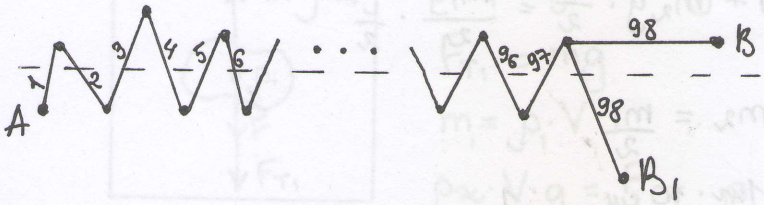
Ответ: 1, 4.

№3.

а). Ответ: существует.



б). Ответ: не существует.



Рядом со сторонами многоугольника поставим числа, обозначим их по порядку, чтобы было удобнее.

Рассмотрим 2 случая, когда точки A и B_1 по одну сторону от прямой, и когда A и B на разных сторонах.

Если 98-ая сторона закончится в точке B, то тогда 99-ая (AB) будет пересекать прямую, но 98-ая не будет иметь точек пересечения с прямой. Противоречие.

Если же 98-ая сторона закончится в точке B_1, то тогда точки A и B_1 будут по одну сторону от прямой, то есть 99-ая сторона (AB_1) не будет иметь точек пересечения с прямой. Противоречие.

Значит, независимо от положения ~~точки~~ точки B, не получится многоугольник удовлетворяющий условию задачи.

№6.

$P\tau_1 = c_в \cdot m_в (t_к - t)$

$P\tau_2 = c_в \cdot m_л (t_к - t) + \lambda m_л$

$m_в = V_в \cdot \rho = 2л \cdot 1000 кг/м^3 = \frac{2}{1000} м^3 \cdot 1000 кг/м^3 = 2 кг.$

$P = 4200 \cdot 2 \cdot 100 : 600 = 1400$ Вт.

$m_л = \frac{1400 \cdot 900}{4200 \cdot 100 + 330000}$ кг $= \frac{126}{75} = \frac{42}{25}$ к $=$

P – мощность плиты

$\tau_1 = 10 мин = 600 сек$ $\tau_2 = 15 мин = 900 сек$

$t_к = 100°$ – температура кипения

$m_в, m_л$ – массы воды и льда соответственно