

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 56-09-01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	13	0	10	12	6	78

Вариант 1

2.

количество покупателей

1000 работало до обеда - $0,75x$
 2000 работало до обеда - x
 1000 после обеда - $1,2y$
 2000 после обеда - y

	-25%	+10%
1	$0,75x$	$1,2y$
2	x	y
Всего	$\frac{7}{4}x$	$\frac{22}{10}y$

$$\begin{cases} (x+y) \cdot 1,1 = 0,75x + 1,2y \\ \frac{7}{4}x + \frac{22}{10}y < 250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{10}x + \frac{11}{10}y = \frac{3}{4}x + \frac{6}{5}y \\ \frac{7}{4}x + \frac{22}{10}y < 250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22x + 22y = 15x + 24y \\ \frac{7}{4}x + \frac{22}{10}y < 250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7}y \\ \frac{1}{2}y + \frac{22}{10}y < 250 \end{cases}$$

$$\frac{27}{10}y < 250 \Rightarrow y < \frac{250 \cdot 10}{27} \approx 92,6, \text{ но так как в условии задачи говорится о количестве покупателей, } y \in \mathbb{N} \Rightarrow y \leq 90$$

$$x = \frac{2}{7}y, \text{ чтобы } x \text{ имел натуральное значение необходимо, чтобы } y:7 \Rightarrow$$

$$y:7 \mid \Rightarrow y = 70 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 70}{7} = 20$$

$$x+y = 70+20 = 90$$

Ответ: 90

3.

количество многоугольников, содержащих точку A, находится по формуле

$$N_1 = C_{2023}^2 + C_{2023}^3 + C_{2023}^4 \dots + C_{2023}^{2023}$$

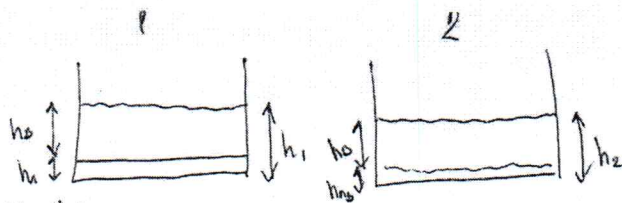
количество многоугольников, не содержащих точку A, находится по формуле

$$N_2 = C_{2023}^3 + C_{2023}^4 \dots + C_{2023}^{2023}$$

$$\cancel{C_{2023}^2} + \cancel{C_{2023}^3} + \cancel{C_{2023}^4} \dots + \cancel{C_{2023}^{2023}} > C_{2023}^3 + C_{2023}^4 \dots + C_{2023}^{2023} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 > N_2$$

⑥ $S = 15 \text{ см}^2 = 0,0015 \text{ м}^2$



В первом случае максимальная
уровень воды в соединении $h_1 = 120 \text{ см} = 1,2 \text{ м}$
в состав которого входят уровни воды h_n и уровни напора воды $h_nб$
 $h_1 = h_n + h_nб$

Сечение второе $t = 20 \text{ мин}$ без лег раствора и уровень воды стал $h_2 = 115 \text{ см} = 1,15 \text{ м}$
в состав которого входят уровни напора воды $h_nб$ и уровни воды, насыщенной из воды
 $- h_nб$

$h_2 = h_nб + h_nб$

Рассчитаем объем воды в обоих случаях
по таблице $V_n = \frac{m_n}{\rho_n}$, где V_n - объем воды, m_n - масса первоначальной воды
по таблице $V_nб = \frac{m_nб}{\rho_nб}$, где $V_nб$ - объем воды, насыщенной из воды,

$V = Sh$ $V_n = \frac{m_n}{\rho_n} = S \cdot h_n$ $h_nб + h_nб = h_2 = 1,15$
 $V_nб = \frac{m_nб}{\rho_nб} = S \cdot h_nб$ $h_n + h_nб = h_1 = 1,2 \Rightarrow h_n = 0,05 + h_nб$

$\begin{cases} \frac{m_n}{\rho_n} = S(0,05 + h_nб) \\ \frac{m_nб}{\rho_nб} = S h_nб \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m_n}{\rho_n} = 0,05S + S h_nб \\ \frac{m_nб}{\rho_nб} = S h_nб \end{cases}$

Возьмем уравнение из второго

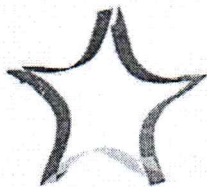
$\frac{m_n}{\rho_n} - \frac{m_nб}{\rho_nб} = 0,05S$

$m_n = \frac{0,05S}{\frac{1}{900} - \frac{1}{1000}} = \frac{0,05S}{\frac{1}{9000}} = 9000 \cdot 0,05 \cdot 0,0015 \text{ м}^2 = 0,675 \text{ м}$

Рассчитаем весь объем V_0 первоначальной трубы в соединении
 $V_0 = Sh_1 = \frac{m_n}{\rho_n} + \frac{m_nб}{\rho_nб}$, откуда $m_nб = (Sh_1 - \frac{m_n}{\rho_n}) \cdot \rho_nб$

$m_nб = (0,0015 \text{ м}^2 \cdot 1,2 \text{ м} - \frac{0,675 \text{ м}}{900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}) \cdot 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1,05 \text{ м}$

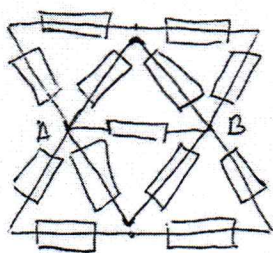
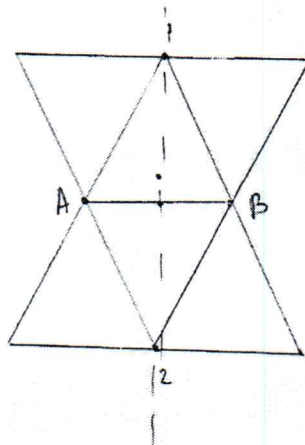
Объем: $0,675; 1,05 \text{ м}$



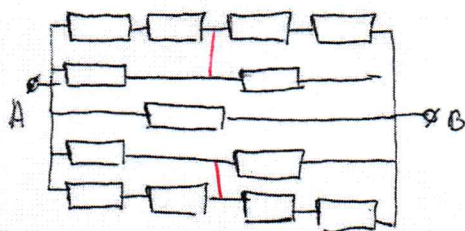
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 56-09-01

7) Заметим, что точки 1 и 2 имеют одинаковые потенциалы, поэтому можно разорвать их и получить следующую схему:



, приведем схему эквивалентную схему



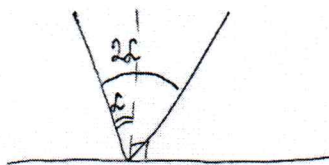
$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{4R_0} + \frac{2}{2R_0} + \frac{4}{R_0} + \frac{2}{2R_0} + \frac{1}{4R_0} = \frac{10}{4R_0} = \frac{10}{4 \cdot 10 \text{ Ом}} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_{\text{общ}} = 4 \text{ Ом}$$

Ответ: 4 Ом

8) Продолжим задающий и отражающий луч до их пересечения.

Пересечение происходит в т. (4; -1)

т.к. угол падения луча равен углу отражения
При горизонтальном положении зеркала 2) При отклонении зеркала на угол β



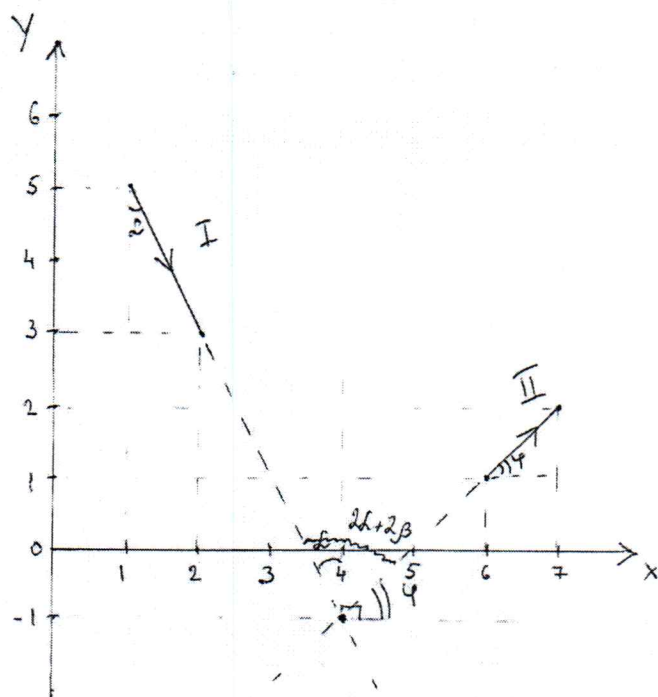
$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha = \arctg \frac{1}{2}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{1} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 90 - \varphi + \alpha$$

$$\alpha + 2\beta = 90 - \varphi$$

$$\beta = \frac{90 - \varphi - \alpha}{2} = \frac{45 - \arctg \frac{1}{2}}{2}$$



$$④ f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

т.к. многочлен имеет три различных корня $\Rightarrow$

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$g(x) = x^2 + 6x + 2024$$

$$f(g(x)) = (x^2 + 6x + 2024 - x_1)(x^2 + 6x + 2024 - x_2)(x^2 + 6x + 2024 - x_3)$$

т.к. $f(g(x))$ не имеет корней $\Rightarrow \Delta$ (дискриминант) квадратного уравнения в каждой скобке < 0

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 9 - 2024 + x_i = x_i - 2015 < 0 \Rightarrow x_i < 2015$$

$$-x_i > -2015$$

$$2024 - x_i > 9$$

$$f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) > 729$$

$$① \begin{cases} x^2 + 2z = (y+z)^2 & (1) \\ y^2 + 3 = (x+z)^2 & (2) \\ z^2 + 4 = (x+y)^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2z = y^2 + 2yz + z^2 \\ y^2 + 3 = x^2 + 2xz + z^2 \\ z^2 + 4 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases}$$

вычтем ур. (3) из (2)

$$\begin{cases} y^2 + 3 = x^2 + 2xz + z^2 \\ z^2 + 4 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases}$$

$$y^2 - z^2 - 1 = 2xz - 2xy + z^2 - y^2$$

$$(y-z)(y+z) = 2x(z-y) + (z-y)(z+y) + 1$$

$$(z-y)(2x+2y+2z) = -1 \quad (4)$$

вычтем ур. (2) из (1)

$$\begin{cases} x^2 + 2z = y^2 + 2yz + z^2 \\ y^2 + 3 = x^2 + 2xz + z^2 \end{cases}$$

$$x-y(x+y) - 1 = (y-x)(y+x) + 2z(y-x)$$

~~$$\begin{cases} x^2 + 2z = y^2 + 2yz + z^2 \\ y^2 + 3 = x^2 + 2xz + z^2 \\ z^2 + 4 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases}$$~~

$$(y-x)(y+z+2z+x+y) = -1 \quad (5)$$

$$(4) = (5)$$

$$(z-y)(2x+2y+2z) = (y-x)(2x+2y+2z)$$

$$(2x+2y+2z)(z-2y+x) = 0$$

$$\begin{cases} 2x+2y+2z=0 \\ z-2y+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \text{ т.к. } x, y, z \text{ натуральные} \\ z+x=2y \end{cases}$$

подставим в (2)

$$y^2 + 3 = 4y^2$$

$$3y^2 = 3$$

$$y = \pm 1 \quad (-1 - \text{не ест. кор. т.к. } y - \text{натуральное})$$

$$z+x=2$$

$$x=2-z$$

подставим в (1)

$$(2-z)^2 + 2 = (1+z)^2$$

$$4 - 4z + z^2 + 2 = 1 + 2z + z^2$$

$$-6z = -5$$

$$z = \frac{5}{6}$$

$$x = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{6}; 1; \frac{5}{6}$$