



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 61/2-11-95

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	8	13	13	15	10	10	0	79

Найти $(x; y; z) = ?$

$$2. \begin{cases} \frac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2 xy} = \frac{1}{3} \\ \frac{\log_3 y \cdot \log_5 z}{\log_5 yz} = \frac{3}{5} \\ \frac{\log_3 z \cdot \log_2 x}{\log_{16} zx} = 1 \end{cases}$$

Вариант 1

$$0 \text{ пз: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ xy > 0 \\ zy > 0 \\ z > 0 \\ zx > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

$xy \neq 1$
 $yz \neq 1$
 $zx \neq 1$

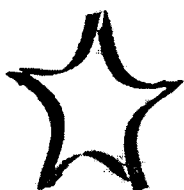
$$\begin{cases} 3 \log_3 x \cdot \log_4 y = \log_2 xy \\ 5 \log_3 y \cdot \log_5 z = 3 \log_5 yz \\ \log_3 z \cdot \log_2 x = \log_{16} zx \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \log_3 x \cdot \frac{1}{2} \log_2 y = \log_2 x + \log_2 y \\ 5 \log_3 y \cdot \frac{1}{2} \log_5 z = 3 \log_5 y + 3 \log_5 z \\ \frac{1}{3} \log_3 z \cdot \log_2 x = \frac{1}{4} \log_2 z + \frac{1}{4} \log_2 x \end{cases}$$

~~Итого $x = 1, y = 1, z = 1$~~

$$\begin{cases} \frac{\log_2(xy)}{\log_3 x \cdot \log_4 y} = \frac{3}{2} \\ \frac{\log_5(zx)}{\log_3 y \cdot \log_5 z} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_{16} zx}{\log_3 z \cdot \log_2 x} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\log_2(xy)}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \\ \frac{\log_5(zx)}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_{16} zx}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-95

2 (продолжение)

$$\begin{cases} \frac{1 + \log_3 y}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1 + \log_3 z}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \\ \frac{\log_3 y + 1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1 + \log_3 z}{\log_3 z} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\log_3 y + 1}{\log_3 x} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\log_3 y}{\log_3 z \cdot \log_3 y} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{\log_3 z}{\log_3 x \cdot \log_3 z} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 y \cdot \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \quad (1) \\ \frac{1}{\log_3 z} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \quad (2) \\ \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$(1) \frac{1}{\log_3 y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\log_3 x}$$

$$(2) \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} - \frac{1}{\log_3 z}$$

$$\begin{cases} (1) \frac{3}{2} - \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{6} - \frac{1}{\log_3 z} \Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \text{ а мы уже} \\ (2) \end{cases}$$

$$\text{а } \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{6} \Rightarrow \log_3 z = 3$$

$$\Rightarrow \underline{z = 3^3 = 27} \quad \text{Как проверить?}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_3 z} \Rightarrow \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 y = 2 \Rightarrow y = 3^2 = 9$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{2} \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow \underline{x = 3}$$

Ответ: (3; 9; 27)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-14-95

1) (продолжение)

$$\frac{LS}{DR} = \frac{1}{3} \Rightarrow DR = 3LS \Rightarrow b = 3LS = 3 \cdot \frac{1}{4}(a+b) = \frac{3}{4}(a+b)$$

$$b = \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}b \Rightarrow \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}a \Rightarrow b = 3a \Rightarrow LS = (a+b) \cdot \frac{1}{4} = 4a \cdot \frac{1}{4} = a$$

4) ~~Угол~~ Угол $\angle M$ опирается на BA . Определим $\angle K$.

~~1) $\triangle LSF \sim \triangle BFK$ по двум углам $\Rightarrow \frac{LS}{BK} = \frac{SF}{FB} = \frac{a}{a+2a} = \frac{1}{3}$~~

~~2) По двум углам $\triangle LSF \sim \triangle BFK \Rightarrow \frac{LS}{BK} = \frac{SF}{FB} = \frac{a}{a+2a} = \frac{1}{3}$~~

$\triangle LSM \sim \triangle AMK \Rightarrow \frac{LS}{AK} = \frac{SM}{MA} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2LS = AK \Rightarrow AK = 2a$

Из $\triangle LSF \sim \triangle BFK$ по двум углам $\Rightarrow \frac{LS}{BK} = \frac{SF}{FB} \Rightarrow \frac{SF}{FB} = \frac{a}{a+2a} = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{1}{3}$

~~Докажем, что $2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z \leq 28$~~

3) неравенство Коши-Буняковского-Шварца в векторном виде:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

где $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ и $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

Исходно $C = 2^n$

~~$2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z$ можно~~

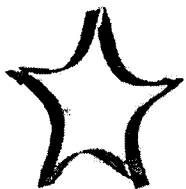
~~$2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z = 2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z$~~

~~но неравенство Коши-Буняковского-Шварца~~

~~$(2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z)^2 \leq (2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z)^2 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow |2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z| \leq \sqrt{(4+2+36)} \sqrt{(2^{n+1})^2 + (5n^2y)^2 + (6n^2z)^2} \Rightarrow |2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z| \leq \sqrt{42} \sqrt{2^{2n+2} + 25n^4y^2 + 36n^4z^2}$~~

~~$\sqrt{(4+2+36)} = 7.4 \approx 28 \Rightarrow |2^{n+1} + 5n^2y - 6n^2z| \leq 28$, максимум~~



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-95

~~3. (информация)~~

~~$\frac{2^{k+1} + 3 \cdot 2^k y - 6 \ln^2 z}{2} \leq 28$~~

~~$\frac{2^{k+1} + 3 \cdot 2^k y - 6 \ln^2 z}{2} \leq -28$, где y — переменная~~

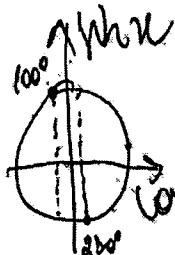
~~$\frac{2^{k+1} + 3 \cdot 2^k y - 6 \ln^2 z}{2} \leq 28$, что и требуется доказать.~~

4. $a_1 = \cos 10^\circ$, $a_n = \cos(10^n)^\circ$

Найти наим. значение $a_1 \cdot \cos n + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot n$, к.к.

$\cos 10^\circ = \cos(10^\circ + 2 \cdot 180^\circ) = \cos(10^\circ + 360^\circ \cdot k)$ в силу периодичности

наим. значения. Тогда $\cos(10^n)^\circ =$



$= \cos((10^n)^\circ + 360^\circ \cdot k)$

$\cos(10^{2023})^\circ = \cos(10^{2020} \cdot 1000 + 360^\circ \cdot k) =$

$= \cos(10^{2020} (1000 + 360))$ к.к.к. $= 10^{2020}$

к.к.к. $= -2 \cdot 10^{2020}$ наименьшее

$\cos(1000 - 720)^\circ = \cos 280^\circ = \cos(10^{2023})^\circ$

Там же отсюда $\cos 280^\circ = -\cos(100^\circ)$ угадали, что

$\cos(\frac{\pi}{2} \cdot 3 + 10^\circ) = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos 10^\circ - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin 10^\circ = \sin 10^\circ = \cos 280^\circ$

и $\cos 100^\circ = \cos(\frac{\pi}{2} + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$. Тогда $a_1 \cdot \cos n + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot n$

$= \cos 10^\circ \cdot \cos n + (\cos 100^\circ + \cos(10^{2023})^\circ + \cos(10^{2024})^\circ) \cdot n$

$= \cos 10^\circ \cdot \cos n + \cos(10^{2024})^\circ \cdot n$

Там же, $\cos(10^{2024})^\circ = \cos(1000 \cdot 10^{2021} + 360^\circ \cdot k) = \cos((1000 - 720) \cdot 10^{2021}) =$

$= \cos 280^\circ = \sin 10^\circ$, тогда к.к. значение наименьшее



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-95

4 (продолжим):

$$a_1 \cos x + (a_2 + a_{2025} + a_{2044}) \cdot ykx = \cos 10^\circ \cdot \cos x + yk 10^\circ \cdot ykx =$$

$$= \cos(x - 10^\circ)$$

$$y = \cos(x - 10^\circ)$$



$E(y): [-1, 1]$, значит наим. значение этой функции равно -1. Тогда наим. значение искомого выражения равно -1.

Ответ: -1.

3. Утверждение Коши-Буняковского-Шварца верно:
 $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$
 где любые $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Если $2x = t, yk^2 y = f$ и $ln^3 z = k$, тогда

$$4x + yk^4 y + ln^6 z = t^2 + f^2 + k^2 = 16 \text{ и } 2^{x+1} + 3yk^2 y - 6ln^3 z = f$$

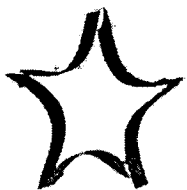
$= 2t + 3f - 6k$. По неравенству КБШ верно

$$(2t + 3f - 6k)^2 \leq (2^2 + 3^2 + (-6)^2)(t^2 + f^2 + k^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2t + 3f - 6k| \leq \sqrt{49}(t^2 + f^2 + k^2) \Rightarrow |2t + 3f - 6k| \leq 7\sqrt{t^2 + f^2 + k^2}$$

$$\sqrt{49(t^2 + f^2 + k^2)} = \sqrt{49 \cdot 16} = 7 \cdot 4 = 28, \text{ значит найденное соотношение}$$

$-28 \leq 2^{x+1} + 3yk^2 y - 6ln^3 z \leq 28$. Это означает, что
 искомого выражение $2^{x+1} + 3yk^2 y - 6ln^3 z \leq 28$, что
 и требовалось доказать.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 612-11-95

6. Дано:

q_1, q_2, m_1, m_2

L

или

Решение: 1) Запишем по о.ч.: $\vec{v}_1 = 0, \vec{v}_2 = 0$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2$
по закону сохранения импульса:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1}$$

$v_1 = ?$

$v_2 = ?$

Запишем энергию, $E = \frac{k q_1 q_2}{L} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{2} \cdot \frac{m_2^2 v_2^2}{m_1^2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{k q_1 q_2}{L} = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_2^2 \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 \right) = 2 k q_1 q_2$$

2) $v_1 = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{L \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 \right)}}; v_2 = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{L \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 \right)}}$, что

следует из 1-го пункта.

Ответ: $\frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{L \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 \right)}}; \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{L \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 \right)}}$

7. Дано:

$T = 100^\circ \text{C}$

$h_0 = 0,3 \text{ м}$

$h = 0,1 \text{ м}$

$p_a = p_1$

$S = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$

$m = 0 \text{ кг}$

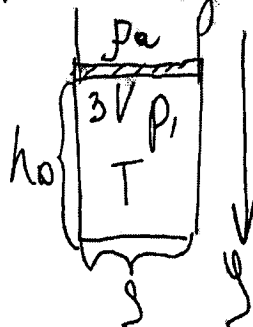
$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$

$m_n = ?$

или

Решение:

1) Невыученный пар:



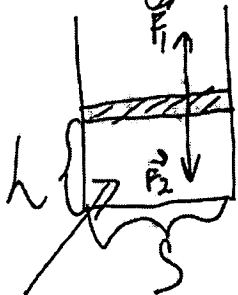
$p_a = 100000 \text{ Па}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-95

Исходные данные
7. 2) Космический корабль. Запишем по II закону Ньютона
применив к нему по оу:



$$\text{по } y: F_2 - F_1 = 0 \Rightarrow F_2 = F_1$$

$$F_1 = S \cdot \rho_a; F_2 = S \cdot \rho_a = S \cdot 2\rho$$

$V, T, 2\rho$

по уравнению Менделеева-Клапейрона найдем

$$\frac{m_n}{M} RT = p \cdot V \Rightarrow m_n = \frac{p \cdot V \cdot M}{RT} = \frac{p \cdot h \cdot S \cdot M}{RT}$$

$$= \frac{\rho_a \cdot h \cdot S \cdot M}{2RT} = \frac{10^5 \cdot 0,5 \cdot 100 \cdot 10^4 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31 \cdot 373} \approx 0,0087 \text{ кг}$$

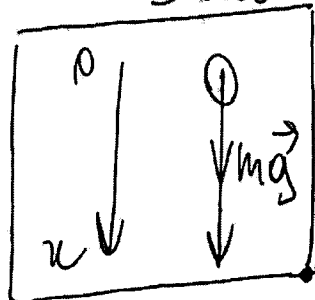
$$\approx 0,87 \text{ г}$$

Ответ: 0,87 г.

5. Дано:
 $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
 $U_H = ?$

Ус

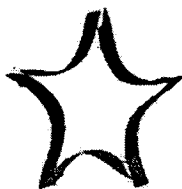
Сечение:



камень движется
вверх с ускорением
м.к.а. меняется $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{\text{суп}} = K \cdot U$$

$$U_{\text{кон}} = U_{\text{нач}} + \int_{t_1}^{t_2} a \, dt \Rightarrow U_{\text{кон}} = 0 \text{ В}; \text{ а } t_1 = 0 \text{ с}; t_2 = 2 \text{ с}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-95

5 (продолжение)

Найти время по отсечению II знака
графика:

$$\text{ОК: } F_{\text{суп}} + mg = ma$$

В конце нити $a = g \Rightarrow v_{\text{кон}} = 0$,

$a_1 = a = g$ и $v_{11} = -v_{12} \Rightarrow$ нити нелазутся.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} a dt; \quad 0 = -v_{11} + \int_{t_1}^{t_2} a dt \Rightarrow s = t_2 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Из рисунка найдем $a_2 = 10 \text{ м/с}^2$, $t_2 = 2 \text{ с}$, $a_1 = 20 \text{ м/с}^2$

$$v_{11} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot t_2 = \frac{10 + 20}{2} \cdot 2 = 30 \text{ м/с}$$

Ответ: 30 м/с