



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 73-11-08

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача 1.

$$\sqrt{2 - \log_2 x} - 2|4 \log_2 x - 7| \leq 9 \log_2 x - 2|4 \sqrt{2 - \log_2 x} - 7|.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда:

$$\sqrt{2-t} - 2|4t-7| \leq 9t - 2|4\sqrt{2-t} - 7|$$

$$\underbrace{9\sqrt{2-t} + 2|4\sqrt{2-t} - 7|}_{f(t)} \leq \underbrace{9t + 2|4t-7|}_{g(t)}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 2 - \log_2 x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

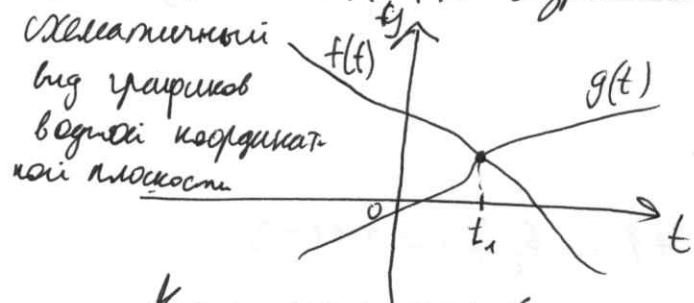
$$\begin{cases} \log_2 x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (0; 4]$$

$f(t) = 9\sqrt{2-t} + 2|4\sqrt{2-t} - 7|$ - убывающая функция

$g(t) = 9t + 2|4t-7|$ - возрастающая функция



Из графика видно, что ~~почти~~ на промежутке $t \in [t_1; +\infty)$ неравенство $f(t) \leq g(t)$ выполняется (без учета ограничений функции)

Найдем значение t_1 :

Заметим симметрию, тогда на y функции $f(t)$ и $g(t)$, а следовательно на $f(t) = f(\sqrt{2-t}) \Rightarrow$ равенство будет выполняться когда аргументы функции будут равны, т.е.

$$\sqrt{2-t} = t \Leftrightarrow \begin{cases} 2-t = t^2 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 2 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t+2) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow$$

Обратная замена: $\log_2 x \geq 1$, т.е. $\log_2 x$ - мон. возрастающая
 $x \geq 2$, с учетом ограничения $x \in (0; 4]$,

получили $x \in [2; 4]$.

Ответ: $[2; 4]$.

Задача 3.

$f(x) = ax^2 + (a+1)x + 6$ - целая функция при всех x

$2a+6+1 = \min$!

$f(x) = ax^2 + (a+1)x + 6$ - квадратичная функция, график parabola $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ чтобы $f(x) \geq 0$, нужно: ~~тогда~~ 1) $a > 0$
2) $D \leq 0$

$$D = (a+1)^2 - 4ab \leq 0$$

$$(a+1)^2 \leq 4ab$$

$b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$, тогда $b = b_{\min} = \frac{(a+1)^2}{4a}$

Квадратичная функция

Подставим $b_{\min}$ в исходное выражение:

$f(a) = 2a + \frac{(a+1)^2}{4a} + 1$ - функция зависящая от a , тогда, чтобы найти $\min$, найдем точку экстремума:

$$f'(a) = 2 + \frac{a^2 + 2a + 1}{4a} + 1 = 2a + 1 + \frac{a}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a}$$

$$f'(a) = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{a^2} \right) = 0 \quad | \cdot 4$$

$$9 - \frac{1}{a^2} = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{3}, \text{ но так как } a > 0, \text{ то } a = \frac{1}{3},$$

подставим найденное значение a :

$$f(a) = \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

$$f(a)_{\min} = \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{3}} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{6}{3} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Ответ: $\min = 3$.

Задача 6.

$U_0 = 210 \text{ В}$

$R_1 = 10 \text{ Ом}$

$R_2 = 20 \text{ Ом}$

$R_3 = 30 \text{ Ом}$

$R_4 = 40 \text{ Ом}$

$C = 200 \text{ нФ}$

$q_c = ?$

Полностью заряженный конденсатор $\Rightarrow q_c = \text{const} \Rightarrow I_c = \dot{q}_c = 0$

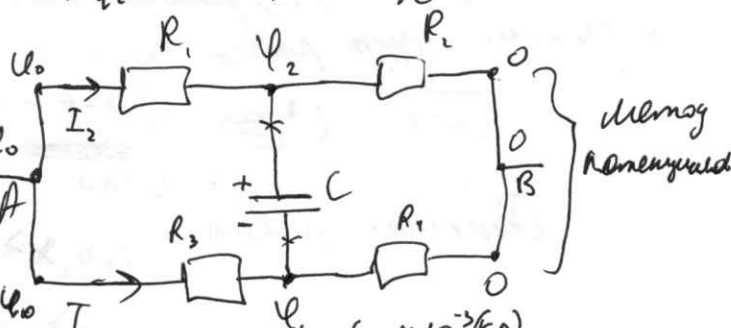
1) $U_0 - \varphi_1 = I_1 R_3 = \frac{U_0}{R_3 + R_4} \cdot R_3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \varphi_1 = U_0 - \frac{U_0}{R_3 + R_4} R_3 = U_0 \left(1 - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right)$

2) $U_0 - \varphi_2 = I_2 R_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} R_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_2 = U_0 \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

тогда $\varphi_1 = 210 \left(1 - \frac{30}{70} \right) = 210 \cdot \frac{40}{70} = 120 \text{ (В)}$

Ответ: $4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$ $\varphi_2 = 210 \left(1 - \frac{10}{30} \right) = 210 \cdot \frac{2}{3} = 140 \text{ (В)}$



$q_c = C U_c = C(\varphi_2 - \varphi_1) = 20 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ (Кл)}$

$\varphi_2 > \varphi_1 \Rightarrow \frac{+1}{-1} C, U_c$

$U_c = \varphi_2 - \varphi_1 = 20 \text{ (В)}$

$q_c = C U_c = 20 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ (Кл)}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 73-11-08

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача 5.

① Рассмотрим движение в магнитном поле:
Влетаю в область магнитного поля на заставку
начинаю двигаться сила Лоренца $\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}] \Rightarrow \vec{F}_L \perp \vec{v} \Rightarrow A_{F_L} = 0 \Rightarrow$
Затем 2 закона Коптона: $\Rightarrow |\vec{v}| = \text{const} \Rightarrow$
 $\vec{F}_L = m\vec{a} \Rightarrow F_L = ma_n$
 $q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{mv^2}{R}$
 $R = \frac{mv}{qB}$
Заметим, что движение будет происходить так:

$$dA_{F_L} = (\vec{F}_L, \vec{v}) dt = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{a}_n - \text{закон сохранения энергии}$$

$$(a_t = \frac{dv}{dt} = 0)$$

Заметим, что движение будет происходить так: R - радиус траектории зайца

$$t_1 = \frac{\pi m}{2qB}$$

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega}, \text{ где } \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

② Далее заставка вылетает из магнитного поля и начинает двигаться равноускоренно под силой $\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$
Из рисунка видно, что скорость $v_x = 0 \Rightarrow R = \frac{mv^2}{2}$

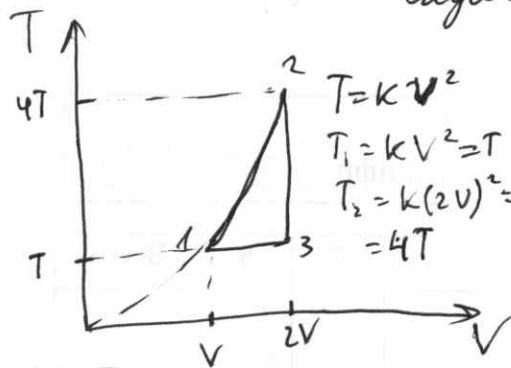


$\Rightarrow$ тело начинает двигаться по оси x равноускоренно с начальной скоростью $v_{0x} = 0$, тогда, когда тело вернется на высоту h потребуется предельно $S_x = R$, тогда:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2S_x}{a_x}} = \sqrt{\frac{2Rm}{qE}} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot v^2}{qB \cdot qE}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

Тогда $t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$ начальная скорость полета q нулевая!

$$\text{Ответ: } \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}} = \frac{m}{q} \left(\frac{\pi}{2B} + \sqrt{\frac{2v}{BE}} \right)$$



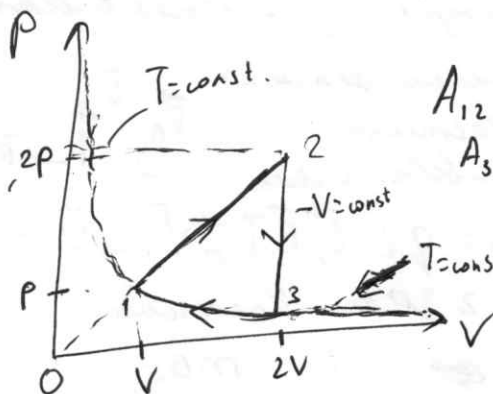
Задача 7.

Уравнение состояния газа $pV = \nu RT$, из которого на процессе 1-2: $pV = \nu RT$, положив $T = KV^2$, где $K = \text{const}$

$$\frac{p}{V} = \nu R K = \text{const} \Rightarrow \text{в координатах } (p, V)$$

данной график представляем собой линию, проходящую через начало координат.

Перепишем в координатах (p, V) :



$$A_{12} = 2,16 A_{31}$$

$$A_{31} = \frac{A_{12}}{2,16}$$

$$\frac{p}{V} = \frac{p_2}{2V} = \text{из графика } \Delta$$

$$p_2 = 2p$$

$$\eta = \frac{A_{\text{цикл}}}{Q_{\text{нагр.}}} - \text{по определению.}$$

$$A_{\text{цикл}} = A_{12} - |A_{31}| = A_{12} \left(1 - \frac{1}{2,16}\right)$$

$$A_{31} = \nu RT \ln \frac{V}{2V} = -\nu RT \ln 2 \quad \text{P.S. - не по условию}$$

$$A_{\text{цикл}} = A_{12} \cdot \frac{1,16}{2,16}; \quad Q_{\text{нагр.}} = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12};$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} (4pV - pV) = \frac{9}{2} pV = 3 A_{12}$$

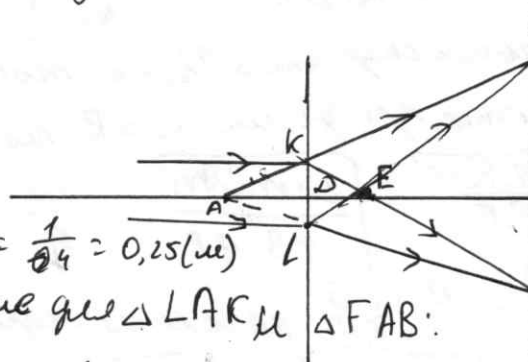
$$\Delta U_{12} = 3 A_{12} \Rightarrow Q_{\text{нагр.}} = 3 A_{12} + A_{12} = 4 A_{12} - \text{на всех остальных процессах } \delta Q < 0$$

$$\eta = \frac{A_{12} \cdot \frac{1,16}{2,16}}{4 A_{12}} = \frac{1,16}{4 \cdot 2,16} \approx 0,134 \text{ или } 13,4\%$$

Ответ: 13,4%.

Задача 8.

$$\begin{aligned} D_p &= -4 D_{\text{ср}} & BF &= d_2 \\ d_1 &= 5 \text{ см} & KL &= d_1 \\ d_2 &= 20 \text{ см} & & \\ D_c &= ? & & \end{aligned}$$



KB и LF - хорды в рассевательной линзе
KF и LB - хорды в собирающей линзе.
DE - фокус собирающей линзы
AD - фокус рассеивающей линзы.

$$AD = \left| \frac{1}{D_p} \right| = \frac{1}{0,4} = 0,25 \text{ (м)}$$

Занедем равнобе гл $\triangle LAK$ и $\triangle FAB$:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{KL}{BF} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow AC = 4 AD \Rightarrow DC = 3 AD = 0,75 \text{ м}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 73-11-08

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Продолжение задачи 8.

Заметим, что треугольники DEL и BEF :

$$\frac{DE}{EC} = \frac{KL}{BF} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{4}$$

$$DE = \frac{EC}{4} \Rightarrow EC = 4DE \Rightarrow DC = DE + EC = 5DE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE = \frac{DC}{5} = \frac{0,75}{5} = 0,15 (\mu)$$

$$D_c = \frac{1}{DE} = \frac{1}{0,15} = \frac{20}{3} = 6,67 (\text{Дптр})$$

Ответ: $D_c = 6,67 \text{ Дптр}$.

Задача 4.

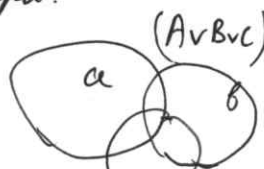
$$a = 6$$

$$b = 7$$

$$c = 11$$

$$n = ?$$

Данную задачу можно интерпретировать с помощью
кругов Эйлера:



$$(A \cup B \cup C) = n = a + b + c - (a \cap b) - (a \cap c) - (b \cap c) + (a \cap b \cap c)$$

$a \cap b$ - это НОД чисел 6 и 7 (НОД - наибольший общий делитель)

$$(a \cap b) = 1$$

$$(b \cap c) = \text{НОД}(7; 11) = 1$$

$$(a \cap c) = \text{НОД}(6; 11) = 1$$

$$(a \cap b \cap c) = \text{НОД}(6; 7; 11) = 1$$

Тогда получаем n :

$$n = 6 + 7 + 11 - 1 - 1 - 1 + 1 = 24 - 2 = 22 (\text{кубика})$$

Ответ: 22 кубика.

Задача 2.

Так как раскрасить любой кубик можно 3 различными
цветами, то B - число всех возможных раскрасок, равно

$$B = 3^{\text{кол-во клеток}} = 3^{8 \cdot 12} = 3^{96}$$

Для нахождения вероятности потребуется разделить все ^(A) благоприятные исходы на всевозможные, т.е.

$$P = \frac{A}{B}, \text{ где } A - \text{благоприятные исходы}$$

$B - \text{все возможные варианты.}$

Возьмем A:

1) Изобразим с одним рядом, состоящим из 8 клеток:

Первую клетку можно раскрасить 3 способами, так как следующая должна отличаться от первой, то каждую следующую можно раскрасить 2 способами, т.е. для строки всего вариантов:

$$A_1 = 3 \cdot 2^{8-1} = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384 \text{ (варианта)}$$

2) Далее раскраска следующего ряда будет зависеть от раскраски предыдущего, т.е. если у одной клетки ^(в прошлой строке) какой-то цвет, то у следующей должен быть другой, а т.к. использовались 2 ^(в прошлой строке) различных цвета, то каждый ряд ~~уже~~ уменьшает количество ~~возможных~~ благоприятных вариантов, т.е.

$$A = A_1 \cdot 2^{12-1} = 384 \cdot 2^{11} = 3 \cdot 2^7 \cdot 2^{11} = 3 \cdot 2^{18} - \text{всего благоприятных исходов}$$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{3 \cdot 2^{18}}{3^{96}} = \frac{2^{18}}{3^{95}}$$

Ответ: $\frac{2^{18}}{3^{95}}$