Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр Ю-Ю-11-118

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Баллы | 4 | 7 | 13 | — | 15 | 10 | 10 | 15 | 74 |

Вариант 2

№5
1) график выглядит так из-за наличия силы сопротивления на тело
2) в $t = 2$ с $a = 10$ м/с$^2$ => $a = g$ => $v = 0$ м/с => самая высокая точка полета тела
3) для того чтобы найти установившуюся скорость тела ($v_y$), найдем площадь под графиком

=> $v_y = 25$ м/с +

Ответ: $v_y = 25$ м/с

№6
по закону сохранения импульсов:
$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2$
$m_1 v_1 = m_2 v_2$
по закону сохранения энергии:
$E_к = E_п$

$$\frac{kq_1q_2}{L} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_2 v_2 \\ \frac{kq_1q_2}{L} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \end{cases}$$

1) $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$

$$\frac{kq_1q_2}{L} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2\left(\frac{m_1 v_1}{m_2}\right)^2}{2} \quad \Big| \cdot 2L$$

$$2kq_1q_2 = Lm_1 v_1^2 + L\cancel{m_2}\cdot\frac{m_1^2 v_1^2}{m_2^{\cancel{2}}} \quad \Big| \cdot m_2$$

$$2kq_1q_2 m_2 = Lm_1 v_1^2 m_2 + L m_1^2 v_1^2$$

$$2kq_1q_2 m_2 = v_1^2 (Lm_1m_2 + m_1^2 L)$$

$$v_1^2 = \frac{2kq_1q_2 m_2}{Lm_1m_2 + m_1^2 L}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2 m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$$

2) $v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1}$

$$\frac{kq_1q_2}{L} = \frac{m_1\cdot\left(\frac{m_2 v_2}{m_1}\right)^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$2kq_1q_2 = \cancel{m_1} L \cdot \frac{m_2^2 v_2^2}{m_1^{\cancel{2}}} + m_2 L v_2^2$$

$$2kq_1q_2 m_1 = L m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 L v_2^2$$

$$2kq_1q_2 m_1 = v_2^2 (Lm_2^2 + Lm_1m_2)$$

$$v_2^2 = \frac{2kq_1q_2 m_1}{Lm_2^2 + Lm_1m_2}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2 m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$$

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2 m_2}{Lm_1(m_1+m_2)}}$ + ; $v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2 m_1}{Lm_2(m_1+m_2)}}$ +

№7

| Дано: | СИ |
|---|---|
| $T = 100°C$ | 373 |
| $h_0 = 60$ см | 0.6 м |
| $h = 15$ см | 0.15 м |
| $S = 500$ см$^2$ | 0,05 м$^2$ |
| $P_0 = 10\cdot10^4$ Па | |
| $m$ - ? | |

Решение
1) после установление равновесия, $p$ = атмосферному } => пар - насыщенный.
2) т.к $T = 100°C$
3) т.к после установление равновесия давление пара выросло в 2 раза } =>
$p_0 = 10\cdot10^4$ Па

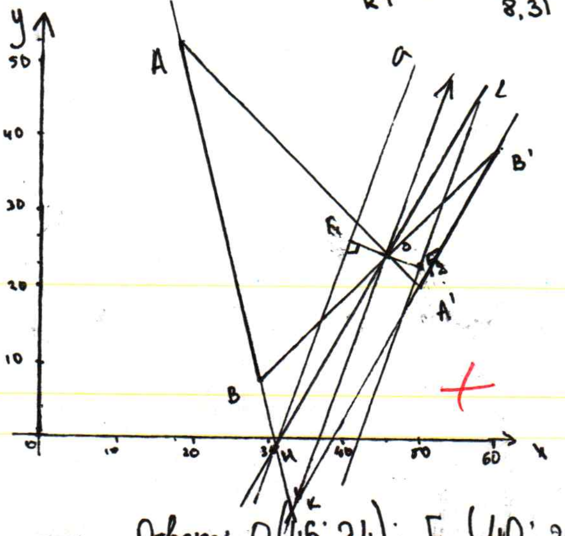
=> изначально $p = 5\cdot10^4$ Па.

4) по уравнению Менделеева-Клайперона:
$pV = \frac{m}{M}RT$, $V = Sh_0$

$$m = \frac{pVM}{RT} = \frac{5\cdot10^4\cdot0{,}05\cdot0{,}6\cdot0{,}018}{8{,}31\cdot373} = 8{,}7 \text{ г.} \quad +$$

Ответ: 8,7г.

№8




1) соединим $AA'$; $BB'$; $AA' \cap BB' = \{O\}$; O - оптический центр
2) продлим $AB$, $A'B'$; $AB \cap A'B' = \{K\}$; K - 2 точка линзы
3) соединим OK; OK - собирающая линза
4) через т.O проведем прямую $L \parallel A'B'$; $L \cap AB = \{H\}$
H - точка на фокальной плоскости
5) через т. H проведем прямую $a \parallel OK$
a - фокальная плоскость
6) опустим $F_1O \perp a$; $F_1$ - фокус
7) по другую сторону от линзы отложим на расстояние $OF_1$ прямую $b \parallel a$.
$F_2$ - фокус.

Ответ: $O(46; 24)$; $F_1(40; 26)$; $F_2(48; 22)$

№3 Дано: $x, y, z$

$4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 25$

Док-ть: $2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \le 45$

Док-во:

Рассмотрим $\vec{a} = \{2^x; \sin^2 y; \ln^3 z\}$

$\vec{b} = \{1; -4; 8\}$, тогда

$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{4^x + \sin^4 y + \ln^6 z} = 5$ (т.к $4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 25$)

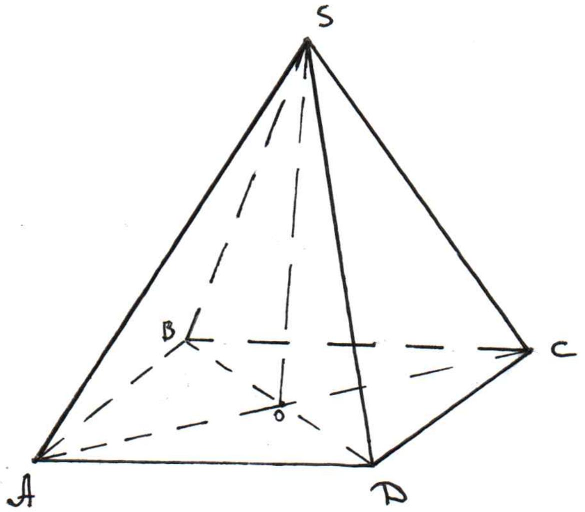
$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9$

$\left.\begin{matrix} \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \\ |\cos\alpha| \le 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = 45 \Rightarrow 2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \le 45$, что и требовалось доказать.

№1




Дано: SABCD - пирамида

ABCD - параллелограмм

$M \in SA$, $SM : MA = 1:2$

$N \in SB$, $SN : NB = 1:3$

$P \in SC$, $SP : PC = 1:4$

Найти:

Решение:

п1

ABCD - параллелограмм (по усл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} AB = CD \\ BC = AD \end{matrix}$

п2

Пусть $BSD \cap ASC$ по прямой $SO$

№2

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{25} x \cdot \log_3 y}{\log_{27}(xy)} = 1 & (1) \\ \dfrac{\log_5 y \cdot \log_{49} z}{\log_7 yz} = \dfrac{3}{5} & (2) \\ \dfrac{\log_{125} z \cdot \log_3 x}{\log_{81} zx} = 1 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \\ xy \ne 1 \\ yz \ne 1 \\ zx \ne 1 \end{cases}$

(1) $\dfrac{3\log_{25} x \cdot \log_3 y}{\log_3 xy} = 1$

$\dfrac{3\log_5 x \cdot \log_3 y}{2\log_3 xy} = 1$

$\boxed{3\log_5 x \cdot \log_3 y = 2\log_3 xy}$

(2) $\dfrac{\log_5 y \cdot \log_7 z}{2\log_7 yz} = \dfrac{3}{5}$

$\boxed{5\log_5 y \cdot \log_7 z = 6\log_7 yz}$

(3) $\dfrac{4\log_{125} z \cdot \log_3 x}{\log_3 zx} = 1$

$\dfrac{4\log_5 z \cdot \log_3 x}{3\log_3 zx} = 1$

$\boxed{4\log_5 z \cdot \log_3 x = 3\log_3 zx}$

$$\begin{cases} 3\log_5 x \cdot \log_3 y = 2\log_3 xy \\ 5\log_5 y \cdot \log_7 z = 6\log_7 yz \\ 4\log_5 z \cdot \log_3 x = 3\log_3 zx \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \log_5 x = a \\ \log_5 y = b \\ \log_5 z = c \end{cases}$

Пусть $3 = 5^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 y = \log_{5^n} y = \frac{1}{n}\log_5 y$

, тогда

$$\begin{cases} 3a \cdot \frac{1}{n} b = \frac{1}{n} 2(a+b) \\ 5b \cdot \frac{1}{n} c = \frac{1}{n} 6(b+c) \\ 4c \cdot \frac{1}{n} a = \frac{1}{n} 3(a+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a \cdot b = 2(a+b) \\ 5b \cdot c = 6(b+c) \\ 4c \cdot a = 3(a+c) \end{cases}$$