



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 23-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

51.

$$9\sqrt{2 - \log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2 - \log_2 x} - 7|$$

Решение:

Проведем замену:

$$t_1 = \sqrt{2 - \log_2 x} \quad ; \quad t_2 = \log_2 x$$

Внесем обозначения в неравенство

$$9t_1 - 2|4t_2 - 7| \leq 9t_2 - 2|4t_1 - 7|$$

$$9t_1 + 2|4t_1 - 7| \leq 9t_2 + 2|4t_2 - 7|$$

Введем функцию, чтобы раскрыть модуль:

$$f(t) = 9t + 2|4t - 7|$$

$$4t - 7 = 0$$

$$t = \frac{7}{4}$$

$$f(t) = \begin{cases} 9t - 2(4t - 7), & t < \frac{7}{4} \\ 9t + 2(4t - 7), & t \geq \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} t + 14, & t < \frac{7}{4} \\ 17t - 14, & t \geq \frac{7}{4} \end{cases}$$

из этого следует, что линейная функция возрастает $\Rightarrow$
 $f(t_1) \leq f(t_2)$
 $t_1 \leq t_2$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-04

$$\sqrt{2 - \log_2 x} \leq \log_2 x, \quad y = \log_2 x$$

$$\sqrt{2-y} \leq y$$

$$\begin{cases} 2-y \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2-y \leq y^2 \end{cases}$$

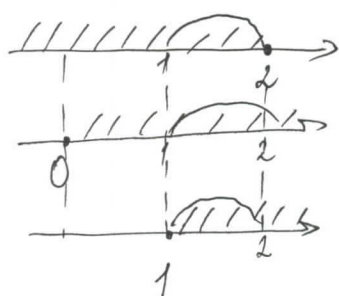
$$\begin{cases} -y \geq -2 \\ y \geq 0 \\ y^2 + y - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 2 \\ y \geq 0 \\ y^2 - y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$y_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad \begin{matrix} \text{не уде} \\ \text{внетво} \\ \text{яет} \\ \text{условие} \end{matrix}$$

$$y_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$



$$y \in [1; 2]$$

$$1 \leq y \leq 2$$

$$1 \leq \log_2 x \leq 2$$

$$\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 4$$

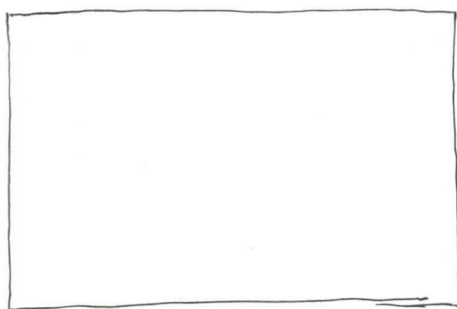
$$2 \leq x \leq 4$$

$$x \in [2; 4]$$

$$\text{Ответ: } x \in [2; 4].$$

52

12 кл



8 кл

Белые - Б
Серые - С
Черные - Ч

Всё поле = $12 \cdot 8 = 96$ клеток.

Возможные благоприятные исходы:

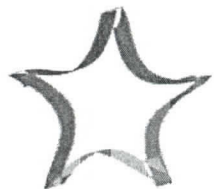
1) БСЧ
СЧС
ЧСБ

2) БСЧ
СБС
ЧСБ

3) ЧСЧ
СЧС
ЧСЧ

4) БСБ
СБС
БСБ

=> Серый цвет расположен через одну клетку. При благоприятном исходе серые клетки занимают $\frac{1}{2}$ всего прямоугольника, т.е. 48 клеток.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-04

Остальные клетки пяти монет закрасить в хаотичном порядке $\Rightarrow 2 \cdot 2^{48}$ способами.

Всего исходов возможно: $3^{12 \cdot 8} = 3^{96}$

$$\Rightarrow \text{Вероятность } P = \frac{2^{48} \cdot 2}{3^{96}} = \left(\frac{2}{9}\right)^{48} \cdot 2.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{9}\right)^{48} \cdot 2$

53 $f(x) = ax^2 + (a+1)x + b \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$

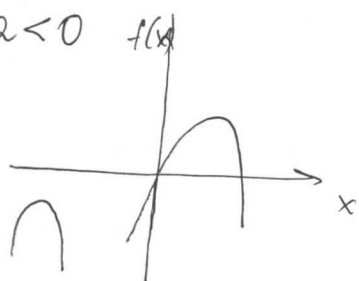
Найти: наименьшее значение $2a+b+1$.

Решение:

1 случай: $a=0$ $f(x) = x+b$ — линейная функция =
при $x < -b$ функция принимает отрицательное значение, т.е. не удовлетворяет условию, не подходит.

2 случай: $a \neq 0$

1) $a < 0$

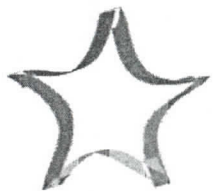


при $a < 0$ функция принимает отриц. значение при $x = \pm \infty$
случай не подходит.

2) $a > 0$



$\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$ — достаточное условие



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-04

$$\Delta = (a+1)^2 - 4ab = a^2 - 2a + 1 - 4ab = a^2 + 2a(1-2b) + 1 \leq 0$$

Рассмотрим неравенство

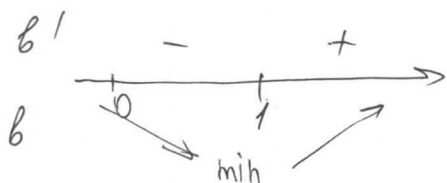
$$(a+1)^2 - 4ab \leq 0 \quad \text{при } a > 0$$

$$b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$$

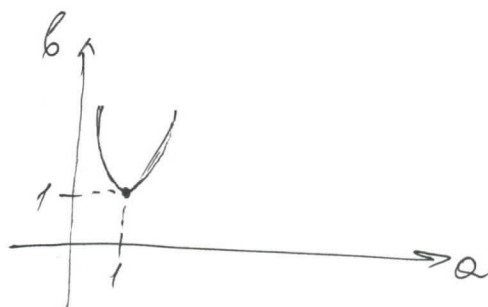
Построим график функции $b = b(a)$ при $a > 0$

$$b = \frac{a^2 + 2a + 1}{4a} \quad ; \quad b = \frac{a}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a}$$

$$b' = \frac{1}{4} - \frac{1}{4a^2} = \frac{a^2 - 1}{4a^2} \quad ; \quad b' = 0$$
$$a = \pm 1$$



$$\text{при } a = 1 \quad b = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$



3) Рассмотрим функцию $F = 2a + b + 1$, она принимает наименьшее значение на границе области.

$$\begin{cases} F = 2a + b + 1 \\ b = \frac{a}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a} \end{cases}$$

$$F = 2a + \frac{a}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a} + 1 = \frac{9a}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a}$$

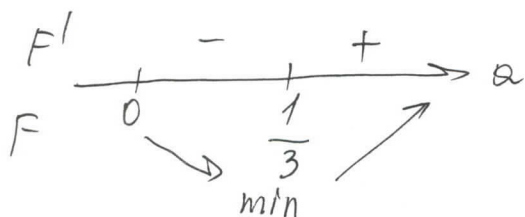


Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

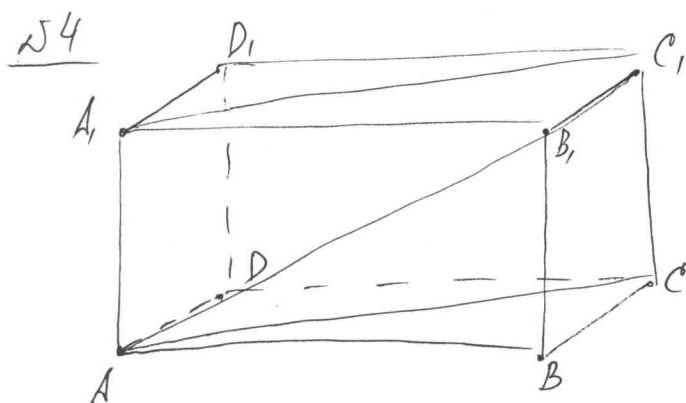
Шифр 23-11-04

Найдем наименьшее значение при $a > 0$

$$F' = \frac{9}{4} - \frac{1}{4a^2} = \frac{9a^2 - 1}{4a^2} = \frac{(3a-1)(3a+1)}{4a^2}$$



при $a = \frac{1}{3}$ $F = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3^6}{2} + \frac{3^3}{4} = \frac{9+18+9}{12} = \frac{36}{12} = 3$ Ответ: 3.



$$AB = 11$$

$$BC = 7$$

$$CC_1 = 6$$

$$AC = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$$

$$AC_1 = \sqrt{(\sqrt{170})^2 + 6^2} = \sqrt{170 + 36} = \sqrt{206}$$

$V_{\text{т}} = \text{кол-во единичных кубиков} = 6 \cdot 7 \cdot 11 = 462$

$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 7t \\ z = 11t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

1) если $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{6}$

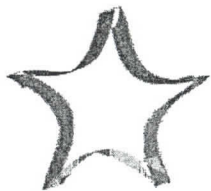
$$0 \leq 7t \leq \frac{7}{6}$$

$$0 \leq 11t \leq \frac{11}{6}$$

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{и} \quad 1 \leq y \leq \frac{7}{6}$$

$$0 \leq z \leq \frac{11}{7} \quad \text{и} \quad \frac{11}{7} \leq z \leq \frac{11}{6}$$

2 кубика + 1 кубик



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-04

2) если $1 \leq x \leq 2$

$$\frac{1}{6} \leq t \leq \frac{2}{6}$$

$$\frac{7}{6} \leq 7t \leq \frac{14}{6}$$

$$\frac{7}{6} \leq y \leq 2 \quad \text{и} \quad 2 \leq y \leq \frac{14}{6}$$

$$\frac{11}{6} \leq z \leq \frac{22}{7} \quad \text{и} \quad \frac{22}{7} \leq y \leq \frac{21}{6}$$

2 кубика + 1 кубик

3) если $2 \leq x \leq 3$

$$\frac{2}{6} \leq t \leq \frac{3}{6}$$

$$\frac{14}{6} \leq 7t \leq \frac{21}{6}$$

$$\frac{14}{6} \leq y \leq 3 \quad \text{и} \quad 3 \leq y \leq \frac{21}{6}$$

$$\frac{22}{6} \leq z \leq \frac{33}{7} \quad \text{и} \quad \frac{33}{7} \leq z \leq \frac{33}{6}$$

2 кубика + 2 кубика

~~4) если $4 \leq x \leq 5$~~

~~$$\frac{4}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}$$~~

~~$$\frac{18}{6} \leq 7t \leq 3$$~~

если $3 \leq x \leq 4$

$$\frac{3}{6} \leq t \leq \frac{4}{6}$$

$$\frac{21}{6} \leq 7t \leq \frac{28}{6}$$

$$\frac{11}{6} \leq y \leq 4 \quad \text{и} \quad 4 \leq y \leq \frac{28}{6}$$

$$\frac{33}{6} \leq z \leq \frac{44}{7} \quad \text{и} \quad \frac{44}{7} \leq z \leq \frac{44}{6}$$

2 кубика + 2 кубика

5) если $4 \leq x \leq 5$

$$\frac{4}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}$$

$$\frac{18}{6} \leq 7t \leq \frac{35}{6}$$

$$\frac{18}{6} \leq y \leq 5 \quad \text{и} \quad 5 \leq y \leq \frac{35}{6}$$

$$\frac{44}{6} \leq z \leq \frac{55}{7} \quad \text{и} \quad \frac{55}{7} \leq y \leq \frac{55}{6}$$

1 кубик + 3 кубика

Всего: 20 единичных

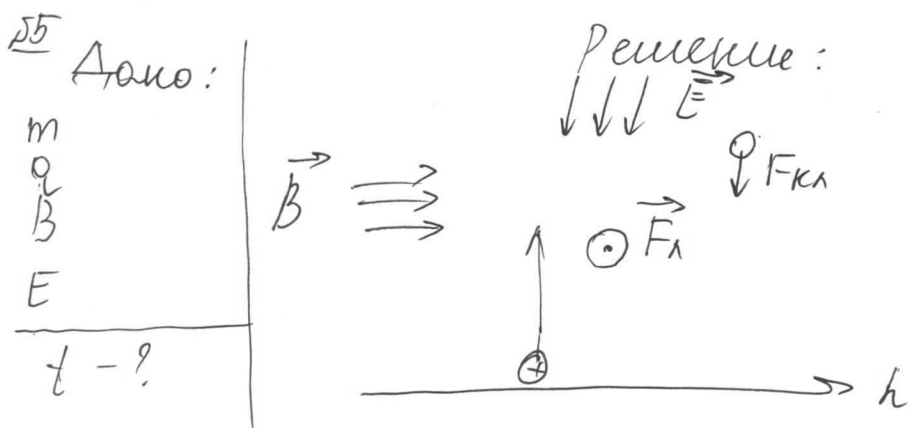
Ответ: 20.

кубиков, проткнуто иглой.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

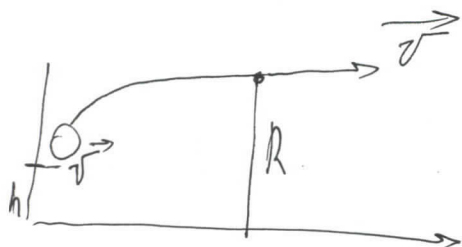
Шифр 23-11-04



Под действием силы Лоренца движущаяся частица, находясь в магнитном поле.

$F_L = Bvq \sin \alpha$ (т.к. $F \perp v$, $\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ частица движется по окружности)

$$Bvq = \frac{mv^2}{R}$$



Частица достигает максимальной высоты, поднявшись на расстояние, равное радиусу.

$$R = \frac{mv^2}{Bvq}$$

Под действием эл. поля частица движется равноускоренно вниз $F = E \cdot q = ma$

$$a = \frac{Eq}{m}$$

$$R = \frac{at^2}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{Bvq} = \frac{Eq}{2mt^2}$$

Время движения в эл. поле.

$$t_1 = \sqrt{\frac{mv^2}{Bvq} \cdot \frac{2m}{Eq}} = \sqrt{\frac{2m^2v^2}{EqBv}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{Bq}}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-04

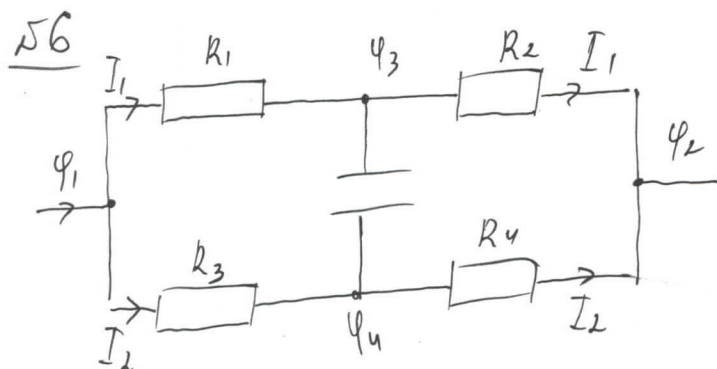
Время движения в магнитном поле:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$t_1 \approx \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{2Bq}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2V}{BE}} + \frac{m\pi}{2qB}$$

Ответ: $\frac{m}{q} \sqrt{\frac{2V}{EB}} + \frac{m\pi}{2Bq}$



Дано:
 $R_1 = 10 \text{ Ом}$
 $R_2 = 20 \text{ Ом}$
 $R_3 = 30 \text{ Ом}$
 $R_4 = 40 \text{ Ом}$
 $C = 2 \cdot 10^{-4} \text{ ф}$
 $U = 210 \text{ В}$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1 + R_2} = \frac{210}{10 + 20} = 7 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{U_1}{R_3 + R_4} = \frac{210}{40 + 30} = 3 \text{ А}$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 7 \cdot 10 = 70 \text{ В}$$

$$U_3 = I_2 R_3 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ В}$$

$$U_1 = U_3 - U_4 \quad U_4 = U_1 - U_3$$

$$U_3 = U_1 - U_4 \quad U_4 = U_1 - U_3$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-04

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \varphi_1 - U_1 - \varphi_1 + U_3 = U_3 - U_1$$

$$\varphi_4 - \varphi_3 = U_1 - U_3 = 70 - 90 = -20 \text{ В}$$

~~$\varphi = c \cdot \varphi$~~

$$q = c (\varphi_4 - \varphi_3) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 20 = 40 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$$

Ответ: $40 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$

27.

Дано:

$$T = kV^2$$

$$V_3 = 2V_1$$

$$A_{12} = 2,16 A_{31}$$

$\eta = ?$

Решение:

$$pV = \sqrt{R} T$$

$$pV = \sqrt{R} k V^2$$

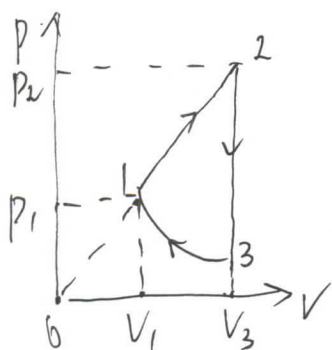
$$p = \sqrt{R} k V$$

$$\alpha = \sqrt{R} k$$

$$P = \alpha V$$

Перестроим

график в координатах $P(V)$



$$A_{12} = \frac{P_2 + P_1}{2} (V_3 - V_1)$$

$$A_{12} = \frac{(3P_1 + P_1)}{2} V_1$$

$$A_{12} = \frac{3P_1 V_1}{2}$$

$$A_{23} = 0$$

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2}$$

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{2V_1}$$

$$P_2 = 2P_1$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-04

$$A_{\text{га цикл}} = A_{12} - |A_{31}| = A_{12} - \frac{A_{12}}{2,16} =$$
$$= A_{12} \left(1 - \frac{1}{2,16}\right) = A_{12} \cdot 0,537$$

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} > 0$$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} < 0$$

$$Q_{31} = A_{31} < 0$$

$$A_{\text{цикла}} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A_{12} + \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + A_{31}$$

$$\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$$

$$Q_h = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{i}{2} (2p_1 2V_1 - p_1 V_1) = \frac{i}{2} 3p_1 V_1 =$$
$$= \frac{3i}{2} p_1 V_1 = i A_{12}$$

$$\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_h} = \frac{A_{12} \cdot 0,573}{|A_{12}|} = \frac{0,573}{i}$$

кпд одноатомного газа

$$\eta = \frac{0,573}{3} = 0,19$$

кпд двухатомного газа

$$\eta = \frac{0,573}{5} = 0,11$$

Ответ: 0,19 ; 0,11.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

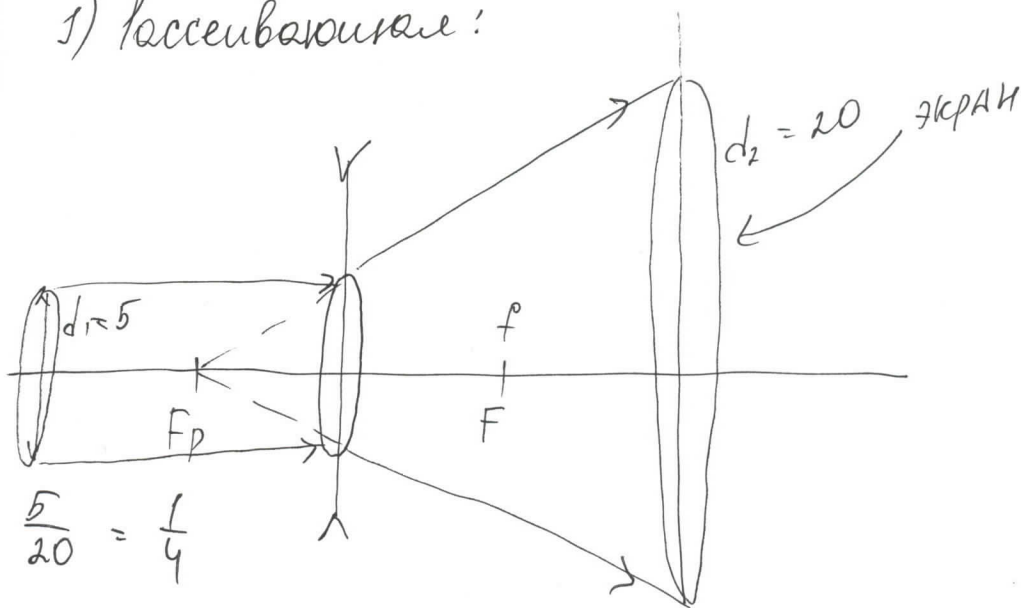
Шифр 23-11-04

58 Дано:
 $D_p = -4 \text{ Дптр}$
 $d_1 = 5 \text{ см}$
 $d_2 = 20 \text{ см}$
 $D_c = ?$

Решение:

$$F_p = \frac{1}{D_p} = \frac{1}{-4} = -0,25 \text{ м}$$

1) Рассеивающая:



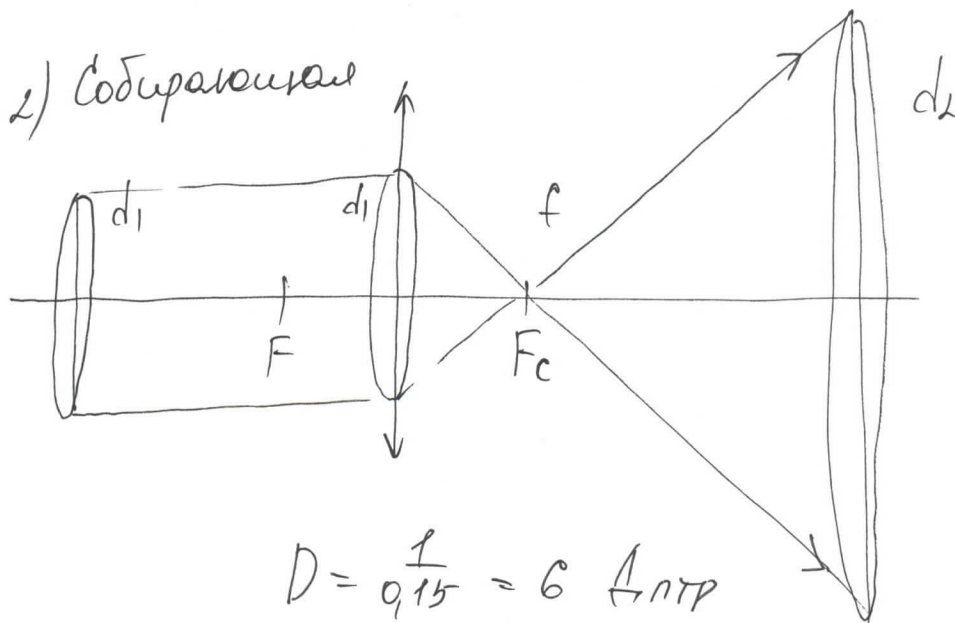
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_p}{F_p + f} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{25}{25 + f} = \frac{1}{4}$$

$$25 + f = 100$$

$$f = 75$$

2) Собирающая



$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_c}{f - F_c} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{F_c}{75 - F_c} = \frac{1}{4}$$

$$4F_c = 75 - F_c$$

$$5F_c = 75 \quad F_c = 15 \text{ см}$$

$$D = \frac{1}{0,15} = 6 \text{ Дптр}$$

Ответ: 6 Дптр.