11-18-504

шифр 63-11-147

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	6	13	3	3	5	10	12	15	67

Вариант 2

1. $7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \le 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$

Ограничения в самом начале не ставлю, учту их в конце, ну или $x>0$

$7\sqrt{2-\log_3 x} + 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5| \le 7\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|$ (1)

Можно заметить, ~~что один~~ одинаковые части двух функций: которая находится слева и которая находится справа, только с разными значениями логарифмов => можем составить 2 функции.

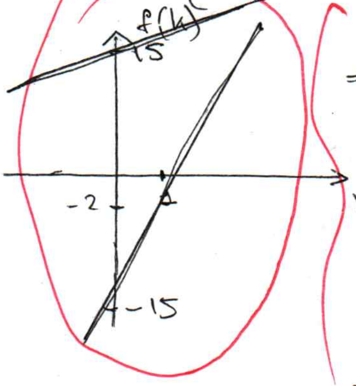
$y_1 = 7\sqrt{2-\log_3 x} + 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$
$y_2 = 7\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|$ } => это выполняется для обеих функций

в y_1: $\sqrt{2-\log_3 x} = k$
в y_2 $\log_3 x = k$ } => $f(k) = y_{1/2} = 7k + 3|2k-5|$ => $f(\sqrt{2-\log_3 x}) \le f(\log_3 x)$: (2)

=> чтобы решить нер-ство (1) нам нужно решить неравенство (2), а для этого нам нужно решить общую формулу $f(k)$ =>

=> $f(k) = 7k + 3|2k-5|$ $\qquad 2k-5 \ge 0 \Rightarrow 2k \ge 5 \Rightarrow k \ge \frac{5}{2} \Rightarrow k \ge 2{,}5$

$f(k) = \begin{cases} 7k + 6k - 15, \text{ при } k \ge 2{,}5 \\ 7k - 6k + 15, \text{ при } k < 2{,}5 \end{cases}$ (3) $\Rightarrow f(k) = \begin{cases} 13k - 15, \text{ при } k \ge 2{,}5 \\ k + 15, \text{ при } k < 2{,}5 \end{cases}$

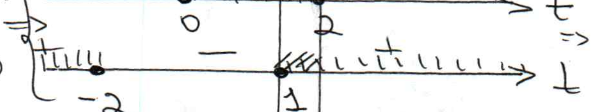


=> эти ф-ции обе монотонно возрастают, непрерывны, без (·) разрыва => это система ф-ций (3) эквивалентно решению неравенства (2) =>

=> $\sqrt{2-\log_3 x} \le \log_3 x$ ~~Ограничения~~: Замена: $\log_3 x = t$ => ограничений нет

=> $\sqrt{2-t} \le t \;|^2$

$\begin{cases} 2-t \ge 0 \\ t \ge 0 \\ 2-t \le t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \le 2 \\ t \ge 0 \\ t^2 + t - 2 \ge 0 \end{cases}$



=>

Т. Виета $(t-1)(t+2) \ge 0$ => => $t \in [1; 2]$ =>

=> $t \in [1; 2]$ => $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$; $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$

=> $\log_3 x \in [1; 2]$ =>

=> $x \in [3; 9]$

Ответ: $x \in [3; 9]$.

2.

1 способ закраски!

б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с
с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч
б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с
с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч
б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с
с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч

2 способ закраски

с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч
б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с
с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч
б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с
с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч
б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с	б/ч	с

Всего мест $= 6 \cdot 14 = 84$ шт

Будет закрашено по половине (половина мест 1 цветом, половиномест другим цветом).

Так например ставим в 1 клетку выбор, либо белое, либо чёрное => в соседние клетки можем взять только серый; белую с белой не можем использовать, чёрную с чёрной не можем использовать, белую с чёрной тоже не можем использовать ~~1 вари~~ Либо наоборот, ставим в 1 клетку выбор только серую, тогда в соседних клетках будет выбор либо чёрная, либо белая и соответственно опять по тому же циклу идём, что в первой закраске. =>

=> В 1 закраске: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdots$ и т.д пока не пройдём все клетки.

3 – всего красок

2 или 1 – сколько выбираем

И посчитал, что будет закрашено ровно половина белой или чёрной и ровно половина будет закрашена только серой =>

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{42} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{42}}{\left(\frac{3}{\cancel{3}}\right)^{84}} = \frac{2^{42}}{3^{84}}$$ – это для 1 закраски;

+

Для 2 закраски: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots$ и т.д пока не пройдём все клетки.

3 – всего красок

2 или 1 – сколько выбираем.

Я посчитал, что будет закрашено ровно половина белой или чёрной и ровно половина будет закрашена только серой =>

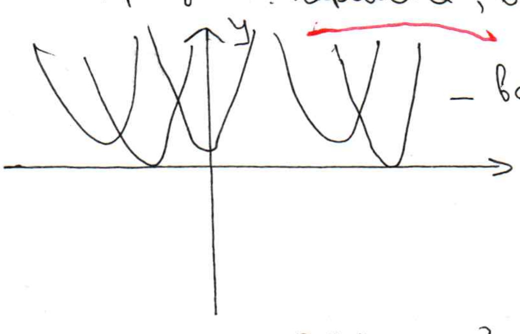
$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{42} \left(\frac{1}{3}\right)^{42}}{\left(\frac{3}{\cancel{3}}\right)^{84}} = \frac{2^{42}}{3^{84}}$$ – это для 2 закраски => Общая вероятность 2-х закрасок будет $\frac{2^{42}}{3^{84}} \cdot 2 = \frac{2^{43}}{3^{84}}$

Всего возможно 2 способа закраски!

Ответ: Общая вероятность 2-х закрасок будет $= \frac{2^{43}}{3^{84}}$.

3. $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$ – квадратичная функция

Графики: парабола, ветви вверх. ...ное значение выражения $4a + b = l$



– варианты расположения нашей параболы =>

=> $a > 0$ – ветви вверх. И нам нужно наименьшее значение выражения $4a + b = l - \min$ =>

=> $D \le 0$ – должен быть как можно меньше. =>

=> $4a + b = l \Rightarrow b = l - 4a \Rightarrow$

=> $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + l - 4a$

$D = b^2 - 4ac = (3a+1)^2 - 4 \cdot a \cdot (l - 4a) = 9a^2 + 6a + 1 - 4al + 16a^2 =$

$= 25a^2 + 6a + 1 - 4al = \underbrace{(5a+1)^2}_{25a^2+10a+1} - 4a - 4al \Rightarrow D \le 0$;

$a > 0$, т.к. ветви вверх; $l = 4a + b$ показывает на нужную величину; $b > 0$, т.к. эта парабола смещена вверх по Oy.

$(5a+1)^2 - 4a - 4al \le 0$

$(5a+1)^2 \le 4a + 4al \Rightarrow (5a+1)^2 - 4a \le 4al$

$(5a+1)^2 \le 4a \le 4al$

1:4

продолжение на след. стр.

11-18-504
63-11-147

3. $\ell \geq \dfrac{(5a+1)^2 - 4a}{4a}$

$\ell \geq \dfrac{(5a+1)^2}{4a} - \dfrac{\cancel{4a}}{\cancel{4a}} \Rightarrow \ell \geq \dfrac{(5a+1)^2}{4a} - 1$

Теперь исследуем ф-цию $f(a) = \dfrac{(5a+1)^2}{4a} - 1$

$f'(a) = \dfrac{2(5a+1)\cdot 4a - 4\cdot(5a+1)^2}{16a^2} \cancel{= 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(a) = \dfrac{40a^2 + 8a - 4(25a^2 + 10a + 1)}{16a^2} = \dfrac{40a^2 + 8a - 100a^2 - 40a - 4}{16a^2}$

$\Rightarrow f'(a) = \dfrac{-60a^2 - 32a - 4}{16a^2} \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow -60a^2 - 32a - 4 = 0 \mid \cdot(-1)$

$-60a^2 - 32a - 4 = 0 \mid : 4$

$-15a^2 - 8a - 1 = 0$

$D = 64 - 4\cdot(-15)\cdot(-1) = 64 - 60 = 4$

$\sqrt{D} = 2$

$a_1 = \dfrac{10}{-30} = -\dfrac{1}{3} = \dfrac{8+2}{-30}$

$a_2 = \dfrac{8-2}{-30} = \dfrac{6}{-30} = -\dfrac{1}{5} = -0{,}2 \Rightarrow$

$-\dfrac{1}{4}$: $\dfrac{-60\cdot\frac{1}{16} - 32\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - 4}{16\cdot\frac{1}{16}} = -\dfrac{60}{16} + \dfrac{32\cdot 16}{4\cdot 8} - 4 = 4 - \dfrac{60}{16} = \dfrac{64-60}{16} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ $-$ $-\frac{1}{3}$ $+$ $-\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$

$1 - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{2}{3}$ (-) min $\Rightarrow a = -\dfrac{1}{3}$ - (-) min

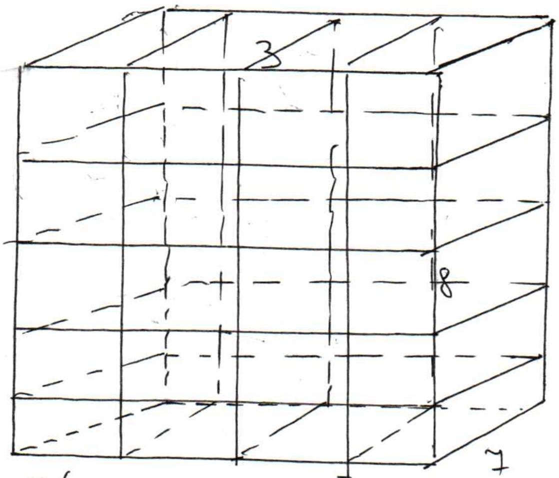
$\Rightarrow a = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell \geq \dfrac{\left(5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} =$

$= \dfrac{\left(-\frac{5}{3}+1\right)^2 + \frac{4}{3}}{-\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}}{-\frac{4}{3}} = \dfrac{16}{9}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow b \geq -\dfrac{4}{3} \Rightarrow \ell_{min} = -\dfrac{4}{3}$.

Ответ: $4a + b = \ell_{min} = -\dfrac{4}{3}$.

4.



Размеры 7·8·13 НОД – наибольший общий делитель.

Для вычисления количества проткнутых единичных кубиков есть в математике формула:
сумма размеров фигуры $(a+b+c)$ – НОД$(a;b)$ – НОД$(a;c)$ – НОД$(c;b)$ + НОД$(a;b;c)$ =
$= 7+8+13 - 1 - 1 - \cancel{1} + \cancel{1} = 5+8+13 = 26$

НОД$(7;8)$ = у 7 делители 1 и 7 у 8 1 2 4 8 $\Rightarrow$ НОД$(7;8)$ = 1;

НОД$(8;13)$ у 8 делители 1; 2; 4; 8 у 13 делители 1; 13 $\Rightarrow$ НОД$(8;13)$ = 1

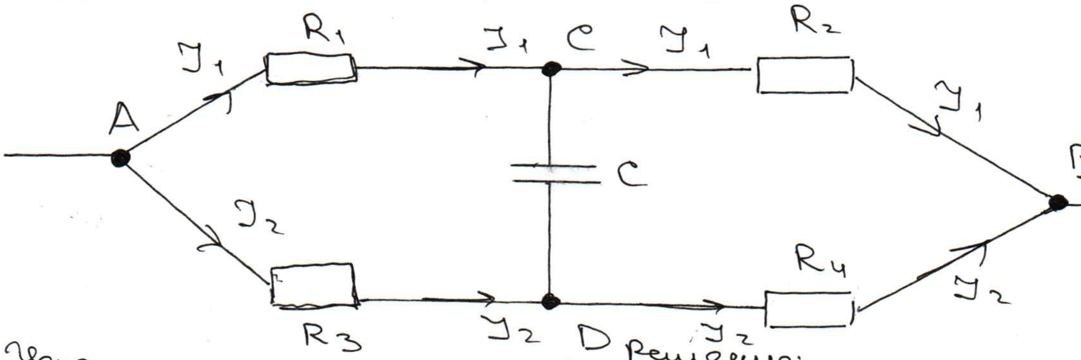
НОД$(7;13)$ у 7 делители 1 и 7; у 13 делители 1 и 13 $\Rightarrow$ НОД$(7;13)$ = 1.

НОД$(7;8;13)$ делитель 7 = 1 и 7; делитель 8 = 1 2 4 8; делитель 13 = 1 и 13
$\Rightarrow$ НОД$(7;8;13) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ количество кубиков = 26

7

Но, чтобы убедиться в правильности формулы проверим её на кубике 1:1:1 ⇒ $\cancel{1}+\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{1}+1=1$ ⇒ Верно;
Можем проверить 2:1:1 ⇒ $2+\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{1}=2$ – Верно,
но эта формула работает только для фигур, которые в 3-х мерном измерении, для 2-х мерных будет формула $a+b-\text{НОД}(a;b)$.
Ответ: количество кубиков = 26.

6.



Дано:
$R_1 = 20$ Ом
$R_2 = 10$ Ом
$R_3 = 40$ Ом
$R_4 = 30$ Ом
$U_0 = 420$ В
$C = 500$ мкФ $= 500\cdot10^{-6}$ Ф.
q – ?

Решение:
Через достаточно большой промежуток времени после подсоединения источника:

1) $\varphi_A - \varphi_B = U_{AB} = U_0$;

2) $\begin{cases} \varphi_A - \cancel{\varphi_C} = U_{R1} \\ \cancel{\varphi_C} - \varphi_B = U_{R2} \end{cases} + \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = \underset{I_1R_1}{U_{R1}} + \underset{I_1R_2}{U_{R2}}$

$\varphi_A - \varphi_B = I_1(R_1+R_2)$

$\varphi_A - \varphi_B = U_{AB} = U_0 \Rightarrow I_1 = \dfrac{U_0}{R_1+R_2}$

3) $\begin{cases} \varphi_A - \cancel{\varphi_D} = U_{R3} \\ \cancel{\varphi_D} - \varphi_B = U_{R4} \end{cases} + \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = U_{R3} + U_{R4}$

$U_{AB} = I_2(R_3+R_4) \Rightarrow I_2 = \dfrac{U_0}{R_3+R_4}$.

$\dfrac{42\cancel{0}}{3\cancel{0}}\cdot 20 = 280$

$\times\begin{array}{r}20\\14\\\hline 80\\20\\\hline 280\end{array}$

4) $\varphi_A - \varphi_C = U_{R1}$

$\begin{cases} \cancel{\varphi_A} - \varphi_C = I_1R_1 \\ \cancel{\varphi_A} - \varphi_D = I_2R_3 \end{cases} - \Rightarrow$

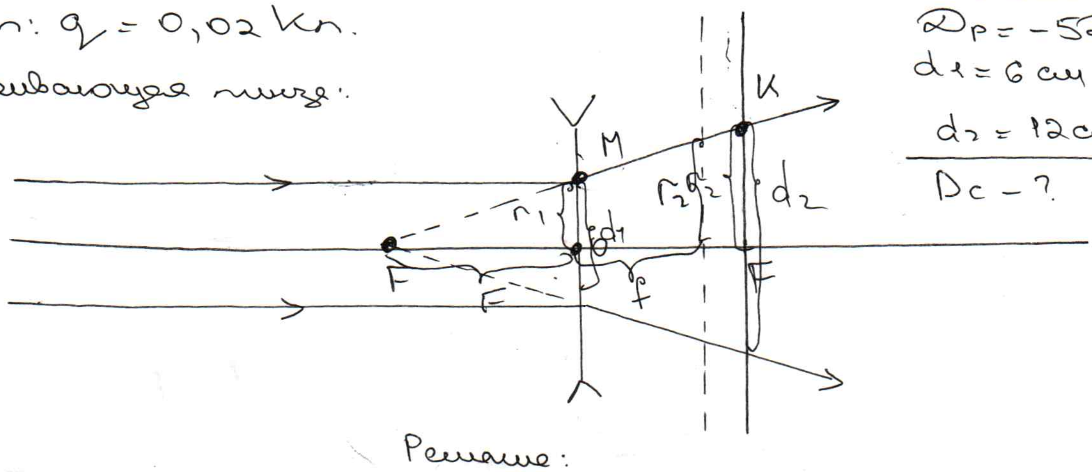
$\times\begin{array}{r}500\\40\\\hline 000\\2000\\\hline 20000\end{array}$

$\Rightarrow \varphi_D - \varphi_C = I_1R_1 - I_2R_3 \Rightarrow \varphi_D - \varphi_C = U_C = I_1R_1 - I_2R_3 =$
$= \dfrac{U_{AB}}{R_1+R_2}\cdot R_1 - \dfrac{U_{AB}}{R_3+R_4}\cdot R_3 = \dfrac{420}{20+10}\cdot 20 - \dfrac{420}{40+30}\cdot 40 = 280 - 240 = 40$ В;

5) $C = \dfrac{q}{U} \Rightarrow q = CU \Rightarrow q = 500\cdot10^{-6}\cdot 40 = 20000\cdot10^{-6} = 0{,}02$ Кл

Ответ: $q = 0{,}02$ Кл.

8. Рассеивающая линза:



Дано:
$D_p = -5$ Дптр
$d_1 = 6$ см
$d_2 = 12$ см.
D_c – ?

Решение:

продолжение на след. стр.

8. 1) $D = -\frac{1}{F} \Rightarrow -5 \cdot (-F) = 1 \Rightarrow F = \frac{1}{5} = 0{,}2$ м;

2) Из подобия $\triangle FMO$ и $\triangle FKF$:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{f + F}{F} \Rightarrow r_2 F = r_1 f + r_1 F \Rightarrow$$

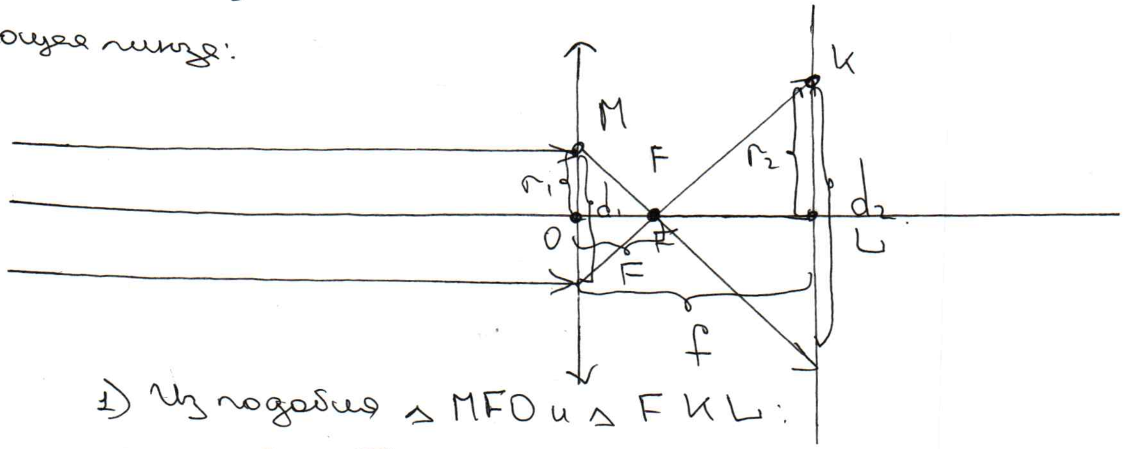
$$\Rightarrow f = \frac{r_2 F - r_1 F}{r_1} = \frac{F(r_2 - r_1)}{r_1} =$$

$$= \frac{0{,}2(0{,}06 - 0{,}03)}{0{,}03} = \frac{0{,}2 \cdot \cancel{0{,}03}}{\cancel{0{,}03}} = 0{,}2 \text{ м} \Rightarrow f = F \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ экран находится в фокусе;

2)

Собирающая линза:



$$\begin{array}{r} \times\ 0{,}03 \\ 0{,}2 \\ \hline 006 \\ 000 \\ \hline 0{,}006 \end{array}$$

1) Из подобия $\triangle MFO$ и $\triangle FKL$:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{f - F}{F} \Rightarrow r_2 F = r_1 f - r_1 F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 F + r_1 F = r_1 f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(r_2 + r_1) = r_1 f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{r_1 f}{r_2 + r_1} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}2}{0{,}03 + 0{,}06}$$

2) $D_c = \frac{1}{F} = \frac{1}{\frac{0{,}03 \cdot 0{,}2}{0{,}03 + 0{,}06}} =$

$$= 1 \cdot \frac{0{,}03 + 0{,}06}{0{,}03 \cdot 0{,}2} = \frac{0{,}09}{0{,}006} = \frac{90}{6} = 15 \text{ Дптр}$$

Ответ: $D_c = 15$ Дптр.

7. Дано:

$A_{12} = 3{,}64 A_{31}$

$V_1 = V$

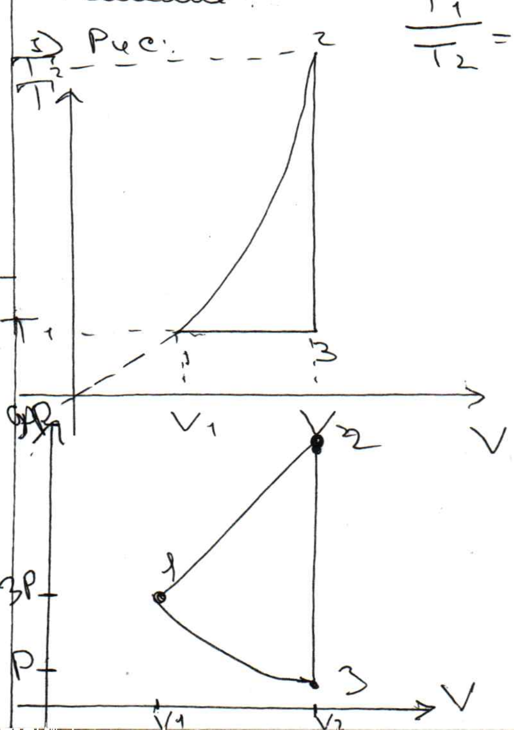
$V_2 = 3V$

$T = kV^2$

$\eta - ?$

Решение:

1) Рис.



$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k\cancel{V^2}}{9k\cancel{V^2}} = \frac{1}{9} \Rightarrow T_2 = 9T_1.$$

$P_1 V_1 = \nu R T_1$

$P_1 V = \nu R T_1$

$P_1 \cancel{V} = \nu R k V^{\cancel{2}} \Rightarrow P_1 = \nu R k V$

$P_3 V_2 = \nu R T_1 \Rightarrow P_3 \cdot 3\cancel{V} = \nu R k V^{\cancel{2}}$

$P_3 = \frac{\nu R k V}{3}$

$P_1 = \nu R k V$

$P_3 = \frac{\nu R k V}{3} \Rightarrow P_3 = \frac{P_1}{3} \Rightarrow P_3 = P_3$

$\Rightarrow P_1 = 3P_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_2 V_2 = \nu R T_2 \Rightarrow 3 \Rightarrow P_2 = 3P_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_2 \cdot 3\cancel{V} = \nu R 9 k V^{\cancel{2}} \Rightarrow P_2 = 9P$

$Q_н = Q_{12} + \cancel{Q_{23}}^{<0} + \cancel{Q_{31}}$.

P зависит от V на 1–2 линейно ⇒ ⇒ 1–2 – процесс

$Q_{31} = A_{31} + \cancel{\Delta U_{31}}^{0} = \frac{12PV}{3,64}$

$A_{1231} = A_{12} + \cancel{A_{23}}^{0\ V=const} + A_{31}$

$\Delta U_{31} = \frac{i}{2} P_1V_1 - P_3V_3 = \frac{i}{2}(3PV - 3PV) = 0.$

$A_{12} = \frac{3P + 9P}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}V = 12PV.$

i – коэффициент, зависящий от сколько атомов мы берем газ

$A_{31} = \frac{A_{12}}{3,64} = \frac{12PV}{3,64}$, но это по модулю, так, если брать просто $A_{31} = -\frac{12PV}{3,64}$

$Q_{23} = \cancel{A_{23}}^{0} + \Delta U_{23}$

$\Delta U_{23} = \frac{i}{2}(P_3V_3 - P_2V_2) = \frac{i}{2}(3PV - 27PV) < 0 \Rightarrow \cancel{Q_{23}} < 0 \Rightarrow A_{1231} = 12PV - \frac{12PV}{3,64}$

$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 12PV + \frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = 12PV + \frac{i}{2}(9P \cdot 3V - 3PV) = 12PV + \frac{i}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{24}^{12}PV = 12PV + 12PVi$

$\frac{1}{3,64} = \frac{1000}{364} \approx 0,27$

$\Rightarrow \eta = \frac{A}{Q_н} \Rightarrow \frac{\cancel{12PV} - \frac{\cancel{12PV}}{3,64}}{\cancel{12PV} + \cancel{12PV}i} =$

$\eta = \frac{1 - \frac{1}{3,64}}{1 + i} = \frac{1 - 0,27}{1 + 1} = \frac{0,73}{2} \approx 0,36 \approx 36\%$ для 1-атомного газе

i – может быть разное в зависимости от количества атомов в газе

для одноатомного газа: $i = 1$

для двухатомного газа $i = 3$

для многоатомного $i = 5$

$0,73 : 2 = 0,36$; $0,73 : 4 = 0,18$; $0,73 : 6 = 0,12$

для 2-х атомного газа:

$\eta = \frac{1 - 0,27}{1 + 3} = \frac{0,73}{4} \approx 0,18 \approx 18\%$

η для многоатомного газа:

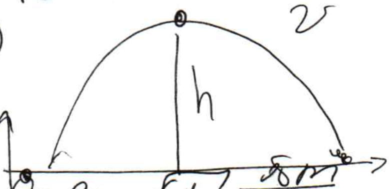
$\eta = \frac{1 - 0,27}{1 + 5} = \frac{0,73}{6} \approx 0,12 \approx 12\%$ для многоатомного газа.

Ответ: η для 1-атомного газа ≈ 36%, η для 2-х атомного газа ≈ 18%; η для многоатомного газа ≈ 12%.

5. Дано: F = 0, h, m, q > 0, E

Решение: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{Bqv} = \frac{2\pi m}{Bq} \Rightarrow T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi m}{Bq} = \frac{\pi m}{2Bq}$

1)



$F_A = Bqv\sin\alpha$

$F = ma_y = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow Bqv = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow mv = BqR \Rightarrow R = \frac{mv}{Bq}$;

$T = \frac{1}{4}T$ – за такое время она достигнет наивысшей точки

Ответ: $T = \frac{\pi m}{2Bq}$.