

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

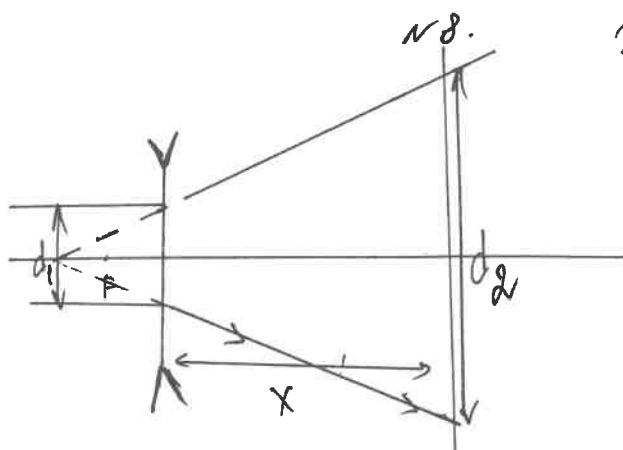
шифр 77/5-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1.

Дано:
рассеивающ.
линза
 $D_p = -4 \text{ Дптр}$
 $d_1 = 5 \text{ см}$
 $d_2 = 20 \text{ см}$
замена на
собирающ.
линзу
 d_2 не изм.

$D_c = ?$



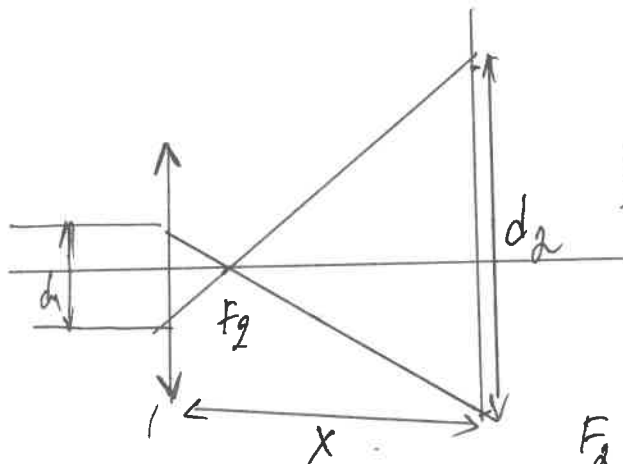
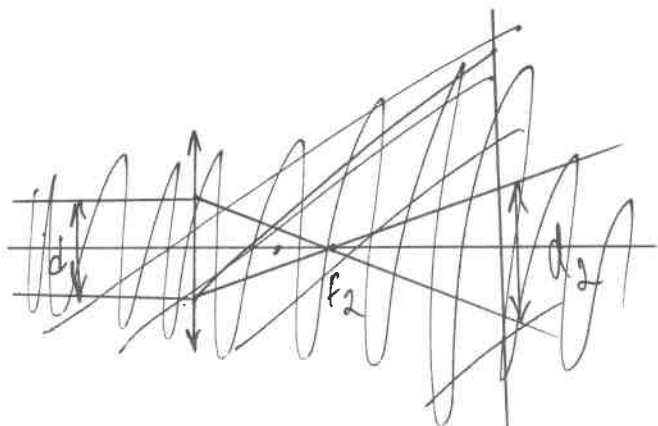
$$D_p = \frac{1}{F} \Rightarrow f = \frac{1}{-4} = -0,25 \text{ м} = -25 \text{ см.}$$

$$\frac{|F|}{d_1} = \frac{|F| + x}{d_2}$$

$$d_1 |F| + d_1 x = |F| d_2$$

$$d_1 x = \frac{|F| d_2}{d_1} - d_1 |F|$$

$$x = \frac{|F| (d_2 - d_1)}{d_1}$$



$$\frac{x - F_2}{d_2} = \frac{F_2}{d_1}$$

$$\frac{(x - F_2) |F|}{d_1 (|F| + x)} = \frac{F_2}{d_1}$$

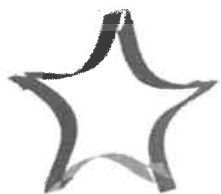
$$\frac{|F| (d_2 - d_1) - F_2 d_1}{d_1 \cdot d_2} = \frac{F_2}{d_1}$$

$$F_2 \cdot d_1 \cdot d_2 = |F| d_1 (d_2 - d_1) - F_2 d_1^2$$

$$F_2 d_1 (d_2 + d_1) = |F| d_1 (d_2 - d_1)$$

$$F_2 = \frac{|F| d_1 (d_2 - d_1)}{(d_2 + d_1) d_1} = \frac{|F| (d_2 - d_1)}{d_2 + d_1}$$

1 л. см 1.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 77/5-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№8 (продолжение)

$$D_c = \frac{1}{F_2} = \frac{d_2 + d_1}{1F(d_2 - d_1)}$$

$$D_c = \frac{20 + 5}{0,25(20 - 5)} = \frac{25}{0,25 \cdot 15} = \frac{100}{15} \approx 6,67 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: $D_c = 6,67 \text{ г/см}^3$

Дано: $C = 200 \text{ мкФ}$

$U_0 = 210 \text{ В}$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

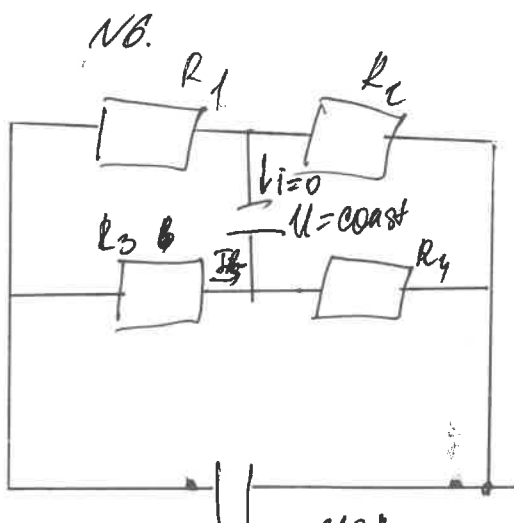
$$R_2 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 40 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 210 \text{ В}$$

$$q = ?$$



Решение:

$$U_0 = I_1(R_1 + R_2)$$

$$U_0 = I_2(R_3 + R_4)$$

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{U_0}{R_3 + R_4}$$

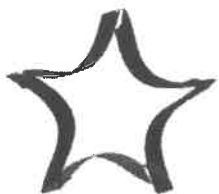
$$I_1 R_1 + U = I_2 R_3$$

$$q = |U| \cdot C = C \cdot U_0 \left| \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right|$$

$$q = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \left| \frac{30}{30 + 40} - \frac{10}{10 + 20} \right| = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot \left| \frac{30}{70} - \frac{10}{30} \right| =$$

$$= 2 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot \left| \frac{20}{210} \right| = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 20}{210} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 0,004 \text{ Кл}.$$

Ответ: $q = 0,004 \text{ Кл}.$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 77/5-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№ 2.

Решение:

	с		с		с		с
с		с		с		с	
	с		с		с		с
с		с		с		с	
	с		с		с		с
с		с		с		с	
	с		с		с		с
с		с		с		с	
	с		с		с		с
с		с		с		с	
	с		с		с		с
с		с		с		с	

1) Для лучшей наглядности изображения
ищутелей прямоугольник размером
 8×12 .

2) Расставили серые илети в шахмат-
ном порядке, остальные без различия
оставшиеся илети

3) всего съобразовано: $4 \cdot 12$

Ихтиных на сирасон: $2^{48} \cdot 2$,
(домножали на 2, т.и. надо учесть
ищутелей зеркаланое положение)

4) Следовательно всего: $3^{12} \cdot 8 = 3^{49}$

5) $p = \frac{2^{49}}{3^{49}}$ - ищутелей вероятность.

Ответ: $p = \frac{2^{49}}{3^{49}}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 77/5-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

$$f(x) = ax^2 + (a+1)x + b, \text{ по условию:}$$

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \leq 0.$$

$$\Delta = (a+1)^2 - 4ab \Rightarrow (a+1)^2 - 4ab \leq 0.$$

$$(a+1)^2 \leq 4ab$$

$$b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$$

мин. знач. где $(2a+b+1)$, подставим $b = \frac{(a+1)^2}{4a}$

$$2a+b+1 = 2a + \frac{(a+1)^2}{4a} + 1 = 2a + \frac{a^2+2a+1}{4a} + 1 = \frac{8a^2+a^2+2a+1+4a}{4a} =$$

$$= \frac{9a^2+6a+1}{4a}.$$

Чтобы найти мин. знач, надо взять производную от полученного выражения:

$$\left(\frac{9a^2+6a+1}{4a} \right)' = \frac{(9a^2+6a+1)' \cdot 4a - (9a^2+6a+1) \cdot (4a)'}{(4a)^2} = \frac{(18a+6) \cdot 4a - (9a^2+6a+1) \cdot 4}{16a^2} =$$

$$= \frac{(18a+6) \cdot 4a - (9a^2+6a+1) \cdot 4}{16a^2} = \frac{72a^2+24a-9a^2-6a-4}{16a^2} = \frac{63a^2+18a-4}{16a^2}.$$

$$\frac{63a^2+18a-4}{16a^2} = 0, a \neq 0, 63a^2+18a-4=0 \Rightarrow (3a+1)(3a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

График функции $y = 63x^2 + 18x - 4$ имеет корни $x = -\frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{3}$. Минимум достигается при $a = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ минимальное значение выражения будет при $a = \frac{1}{3}$.

Подставим: $b = \frac{(a+1)^2}{4a} = \frac{(\frac{1}{3}+1)^2}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{16 \cdot 3}{9 \cdot 4} = \frac{16}{3 \cdot 4} = \frac{4}{3}$

$$2a+b+1 = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{6}{3} + 1 = 3.$$

Ответ: 3.

Мет 4



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 77/5-04-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№1.
 $9\sqrt{2 - \log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2 - \log_2 x} - 7|, \quad x > 0.$
 Положим $\log_2 x = a$ $\sqrt{2 - \log_2 x} = a$, то $a^2 = 2 - \log_2 x$
 $9\sqrt{2 - a} - 2|4a - 7| \leq 9a - 2|4a - 7|, \quad a \geq 0 \quad \log_2 x = 2 - a^2$
 $4\log_2 x - 7 = 4(2 - a^2) - 7 = 1 - 4a^2$

$4a - 7 \geq 0$
 $4\sqrt{2 - a} - 7$

$9a - 2|4a^2 - 1| \leq 18 - 9a^2 - 2|4a - 7|$

$\begin{cases} 4a^2 - 1 \geq 0 \\ 4a - 7 \geq 0 \\ 9a - 8a^2 + 2 + 9a^2 + 8a - 14 - 18 \leq 0 \quad (1) \end{cases}$
 $\begin{cases} 4a^2 - 1 < 0 \\ 4a - 7 \geq 0 \quad (2) \\ 9a + 8a^2 - 2 + 9a^2 + 8a - 14 - 18 \leq 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} 4a^2 - 1 \geq 0 \\ 4a - 7 < 0 \\ 9a - 8a^2 + 2 + 9a^2 - 8a + 14 - 18 \leq 0 \quad (3) \end{cases}$
 $\begin{cases} 4a^2 - 1 < 0 \quad (5) \\ 4a - 7 < 0 \end{cases}$
 $9a + 8a^2 - 2 + 9a^2 - 8a + 14 - 18 \leq 0 \quad (4)$

$(1) a^2 + 17a - 30 \leq 0$
 $a_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{409}}{2}$
 $a \in \left[\frac{-17 - \sqrt{409}}{2}, \frac{-17 + \sqrt{409}}{2} \right]$
 $\frac{-17 - \sqrt{409}}{2} \approx -16$
 $\frac{-17 + \sqrt{409}}{2} \approx 1.1$
 $\sqrt{409} \approx 20.2$

$(2) 4a^2 - 1 < 0$
 $4a - 7 \geq 0$
 следовательно $a \in \left[\frac{7}{4}, \frac{7}{4} \right]$
 $(3) x^2 + x - 2 \leq 0$
 $(x+2)(x-1) \leq 0$
 $x \in [-2; 1]$
 $\frac{-17 + \sqrt{409}}{2} \approx 1.1$
 $\frac{-17 - \sqrt{409}}{2} \approx -16$
 $401 < 1681$

$a \in \left[\frac{7}{4}, +\infty \right)$
 $a \in \left[-\frac{17 - \sqrt{409}}{2}, -\frac{17 + \sqrt{409}}{2} \right] \Rightarrow a \in \emptyset$
 $a \in \emptyset$

$a \in \left[2; \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

$a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$
 $a \in \left[\frac{-1 - \sqrt{409}}{34}, \frac{-1 + \sqrt{409}}{34} \right]$

$(4) 17x^2 + x - 6 \leq 0$
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{409}}{34}$
 $x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{409}}{34}, \frac{-1 + \sqrt{409}}{34} \right]$

$(5) 4a^2 - 1 < 0$
 $4a - 7 < 0$
 $\Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 77/5-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

В результате вычислений получаем: №1 (продолжение)

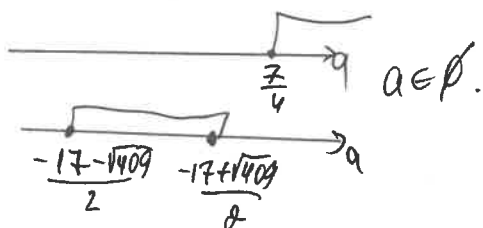
$$\begin{cases} a \in \left[\frac{7}{4}, +\infty \right) \\ a \in \left[\frac{-17 - \sqrt{409}}{2}, \frac{-17 + \sqrt{409}}{2} \right] \end{cases} \quad (6)$$

$$a \in \left[-2; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$$

$$\begin{cases} a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \\ a \in \left[\frac{-1 - \sqrt{409}}{34}, \frac{-1 + \sqrt{409}}{34} \right] \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} a \in \left[-2; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \\ a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow a \in [-2; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a \leq 1 \end{cases}$$

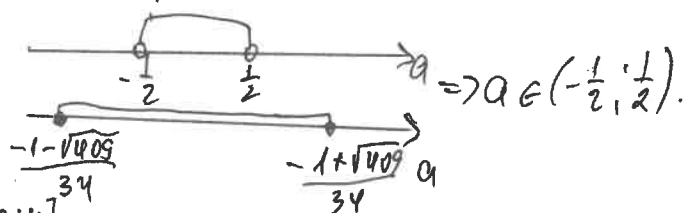
(6) сравнение значений см. в п. (1).



(7) сравним:

$$\begin{array}{ll} \frac{-1 - \sqrt{409}}{34} < -\frac{1}{2} & \frac{-1 + \sqrt{409}}{34} > \frac{1}{2} \\ -\sqrt{409} < -16 \quad | \cdot (-1) & \sqrt{409} > 18 \quad | ^2 \\ \sqrt{409} > 16 \quad | ^2 & 409 > 324 \\ 409 > 256 & \end{array}$$

изобразим числ. прямой:



$$\begin{cases} a \geq -2 \quad | \sqrt{2 - \log_2 x} \geq -2 \quad (8) \\ a \leq 1 \quad | \sqrt{2 - \log_2 x} \leq 1 \quad (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0; 4] \\ x \in [2; 4] \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 4]$$

(8) $\sqrt{2 - \log_2 x} \geq -2$ при $x \in \mathbb{R}$.

$2 - \log_2 x \geq 0 \Rightarrow x \in (0; 4]$.

(9) $\begin{cases} x \in (0; 4], \text{ так как } x \in (0; 4] \\ 2 - \log_2 x \leq 1 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 4]$

Ответ: $x \in [2; 4]$.

лист 6/



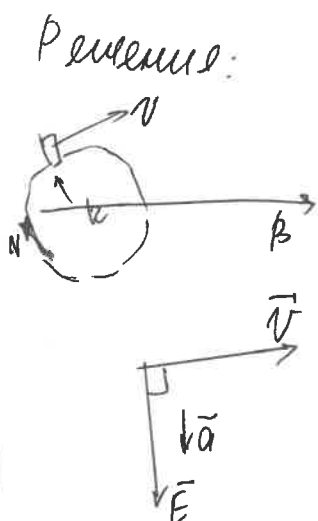
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 77/5-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Дано:
m.
q
R, h.
B.
h
E
t-?



Решение:

$$q v B = \frac{m v^2}{R}$$

$$R = \frac{m v}{q B}, \quad t_1 = \frac{2\pi R}{2v}$$

$$m a = q E$$

$$a = \frac{q E}{m}$$

$$R = \frac{v^2}{a}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi R}{2v} + \sqrt{\frac{m^2 v^2}{q^2 B}}$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi R}{2v} + \sqrt{\frac{m^2 v^2}{q^2 B}}$$

Если шара преткнется по большой диагонали, то ~~преткнется~~
она пройдет через кол-во кубиков, которое мы обозначим n.

$$n = a + b + c - \text{НОД}(a, b) - \text{НОД}(a, c) - \text{НОД}(b, c) + \text{НОД}(a, b, c), \text{ где}$$

a, b, c - длины сторон, причем a = 6, b = 7, c = 11, НОД - наибольший общий делитель.

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(6, 7) = 1$$

$$\text{НОД}(a, c) = \text{НОД}(6, 11) = 1$$

$$\text{НОД}(b, c) = \text{НОД}(7, 11) = 1$$

$$\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}(6, 7, 11) = 1$$

$$n = 6 + 7 + 11 - 1 - 1 - 1 + 1 = 24 - 3 + 1 = 22 \text{ (кубика)}$$

Ответ: 22 кубика.

мст 7