Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 63-09-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	10	2	10	15	2	76

Вариант 2

№1

$$+\begin{cases} x^2+2=(y+z)^2 \\ y^2+1=(x+z)^2 \\ z^2+1=(x+y)^2 \end{cases} \Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}+4=2\cancel{x^2}+\cancel{2}y^2+\cancel{2}z^2+2xy+2zy+2zx$$

$$4=x^2+y^2+z^2+2xy+2zy+2zx$$

$$4=x^2+2xy+y^2+2z(x+y)+z^2$$

$$4=(x+y)^2+2z(x+y)+z^2$$

$$4=(x+y+z)^2$$

$x+y+z=2$ или $x+y+z=-2$

$$\begin{cases} x^2+2=y^2+z^2+2zy \\ y^2+1=x^2+z^2+2xz \\ z^2+1=x^2+2xy+y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+3=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2z^2+2z(x+y) \\ y^2+z^2+2=y^2+z^2+2x^2+2x(z+y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3=2z(z+x+y) \\ 2=2x(x+z+y) \end{cases}$$

Если $x+y+z=2$, то:

$3=2z\cdot 2$

$\underbrace{z=\frac{3}{4}=0{,}75}\geq 0$

$2=2x\cdot 2$

$\underbrace{x=\frac{1}{2}=0{,}5}\geq 0$

$\underbrace{y=2-z-x=0{,}75}\geq 0$

подходит, т.к. $y, z, x \geq 0$

Если $x+y+z=-2$, то,

$3=2z\cdot(-2)$

$\underbrace{z=\frac{-3}{4}=-0{,}75}<0$

$(-2)\cdot 2x=2$

$\underbrace{x=-\frac{1}{2}=-0{,}5}<0$

$\underbrace{y=-2-x-y=-0{,}75}<0$

не подходит, т.к. $y, z, x<0$

Ответ: $(0{,}5;0{,}75;0{,}75)$ +

№2

время / кол-во п. / кассиры	До обеда покупателей	После обеда покупателей	Всего покупателей
I кассир	$0,75x$	$1,2y$	$0,75x+1,2y$
II кассир	x	y	$x+y$

$$\begin{cases} 0,75x+1,2y+x+y<250 \\ \dfrac{0,75x+1,2y-x-y}{x+y}=\dfrac{10}{100} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,75x+2,2y<250 \\ 0,75x+1,2y=x+y+0,1x+0,1y \end{cases}$$

$$0,75x+1,2y=1,1x+1,1y$$

$$0,1y=0,35x$$

$$\boxed{y=3,5x}$$

$$1,75x+2,2\cdot 3,5x<250$$

$$1,75x+7,7x<250$$

$$9,45x<250$$

Так как x,y – число покупателей $\Rightarrow$ x,y – целые числа, а также общее кол-во покупателей целое число. $\Rightarrow$ $9,45x$ – целое число

Наименьшее x при котором $9,45x$ – целое число найдем.

Пусть $9,45x$ ~~<400~~ $= 9\frac{45}{100}x = 9\frac{9}{20}x \Rightarrow$ x наименьшее равно 20, тогда всего покупателей: $9\frac{9}{20}\cdot 20 = 180+9 = 189$ шт.

т.к. x – целое число то следующее целое число $\vdots 20$ это 40 тогда всего покупателей: $9\frac{9}{20}\cdot 40 = 360+18 = 378$, что >250 $\Rightarrow$ все $x\geq 40$ не подходят. $\Rightarrow$ $x=20$, тогда $189<250$ подходит

$y=20\cdot 3,5=70$ – подходит. тогда всего обслужил I кассир:

$$\frac{3}{4}\cdot 20 + 1\frac{1}{5}\cdot 70 = 15+84 = 99 \text{ человек}$$

Ответ: 99 человек

63-09-04

Министерство образования и науки Российской Федерации * ФГБОУ ВО «Самарский государственный архитектурно-строительный университет» * Приемная комиссия

№3

Так как на окружности 2025 точек включая т. A, то не включая т. A мы имее 2024 точки. тогда кол-во n угольников включающих себя точку A это будет разность м/у всему возможными n-угольниками в 2025 точками и всеми возможными n-угольниками в 2024 точек. т.е.

Кол-во n-угольников без т. A: $C_n^{2024} = \frac{2024!}{(2024-n)!\,n!}$

Кол-во n-угольников содержащих т. A $C_n^{2025} - C_n^{2024} = \frac{2025!}{(2025-n)!\,n!} - \frac{2024!}{(2024-n)!\cdot n!} =$

$= \frac{2024!}{(2024-n)!\,n!}\left(\frac{2025}{2025-n} - 1\right) = \frac{2024!}{(2024-n)!\,n!}\left(\frac{n}{(2025-n)}\right) = \frac{2024!}{(2025-n)!\,(n-1)!}$

Тогда найдем на сколько кол-во n угольников содержащих т. A больше чем - кол-во n угольников б/у точки A, (это предположение если оно окажется неверным мы получим ответ отрицательный ответ:

$\frac{2024!}{(2025-n)!\,(n-1)!} - \frac{2024!}{(2024-n)!\,n!} = \frac{2024!}{(2024-n)!\,(n-1)!}\left(\frac{1}{2025-n} - \frac{1}{n}\right) =$

$= \frac{2024!}{(2024-n)!\,(n-1)!}\left(\frac{2n-2025}{(2025-n)\cdot(n)}\right) = \frac{2024!}{(2025-n)!\,n!}(2n-2025)$

причем $n \in [3;2025]$ а $0! = 1$.

при $n = 2025$: $\frac{2024!}{2025!}\cdot 2025 = 1$

при $n = 2024$: $\frac{2024!}{2024!}\cdot 2023 = 2023$

при $n = 2023$: $\frac{2024!}{2023!\cdot 2}\cdot 2021 = \frac{2024\cdot 2021}{2}$

при $n = 2022$: $\frac{2024!}{2022!\cdot 3!}\cdot 2019$

при $n = 2021$: $\frac{2024!}{2021!\cdot 4!}\cdot 2017$

при $n = 3 = \frac{2024!}{2023!\cdot 2}\cdot(-2021)$

при $n = 4 = \frac{2024!}{2021!\cdot 4!}\cdot(-2017)$

Всего ~~кол-во~~ на сколько многоугольников с точкой A больше чем многоугольников без т. A это сумма данных разностей но можем заметить, что при $n = 2022$ и $n = 3$ мы получаем результаты, которые отличаются только знаком => при их сумме мы получаем 0, аналогично при $n = 2021$ и $n = 4$. а числа $n \in [3;2022]$ - идеально разбиваются на 1000 пар сумма которых равна 0

Тогда общая сумма (на сколько многоугольников больше чем многоугольников без т. А) равно

$1 + 2023 + 2012\cdot 2021 + 1000\cdot 0 = 2024 + 2012\cdot 2021 =$

$= 2012(2 + 2021) = 2012\cdot 2023 = 1012\cdot 2023$

$$\begin{array}{r} \times 2023 \\ 2012 \\ \hline 4046 \\ 2023 \\ 0000 \\ \cancel{4046} \\ 2023 \\ \hline \cancel{4070276} \\ 2047276 \end{array}$$

— число получилось положительное значит предположение верно => многоугольников с т. А больше чем многоугольников без точки А на ~~4070276~~ штук 2047276

$$\begin{array}{r} 2023 \\ 1012 \\ \hline 4046 \\ 2023 \\ 0000 \\ 2023 \\ \hline 2047276 \end{array}$$

Ответ: больше многоугольников с т. А. на 2047276

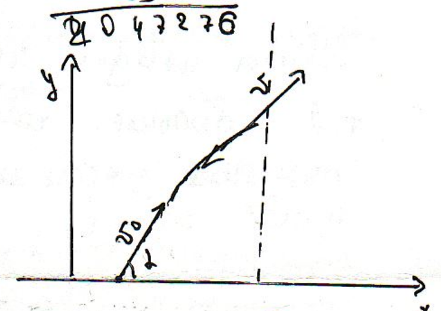
+

№5

Дано:
$v_0 = 30$ м/с
$\alpha = 60^\circ$
$v = 20$ м/с
$g = 10$ м/с^2

По оси Ox, Oy:
$v_{0x} = v_0\cdot\cos\alpha$
$v_{0y} = v_0\cdot\sin\alpha$

При полете
v_{0x} - const
$v_y = v_0\cdot\sin\alpha - g\tau$



Пусть S_1 - путь который пролет шарик туда, а τ_1 - это время полета туда.

$$\cancel{\begin{cases} v = v_0\sin\alpha - g\tau_1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{v_0\sin\alpha - v}{g} \\ S_1 = v_0\cos\alpha\cdot\tau_1 \Rightarrow S_1 = v_0\cos\alpha\cdot\frac{v_0\sin\alpha - v}{g} \end{cases}}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - g\tau_1)^2 = v_0^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + g^2\tau_1^2 - 2v_0\sin\alpha g\tau_1$$

$$g^2\tau_1^2 - 2v_0\sin\alpha\, g\tau_1 + v_0^2 - v^2 = 0$$

$$\tau_1 = \frac{2v_0\sin\alpha\, g \pm\sqrt{4v_0^2\sin^2\alpha\, g^2 - 4g^2(v_0^2 - v^2)}}{2g^2} = \frac{v_0\sin\alpha \pm\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \ldots}}{g}$$

$$= \frac{15\sqrt3 \pm\sqrt{\ldots 225 + 400}}{10}\text{ с} = \frac{15\sqrt3 \pm 25}{10}\text{ с} = \frac{3\sqrt3 \pm 5}{2}\text{ с} \geq 0$$

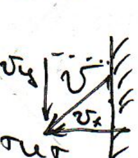
т.к. мы рассматриваем момент времени, когда $v = 20$ в 1 раз, то берем меньшее время $\tau_1 = \frac{3\sqrt3 - 5}{2} \Rightarrow S_1 = v_x\tau_1 = v_0\cos\alpha\,\tau_1 = 15\cdot\frac{3\sqrt3 - 5}{2} =$

$= \frac{45\sqrt3 - 75}{2}$

№5 продолжение 63-09-04

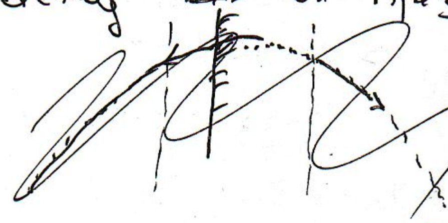
Приемная комиссия

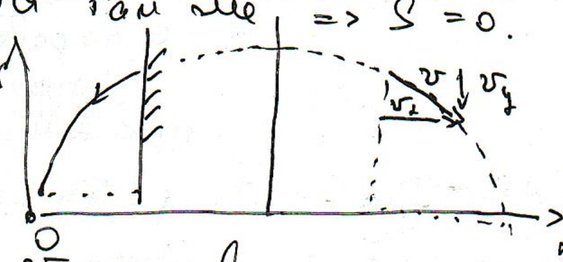
когда шарик упруго отразился от стенки его скорости сохранились но поменяли направление (на 180°)



и получается он тоже летит по парабуле и проходит то же расстояние что и до удара в стенку => он приземлится там же => $\vec{S}=0$.

т.к.





т.к. мы знаем что он обретет $\vec{v}$ через время t_1, когда будет спускаться с параболы, если ему на встречу не будет стоять стенка., т.к v_x сохраняется а v_y будет таким же только направления вниз, а при упругом столкновении скорости сохраняются, но меняют направлен и если мы отзеркалим часть параболы относительно прямой проходящей 1/2 вершину параболы и $\parallel Oy$. то их пути совпадут значит после упругого столкновения шарик полетит по тому же пути что летел до столкновения и вернется в то же место

ч.т.д.

Ответ на расстоянии 0м.

№6

Дано:
$t_0 = 0°C$
$S = 15 см^2$
$\rho в = 1 г/см^3$
$\rho л = 0{,}9 г/см^3$
$m в; m л = ?$

Так как лед нагревался и плавился он превращался в воду, его плотность => и V тоже менялись, суммарное изменение $\Delta V = \Delta h \cdot S = (120-115)см \cdot 15см^2 =$
$= 75 см^3$ это равно $m_л/\rho_л - m_л/\rho_в = m_л(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в})$
=> $m_л(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}) = \Delta V$

$$m_л = \frac{\Delta V}{\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}} = \frac{75 см^3}{\frac{1}{0{,}9 г/см^3} - \frac{1}{1 г/см^3}} = 75 см^3 \cdot 9 г/см^3 = 675 г$$

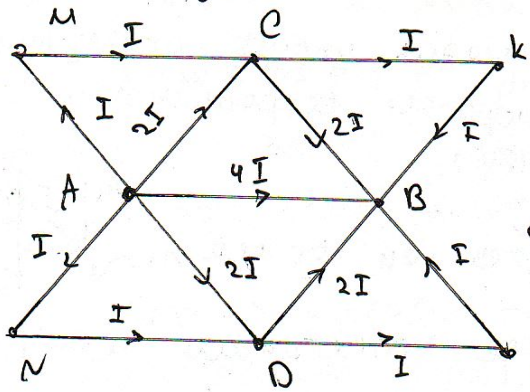
$m_в = V_в \cdot \rho_в = (V - V_л) \cdot \rho_в$, где V – это полный объем после таяния льда, с высотой h

$m_в = (h \cdot S - m_л/\rho_в)\rho_в = h \cdot S \cdot \rho_в - m_л = 115 см \cdot 15 см^2 \cdot 1 г/см^3 - 675 г = (1725-675) г =$
$= 1050 г$

Ответ: 675г; 1050г.

№7

Дано:
$R_0 = 8$ Ом
$R_{AB} = ?$



В цепи есть и „хорошая" и „плохая" симметрия, расставим токи, используя закон Ома симметрии.
Пусть ток $AM = I$, тогда $MC = AM = I$, т.к. как нет ответвлений по закону Ома: $AC \cdot 2I = AM \cdot I + MC \cdot I$
и по равенству напряжений AC $\Rightarrow$ на $AC = 2I$
т.к. $R_{AM} = R_{MC}$ R_{AC} Из-за плохой симметр.

$I_{AC} = I_{CB} = 2I$, $I_{CK} = I_{KB} = I = I_{MC} = I_{AM}$

Из-за хорошей симметрии $I_{AM} = I_{MC} = I_{CK} = I_{KB} = I_{AN} = I_{ND} = I_{DX} = I_{XB} = I$

$I_{AC} = I_{CB} = I_{AD} = I_{DC} = 2I$.

по закону Ома и равенству напряжений $AB = AC \cdot 2I + CB \cdot 2I = AB \cdot 4I$
т.к. $R_{AC} = R_{CB} = R_{AB}$

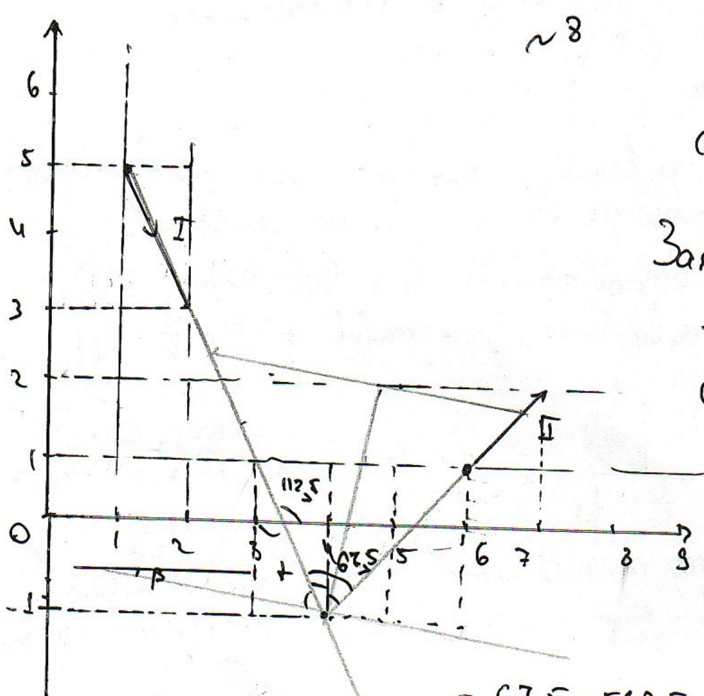
$\Rightarrow I_{AB} = 4I$, тогда $I_A = I_B = I_{AM} + I_{AC} + I_{AB} + I_{AD} + I_{AN} = 10I$

$U_{AB} = 4I \cdot R_{AB}$

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_A} = \frac{4I \cdot R_{AB}}{10I} = \frac{4 \cdot 8\text{ Ом}}{10} = 3{,}2\text{ Ом}$$

Ответ: 3,2 Ом.

№8



1) продолжим лучи до их пересечения. тогда точка их пересечения и будет точкой отражения и тогда ее координаты (4;-1).

Заметим, что II луч идет под $\angle 180 - \frac{3}{4} \cdot 90 = 90\left(2 - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \cdot 90 = 5 \cdot 22{,}5 = \cancel{157{,}5^\circ}\ 112{,}5^\circ$

а I луч идет под $\angle \frac{1}{2} \cdot 90 = 45^\circ$.

тогда $\angle$ м/у I и II лучом $= 112{,}5^\circ - 45^\circ = 67{,}5^\circ \Rightarrow \angle\alpha = -\frac{67{,}5}{2} + 90 = 90 - 33{,}75 = 56{,}25^\circ$

$\Rightarrow \angle\beta$ – к горизонту $= 180^\circ - \alpha - 112{,}5 = 67{,}5 - 56{,}25 = 11{,}25^\circ$

Ответ: координаты (4;-1) и угол к горизонту: $11{,}25^\circ$.

63-09-04

Министерство образования и науки Российской Федерации ФГБОУ ВО «Самарский государственный архитектурно-строительный университет» Приемная комиссия

№4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Пусть x' – корень данного уравнения, тогда

$f(x') = 0.$

Пусть $f(g(x)) = f(x')$

$x^2 + 4x + 2024 = x'$

$x^2 + 4x + 2024 - x' = 0$

$D = 16 - 4(2024 - x') < 0 \quad |:4$

$4 - 2024 + x' < 0$

Значит нет действительных корней $f(g(x))$ при $x' < 2020$

$g(x)$ – нет действительных корней $\Rightarrow D < 0, \Rightarrow$ $f(g(x))$ имеет действительные корни.

$x' < 2020$ иначе

$\Rightarrow$ при $x = 2024$ $\Rightarrow f(x) > f(x'+4)$

$f(x) > (x'+4)^3 + (x'+4)^2 a + (x'+4)b + c$

$f(x) > 64 + x' + 12x'^2 + 48x' + b(x'+4) + (x'+4)^2 a + c$

т.к. $f(x') = 0$ то $f(x'+4) > 0$

т.к. $64\ x'^3 + 12x'^2 + 48x' + (x'+4)^2 a + (x'+4)b + c >$

чем $x'^3 + x'^2 a + x' \cdot b + c = 0$

$\Rightarrow f(x') + 64 \leq f(x'+4)$

$0 + 64 \leq f(x'+4) < f(x) = f(2024)$

$f(2024) > 0$

ч.т.д.