шифр 55-9-18

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	3	7	13	10	10	15	–	67

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 1

(3) Условимся называть многоугольники с вершиной в точке A – многоугольником типом A все остальные многоугольники, не содержащие точку A – многоугольником типом B. Каждому многоугольнику типа B поставим в соответствие многоугольник типа A, вершинами которого являются все вершины исходного многоугольника и точка A. При этом соответствии различным многоугольникам типа B соответствуют различные многоугольники типа A. С другой стороны, треугольник с двумя обычными вершинами и одной точкой A не соответствует никакому многоугольнику типа B.

Таким образом, многоугольников типа A больше чем многоугольников типа B.

(5) Дано:

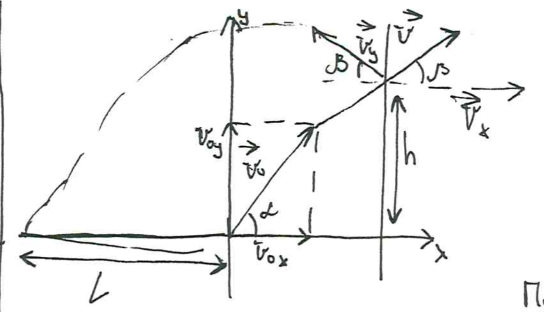
$V_0 = 40$ м/с

$\alpha = 60^\circ$

$V = 30$ м/с

$g = 10$ м/с²

L - ?



$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha$; $V_{0x} = 40 \cdot \cos 60 = 20$ м/с

$V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha$; $V_{0y} = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ м/с

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ $V_x = V_{0x}$, т.к. движение по оси Ox равномерно.

$V_y = \sqrt{V^2 - V_x^2}$ $V_y = \sqrt{30^2 - 20^2} = \sqrt{500} \approx 22,4\ \frac{м}{с}$

Пусть h – высота, на которой шарик врезался в стенку

$h = \frac{V_y^2 - V_{0y}^2}{-2g} = \frac{500 - (20\sqrt{3})^2}{-20} = 35$ м; Время полета t_0

$t_0 = \frac{V_{0y} - V_y}{g}$;

$t_0 = \frac{20\sqrt{3} - 10\sqrt{3}}{10} \approx 1,22$

Т.к. удар абсолютно упругий, то скорость V' с которой шарик отскочет от стенки будет равна по модулю V.

Запишем уравнение координаты y шарика после удара о стенку

$y = y_0 + V' \sin\beta\, t - \frac{g \cdot t^2}{2}$ определим время его полета до точки падения

$0 = 35 + 10\sqrt{5}\, t - 5t^2$

$t \approx 5,7$ с

Расстояние от места броска до стенки:

$S = V_{0x} \cdot t_0$; $S = 20 \cdot 1,22 c = 24,4$ м

После удара о стенку шарик пролетит по горизонтали $S' = V_{0x} \cdot t$; $S' = 20 \cdot 5,7 = 114$ м

$L = S' - S$

$L = 114 - 24,4 = 89,6$ м Ответ: 89,6

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 55-9-18

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

⑥ Дано:

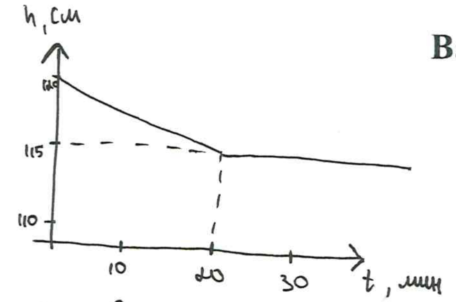
$S = 15\,см^2$

$\rho в. = 1\,г/см^3$

$\rho л. = 0,9\,г/см^3$

$m л. - ?$

$m в. - ?$



$\Delta V = S_\Delta h = 15 \cdot 5 = 75\,см^3$ (Изменение объёма воды в сосуде)

Данное изменение - разница между объёмами исходного льда и воды:

$\Delta V = V_л - V_в = \frac{m_л}{\rho_л} - \frac{m_в}{\rho_в}.$

Получаем, что масса исходного льда:

$m_{л.} = \frac{\Delta V \cdot \rho_{л.} \cdot \rho_{в.}}{\rho_{в.} - \rho_{л.}} = 675\,г.$

Конечный объём воды в сосуде:

$V_{к.} = 115 \cdot 15 = 1725\,см^3$ => начальная масса воды:

$m_{в.} = \rho_{в.} V_к - m_{л.} = 1050\,г.$

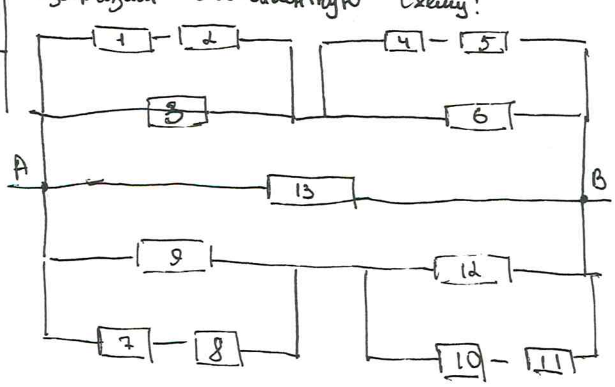
Ответ: $m_{л.} = 675\,г$, а $m_{в.} = 1050\,г.$

⑦ Дано:

$R_0 = 10\,Ом$

$R - ?$

Изобразим эквивалентную схему:



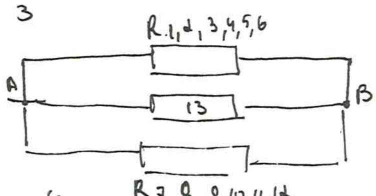
Т.к. схема симметрична, то найдем сопротивление верхней части схемы!

$R_{1,2} = R_{4,5} = 2R_0 = 20\,Ом.$

$R_{123} = R_{456} = \frac{2R_0 \cdot R_0}{2R_0 + R_0} = \frac{2R_0}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3} = \frac{20}{3}\,Ом$

$R_{1,2,3,4,5,6} = \frac{20}{3} \cdot 2 = \frac{40}{3}\,Ом$

$R_{7,8,9,10,11,12} = \frac{40}{3}\,Ом$



$\frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{40}{3}} + \frac{1}{10} + \frac{1}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{40} + \frac{4}{40} + \frac{3}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ =>

$R = 4\,Ом$

Ответ: 4 Ом.

33-9-18

1g.	x	$1{,}25x$
2g.	$1{,}2y$	y

$2{,}25x + 2{,}2y < 250$

1к.) $x + 1{,}2y$ − 110%

2к.) $1{,}25x + y$ − 100%

Найдём отношение:

$\frac{x+1{,}2y}{1{,}25x+y} = \frac{11}{10}$; $10x + 12y = 13{,}75x + 11y$

$y = 3{,}75x \quad |:y$

$\frac{y}{x} = 3{,}75 = \frac{15}{4}$

$x = 4$

$y = 15$

Подставим значения:

$\frac{(4 + 15 \cdot 1{,}2)}{(15 + 1{,}25 \cdot 4)} = \frac{(4+18)}{(15+5)} = \frac{22}{20}$ всего 42 покупателя

Умножим получившиеся x и y на 2

	1к.	2к.
1g.	8	10 $(8 \cdot 1{,}25)$
2g.	36 $(1{,}2 \cdot 15)$	30

Найдем кол-во обслуженных покупателей:

$\cancel{\frac{8+10}{36+30}} \ \cancel{\frac{18}{96}} = \cancel{\frac{2}{4}}$ 2 кассир обслужил 84 покупателя

Ответ: 84

4\. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет 3 действительных корня $\Rightarrow$

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Найдём $f(g(x)) = (g(x) - x_1)(g(x) - x_2)(g(x) - x_3)$

т.к. $g(x) = x^2 + 6x + 2024$ действительных корней не имеет, то

1.) $g(x) - x_1 \neq 0$; 2.) $g(x) - x_2 \neq 0$; 3.) $g(x) - x_3 \neq 0$

1.) $g(x) - x_1 \neq 0$

$x^2 + 6x + 2024 - x_1 \neq 0$

$D_1 = 36 - 4(2024 - x_1) < 0$

$-4(2024 - x_1) < -36$

$2024 - x_1 > 9$

2.) $g(x) - x_2 \neq 0$

$x^2 + 6x + 2024 - x_2 \neq 0$

$D_2 = 36 - 4(2024 - x_2) < 0$

$-4(2024 - x_2) < -36$

$2024 - x_2 > 9$

Аналогично 3.) $g(x) - x_3 \neq 0 \Rightarrow 2024 - x_3 > 9$

$f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) < 9^3$

т.е. $f(2024) < 729$

Доказано.

4. $\begin{cases} (y+z)^2 - x^2 = 2 \\ (x+z)^2 - y^2 = 3 \\ (x+y)^2 - z^2 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} (y+z \ldots) \ldots \\ (x+z-y)(x+z+y) = 3 \\ (x+y-z)(x+y+z) = 4 \end{cases}$

25-918

$$\begin{cases} x+y+z = \dfrac{2}{y+z-x} \\ x+y+z = \dfrac{3}{x+z-y} \\ x+y+z = \dfrac{4}{x+y-z} \end{cases}$$

Приобр. $\dfrac{2}{y+z-x} = \dfrac{3}{x+z-y} = \dfrac{4}{x+y-z}$

$2(x+z-y) = 3(y+z-x)$

$2x+2z-2y = 3y+3x-3x$

$5x - z - 5y = 0$

$z = 5x - 5y$

$3(x+2y-z) = 4(x+z-y)$

$3x+3y-3z = 4x+4z-4y$

$-x+7y-7z = 0$

$7z = 7y - x$

$z = \dfrac{7y-x}{7} = y - \dfrac{x}{7}$

Приобр. $5x - 5y = y - \dfrac{x}{7} \quad |\cdot 7$

$35x - 35y = 7y - x$

$36x = 42y \quad |:6$

$6x = 7y$

$y = \dfrac{6x}{7}$

$2x + 2y - 2z = 4y + 4z - 4x$

$6x - 2y - 6z = 0 \quad |:2$

$3x - y - 3z = 0$

$y = 3x - 3z$

$\dfrac{6x}{7} = 3x - 3z$

$6x = 21x - 21z$

$21z = 15x \quad |:3$

$7z = 5x$

$x = \dfrac{7z}{5}$

$x+y-z \neq 0$

$z \neq x+y$

$x, y, z > 0$

Приобр.

$y = \dfrac{6x}{7}$

$z = 5x - 5y$

1.) $x = 1 \quad y = \dfrac{6}{7} \quad z = 5 - \dfrac{30}{7} = 5 - 4\dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$

2.) $z = 1 \quad x = \dfrac{7}{5} \quad y = \dfrac{6 \cdot \frac{7}{5}}{7} = \dfrac{6}{5}$

$\left(1; \dfrac{6}{7}; \dfrac{5}{7}\right)$

Ответ: $1; \dfrac{6}{7}; \dfrac{5}{7}$.