Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Персональный идентификатор участника* ______________

Шифр** 27-09-03

Задание	1	2	3	4	5	6	Всего
Баллы	12	10	13	0			

Вариант 1

№1

$$\begin{cases} x^2+2=(y+z)^2 \\ y^2+3=(x+z)^2 \\ z^2+4=(x+y)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+z)^2-x^2=2 \\ (x+z)^2-y^2=3 \\ (x+y)^2-z^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y+z)(y+z-x)=2 \\ (x+y+z)(x+z-y)=3 \\ (x+y+z)(x+y-z)=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z-x=\frac{2}{x+y+z} \\ x+z-y=\frac{3}{x+y+z} \\ x+y-z=\frac{4}{x+y+z} \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения

$$y+z-x+x+z-y+x+y-z=\frac{2}{x+y+z}+\frac{3}{x+y+z}+\frac{4}{x+y+z}$$

$$x+y+z=\frac{9}{x+y+z} \quad |\cdot x+y+z$$

$(x+y+z)^2=9$, но т.к. $x>0$; $y>0$; $z>0$, то $x+y+z>0$

$x+y+z=3$

$$\begin{cases} 3(y+z-x)=2 \\ 3(x+z-y)=3 \\ 3(x+y-z)=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y+3z-3x=2 \\ x+z-y=1 \\ 3x+3y-3z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x+z-1)+3z-3x=2 \\ y=x+z-1 \\ 3x+3(x+z-1)-3z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+3z-3+3z-3x=2 \\ y=x+z-1 \\ 3x+3x+3z-3-3z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6z=5 \\ y=x+z-1 \\ 6x=7 \end{cases} \quad \begin{cases} z=\frac{5}{6} \\ y=\frac{5}{6}+\frac{7}{6}-1 \\ x=\frac{7}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} z=\frac{5}{6} \\ y=1 \\ x=\frac{7}{6} \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{7}{6}$; $y=1$; $z=\frac{5}{6}$

12

№2

$N_I, N_{II} \in \mathbb{Z}$ $\quad N_I+N_{II}<250$

	До обеда	После обеда	Всего за день
I	$N_{I_1}=0{,}95N_{I_1}$ 24	$N_{I_2}=1{,}2N_{II_2}$ 84	$N_I=1{,}1N_{II}$ 99
II	N_{II_1} 20	N_{II_2} 70	N_{II} 90

N_{II} - ?

$N_I=1{,}1N_{II}$

$N_{I_1}+N_{I_2}=1{,}1(N_{II_1}+N_{II_2})$

$0{,}75N_{II_1}+1{,}2N_{II_2}=1{,}1N_{II_1}+1{,}1N_{II_2}$

$0{,}1N_{II_2}=0{,}35N_{II_1}$ (*)

$\boxed{N_{II_2}=3{,}5N_{II_1}}$ (*)

$\frac{20}{10}$ $\frac{4}{35}$ $\frac{10}{35}$

~~$N_{II}=\frac{N_I}{1{,}1}=\frac{N_{I_1}+N_{I_2}}{1{,}1}$~~

Так как $N_I+N_{II}<250$ и $N_I, N_{II}\in\mathbb{Z}$

$N_I=1{,}1N_{II}$, $N_{II}\le 110$

Ответ: $N_{II}=90$

макс 35 К

Как получено?

10

№3

Заметим, что любые n точек на окружности, где $n\ge3$ образуют единственный выпуклый многоугольник. Рассмотрим многоугольники, не содержащие A. Их количество равно $C^3_{2023}+C^4_{2023}+\ldots+C^{2022}_{2023}+C^{2023}_{2023}$. Если многоугольник содержит A, то необходимо выбрать минимум 2 точки из оставшихся 2023, то есть количество таких многоугольников равно $C^2_{2023}+C^3_{2023}+\ldots+C^{2022}_{2023}+C^{2023}_{2023}$, то есть многоугольников с вершиной в точке A больше, чем многоугольников, не содержащих ее на $C^2_{2023}=\frac{2023\cdot2022}{2}=2045253$

13б

~~№5~~

~~Дано~~
~~$g = 10\ \frac{м}{с^2}$~~
~~$V_0 = 40\ \frac{м}{с}$~~
~~$V = 30\ \frac{м}{с}$~~

№6

Дано
$S = 15\ см^2$
$\rho_в = 1\ \frac{г}{см^3}$
$\rho_л = 0{,}9\ \frac{г}{см^3}$

$m_в - ?\ m_л - ?$

Решение

$$\begin{cases} h_1 = 120\ см \\ h_2 = 115\ см \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{V_1}{S} = 120\ см \\ \frac{V_2}{S} = 115\ см \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = 120\ см \cdot S \\ V_2 = \cancel{120}\ 115\ см \cdot S \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = 120\ см \cdot 15\ см^2 \\ V_2 = 115\ см \cdot 15\ см^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = 1800\ см^3 \\ V_2 = 1725\ см^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m_в}{\rho_в} + \frac{m_л}{\rho_л} = 1800 \\ \frac{m_в}{\rho_в} + \frac{m_л}{\rho_в} = 1725 \end{cases} \Rightarrow \frac{m_л}{\rho_л} - \frac{m_л}{\rho_в} = 75$$

$$\cancel{\frac{m_л}{900} - \frac{m_л}{1000} = 75 \ \Big|\cdot 9000}$$
$$\cancel{10m_л - 9m_л = 675000}$$
$$\cancel{m_л = 675000}$$

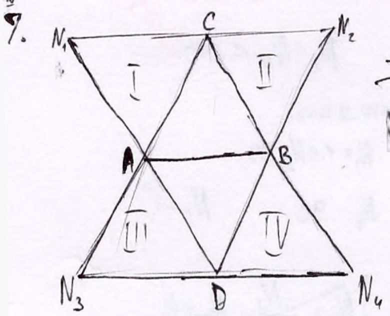
$$\frac{m_л}{0{,}9} - \frac{m_л}{1} = 75 \ \Big|\cdot \cancel{0{,}9}\ 9$$
$$\cancel{m_л - 0{,}9}$$
$$10m_л - 9m_л = 675$$
$$m_л = 675\ г$$

$$\frac{m_в}{\rho_в} + \frac{m_л}{\rho_л} = 1800 \Rightarrow \cancel{m_в = 1800 - m_в}$$
$$= \rho_в\left(1800 - \frac{m_л}{\rho_л}\right) = 1\left(1800 - \frac{675}{0{,}9}\right) =$$
$$= \cancel{1050}\ 1125\ г$$

Ответ: $m_в = 1125\ г$; $m_л = 675\ г$

8

№7.



$$\cancel{R_{I,II} = R_{III,IV} = R_I + R_{II}} \qquad \cancel{\frac{1}{R_I}}$$

$$R_I = R_{II} = R_{III} = R_{IV}. \quad \frac{1}{R_I} = \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{AN_1C}} = \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{AN_1} + R_{N_1C}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0 + R_0} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \Rightarrow R_I = R_{II} = R_{III} = R_{IV} = \cancel{\frac{10+20}{10\cdot 20} = \frac{3}{20}}\ \frac{10\cdot 20}{10+20} = \frac{20}{3}$$

$$R_{I,II} = R_{III,IV} = R_I + R_{II} = \frac{40}{3}$$

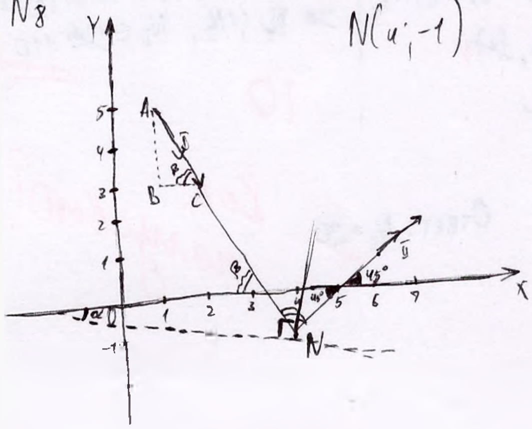
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{I,II}} + \frac{1}{R_{III,IV}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_{I,II}} + \frac{1}{R_{I,II}} \Rightarrow R = \frac{R_0 R_{I,II}^2}{R_0 R_{I,II} + R_0 R_{I,II} + R_{I,II}^2} =$$

$$= \frac{10\cdot\left(\frac{40}{3}\right)^2}{10\cdot\frac{40}{3} + 10\cdot\frac{40}{3} + \left(\frac{40}{3}\right)^2} = \frac{\frac{16000}{9}}{\frac{800}{3} + \frac{1600}{9}} = \frac{\frac{16000}{9}}{\frac{2400+1600}{9}} = \frac{16000\cdot 9}{4000\cdot 9} = 4\ Ом$$

Ответ: 4 Ом

15

№8



$N(4; -1)$ $\quad \alpha - ?$

Заметим, что $\frac{AB}{BC} = 2$, то есть $tg\,\beta = 2$, таким образом, поскольку $\beta \in (0; 90)$, β — известный угол

$$\cancel{\alpha = 45^\circ\ 90^\circ\ 180}\ 45^\circ - \frac{\beta + 45^\circ}{2} \qquad \alpha = 22{,}5^\circ - \frac{\beta}{2}$$

1