

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-10-21

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	2	10	10	15	4	77

Вариант 1

№1

$$\frac{80!}{10^{80}} \quad 10^{80} = 2^{80} \cdot 5^{80}$$

$$80! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 78 \cdot 79 \cdot 80$$

В записи числа $80!$ встречаются сорок множителей кратных 2;
двадцать множителей кратных 4;
десять множителей кратных 8;
пять множителей кратных 16;
два множителя кратных 32;
один множитель кратный 64

Недостаточно в разложении числа $80!$ на простые множители
двойка будет встречаться $40+20+10+5+2+1=78$ раз (2^{78})
при сокращении на 2^{80} в знаменателе даст

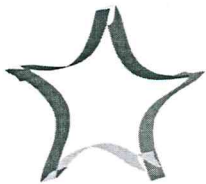
$$\frac{80!}{2^{80} \cdot 5^{80}} \quad 2^2 \cdot 5^{80}$$

Также в записи числа $80!$ на пять делится каждое
пятое число. И ещё по два раза делится множителями:
25; 50; 75. Следовательно в разложении числа $80!$ на простые
множители пятёрка будет встречаться $16+3=19$ раз (5^{19})
При сокращении дроби ещё на 5^{19} в знаменателе
останется $2^2 \cdot 5^{61} = 4 \cdot 5^{61}$

№4

Пусть (А) - один из этих детей. У (А) есть два деду (х) и (у).
Так как не все 80 детей являются внуками одного деду,
то есть обязательно детьми (В), который будет внуком (х),
но не будет являться внуком деду (у). Найдётся также и
дети (С), который внук деду (у), но не является внуком
деду (х). Но у детей (В) и (С) по условию тоже есть общий
деду, например (Z). Получается, что в стае только три деду: (х), (у), (Z)
иначе появился бы ещё один внук, который не имел бы
общего деду с (А), (В), (С). На этих трех деду (х), (у), (Z) в стае
80 внуков - детей, значит хотя бы у одного из этих
деду не менее $\frac{2}{3}$ от общего количества внуков, т.е. $\frac{2}{3}$ от 80
и это не менее 54 внуков (или внучек). Доказано.

Лист 1



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-10-21

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1
N5

Дано:

Решение:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$z = 5,196 \text{ м}$$

$$g_a = ?$$

До аномалии было такое уравнение движения:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t = \frac{10\sqrt{3}}{2} \cdot t = 5\sqrt{3} \cdot t$$

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \frac{10}{2} t - \frac{10t^2}{2} = 5t - 5t^2$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha = 5\sqrt{3}; \quad v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - gt = 5 - 10t$$

Получаем (до верхней точки при полёте):

$$t_0 = 0,5 \text{ с}; \quad x_0 = 2,5\sqrt{3}; \quad y_0 = 1,25 \text{ м}$$

Запишем уравнение движения в самой аномалии

$$\begin{cases} S = x_0 - v_x t = 2,5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} t \\ y = 0 = y_0 - \frac{g_a t^2}{2} = 1,25 - \frac{g_a t^2}{2} \end{cases}$$

$$5\sqrt{3} t = 5,196 - 2,5\sqrt{3} \Rightarrow t \approx \frac{5,196 - 4,33}{8,66} = 0,1 \text{ с}$$

$$\frac{g_a t^2}{2} = 1,25. \text{ Следовательно: } g_a = \frac{2 \cdot 1,25}{(0,1)^2} = 250 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Ответ: $g_a = 250 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

N6

Дано:

$$S = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$$

$$L = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$$

$$D = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$I = 220 \text{ В}$$

$$I = 5 \text{ А}$$

Решение:

Запишем формулу для нахождения мощности тока, протекающего по проводке

$P = U \cdot I$. Формула мощности теплового

излучения: $P = W \cdot S = \sigma T^4 L \cdot \pi D = U \cdot I$

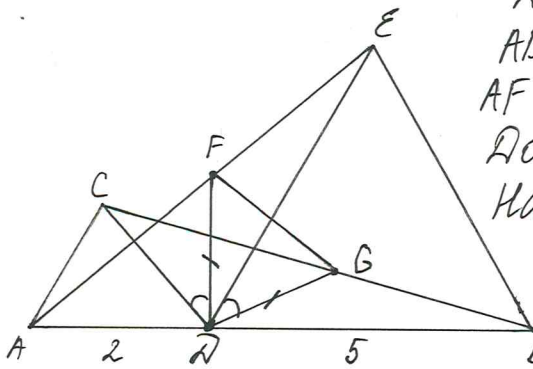
Выразим T :

$$T = \sqrt[4]{\frac{U \cdot I}{\sigma L \pi D}} = \sqrt[4]{\frac{220 \text{ В} \cdot 5 \text{ А}}{5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4} \cdot 0,5 \text{ м} \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}}} = 1576 \text{ К}$$

Ответ: $T = 1576 \text{ К}$

N5

05-10-21



Дано: $\triangle ADC$ и $\triangle DEB$ - равносторонние,
 $AD = AC = CD = 2$; $DB = DE = BE = 5$; $D \in AB$;
 $AF = EF$; $CG = BG$

Доказать: $\triangle FGD$ - равносторонний

Найти: $DF = FG = DG$ - ?

Решение:

$\triangle ADE = \triangle CDB$ (по 2 сторонам и углу
 между ними - I признак р-ва $\triangle$ -ов):

1) $AD = CD = 2$ (по условию $\triangle ADC$ - р/стор.)

2) $DE = DB = 5$ (по условию $\triangle DEB$ - р/стор.)

3) $\angle ADE = \angle CDB = \angle CDE + 60^\circ = 120^\circ$ (т.к. $\angle ADC = \angle BDE = 60^\circ$)

Из равенства $\triangle$ -ов следует, что $AE = BC \Rightarrow DF = DG$ как
 медианы равных $\triangle$ -ов, проведенные к равным сторонам
 $\Rightarrow \angle ADF = \angle CDG$;

$\angle ADF = \angle ADC + \angle CDF = 60^\circ + \angle CDF$

$\angle CDG = \angle CDE + \angle EDG = 60^\circ + \angle EDG$

$\Rightarrow \angle CDF = \angle EDG$

$\angle FDG = \angle FDE + \angle EDG = \angle FDE + \angle CDF = 60^\circ$

Из вышесказанного следует, что $\triangle FDG$ - равносторонний
 что и требовалось доказать.

В $\triangle ADE$:

По теореме косинусов: $AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2AD \cdot DE \cdot \cos 120^\circ$

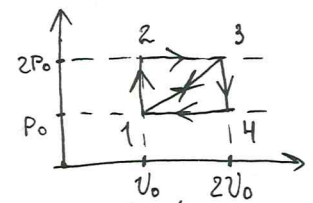
$AE^2 = 4 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 29 + 10 = 39 \Rightarrow AE = \sqrt{39}$

$DF = \frac{1}{2} \sqrt{2(AD^2 + DE^2) - AE^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 29 - 39} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} = \frac{\sqrt{19}}{2}$

$DF = FG = DG = \frac{\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{19}}{2}$

N7



Решение: для цикла 1-2-3-1
 Распишем формулу работы газа за данный
 цикл: $A' = \frac{1}{2} P_0 V_0$
 Определим количество теплоты, полученное
 газом за цикл: $Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{123} + A'_{123}$

$Q = \frac{3}{2} (4P_0V_0 - P_0V_0) + 2P_0V_0 = 6,5P_0V_0$

$\eta_{123} = \frac{A'}{Q} = \frac{\frac{1}{2} P_0 V_0}{6,5 P_0 V_0} = \frac{1}{13}$

Определим для 2 цикла: 1-3-4-1

Работа: $A' = \frac{1}{2} P_0 V_0$

Лист 3

Кол-во топлива, которое было потрачено на путешествие

55-10-21

$$Q = Q_{13} = \Delta V_{13} + A'_{13} = \frac{3}{2} (4p_0 V_0 - p_0 V_0) + 1,5 p_0 V_0$$

$$Q = 6 p_0 V_0$$

$$\eta_{134} = \frac{\frac{1}{2} p_0 V_0}{6 p_0 V_0} = \frac{1}{12}$$

Найдём отношение:

$$\frac{\eta_{134}}{\eta_{124}} = \frac{1}{12} : \frac{1}{13} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} \approx 1,08$$

Ответ: 1,08.

N2

В "Олимпиадной математике" участвует x человек,
а в "Робототехнике" участвует y человек.
Исходя из условия задачи можно составить систему.

$$\begin{cases} x + y > 29 \\ x - 2 > 3y \\ 3x - 2y < 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 29 - y & (1) \\ x > 3y + 2 & (2) \\ x < 20 + \frac{2}{3}y & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 2y + 3y \\ 2x - 2y > 31 \\ x - y > 15,5 \end{cases}$$

Пусть $x + y = 30 \Rightarrow$ тогда $2x = 46; x = 23 \Rightarrow y = 7$
 $x - y = 16$

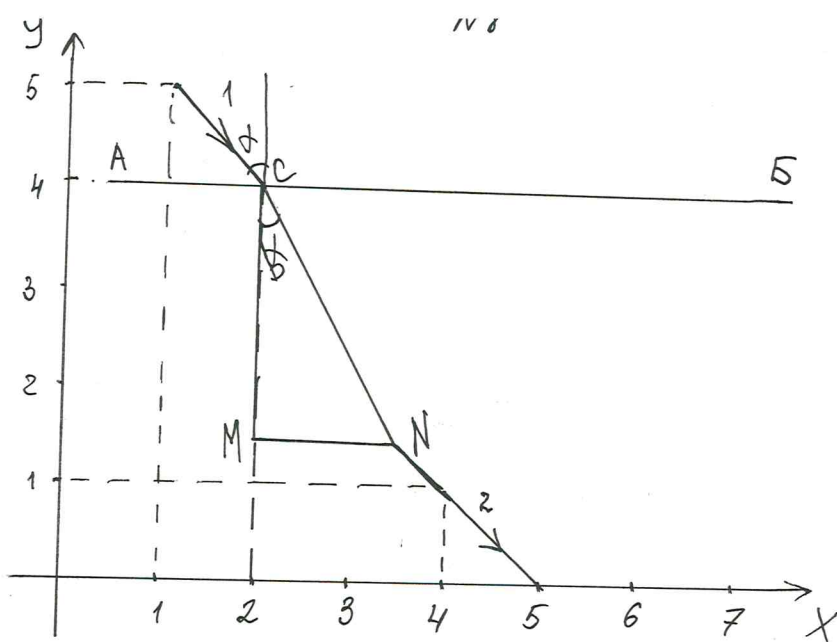
но при таких значениях не выполняется
неравенство (2).

Пусть $x = 24 \Rightarrow$ Тогда (1) $x + y > 29$ (т.к. $24 + 7 > 29$)
 $y = 7$ (2) $x - 2 > 3y$ (т.к. $24 - 2 > 3 \cdot 7$)
(3) $3x - 2y < 60$ (т.к. $3 \cdot 24 - 2 \cdot 7 < 60$)

Все условия выполняются $\Rightarrow$ в кружке "Олимпиадная
математика" 24 участника

Пусть $x = 25 \Rightarrow$ При таких значениях не выполняется
 $y = 7$ неравенство (3).

Ответ: 24 участника (школьника).



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1,5 \text{ по условию задачи}$$

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin 45}{1,5} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1,5} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{MC}{CN} = \cos \beta$$

$$\frac{CN}{\sin 90} = \frac{MN}{\sin \beta} \Rightarrow CN = \frac{MN}{\sin \beta}$$

$$CN^2 = CM^2 + MN^2$$

$$\frac{CM^2}{\cos^2 \beta} = CM^2 + \frac{CM^2}{\cos^2 \beta} \sin^2 \beta \quad \text{из основного тригонометрич. тождества:}$$

$$\cancel{CM^2} \cos^2 \beta = 1^2 - \sin^2 \beta$$