



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Ю-Ю-11-054

Ш

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	13	8	0	6	4	68

Sum

Вариант 2

77

пуз. +2

70

$$\sim 2. \begin{cases} \frac{\log_{25} x \cdot \log_5 y}{\log_{25} (xy)} = 1 \\ \frac{\log_5 y \cdot \log_{49} z}{\log_7 (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{\log_{125} z \cdot \log_5 x}{\log_{81} (zx)} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{25} x \cdot \log_5 y = \log_{25} (xy) \\ 5 \log_5 y \cdot \log_{49} z = 3 \log_7 (yz) \\ \log_{125} z \cdot \log_5 x = \log_{81} (zx) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{25} x \cdot \log_5 y = \log_{25} (xy) \\ 5 \log_5 y \cdot \log_{49} z = 3 \log_7 (yz) \\ \log_{125} z \cdot \log_5 x = \log_{81} (zx) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_5 x \cdot \log_5 y = \frac{1}{2} \log_5 (xy) \\ \frac{5}{2} \log_5 y \cdot \log_7 z = 3 \log_7 (yz) \\ \frac{1}{3} \log_5 z \cdot \log_5 x = \frac{1}{3} \log_5 (zx) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \log_5 x \cdot \log_5 y = 2 \log_5 (xy) \\ 5 \log_5 y \cdot \log_7 z = 6 \log_7 (yz) \\ 4 \log_5 z \cdot \log_5 x = 3 \log_5 (zx) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \log_5 x \cdot \frac{\log_5 y}{\log_5 3} = 2 \cdot \frac{\log_5 (xy)}{\log_5 3} \quad | \cdot \log_5 3 \\ 5 \log_5 y \cdot \frac{\log_5 z}{\log_5 7} = 6 \cdot \frac{\log_5 (yz)}{\log_5 7} \quad | \cdot \log_5 7 \\ 4 \log_5 z \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 3} = 3 \cdot \frac{\log_5 (zx)}{\log_5 3} \quad | \cdot \log_5 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \log_5 x \cdot \log_5 y = 2 \cdot \log_5 (xy) \\ 5 \log_5 y \cdot \log_7 z = 6 \cdot \log_7 (yz) \\ 4 \log_5 z \cdot \log_5 x = 3 \log_5 (zx) \end{cases}$$

Пусть $\log_5 x = a, \log_5 y = b, \log_5 z = c$, тогда

- логарифмы определены при $x > 0, y > 0, z > 0$
- $\log_{25} (xy) \neq 0$ $\log_7 (yz) \neq 0$
- $\log_{25} (xy) \neq \log_{25} 1$ $\log_7 (yz) \neq \log_7 1$
- $xy \neq 1$ $yz \neq 1$
- $\log_{81} (zx) \neq \log_{81} 1$ $zx \neq 1$

+

$$\begin{cases} 3ab = 2a + 2b \\ 5bc = 6b + 6c \\ 4ac = 3a + 3c \\ b(3a-2) = 2a \\ 5bc = 6b + 6c \\ c(4a-3) = 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{2a}{3a-2} \\ c = \frac{3a}{4a-3} \end{cases}$$

$$\frac{5 \cdot 2a \cdot a}{(3a-2)(4a-3)} = \frac{12a}{3a-2} + \frac{18a}{4a-3}$$

$$\frac{10a^2 - (2a(4a-3) + 18a(3a-2))}{(3a-2)(4a-3)} = 0$$

$$10a^2 - 48a^2 + 36a - 18a^2 + 12a = 0$$

$$(a \neq \frac{2}{3}, a \neq \frac{3}{4})$$

$$4a^2 + 24a = 0$$

$$4a(a+6) = 0$$

$$a = 0 \text{ или } a = -6$$

$$\begin{cases} b = \frac{2a}{3a-2} \\ c = \frac{3a}{4a-3} \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq \frac{2}{3} \\ a \neq \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{5 \cdot 2a \cdot 3a}{(3a-2)(4a-3)} = \frac{12a}{3a-2} + \frac{18a}{4a-3}$$

$$30a^2 - 12a(4a-3) - 18a(3a-2) = 0$$

$$-72a^2 + 72a = 0$$

$$-72a(a-1) = 0$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1$$

при $a=0$: $b = \frac{2 \cdot 0}{3 \cdot 0 - 2} = 0$; $c = \frac{3 \cdot 0}{4 \cdot 0 - 3} = 0$

$\log_5 x = 0$, $\log_5 y = 0$, $\log_5 z = 0$

$\Rightarrow a=0$ - не подходит. еще задарим.

~~при $a=6$: $b = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 6 - 2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$; $c = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6 - 3} = \frac{6}{5}$~~

при $a=1$: $b = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1 - 2} = 2$; $c = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1 - 3} = 3$

$\log_5 x = 1$ $\log_5 y = 2$ $\log_5 z = 3$

$\log_5 x = \log_5 5$ $\log_5 y = \log_5 25$ $\log_5 z = \log_5 125$
 $x=5$ $y=25$ $z=125$

Ответ: (5; 25; 125).

~ 1. Доказ:

$\triangle ABC$ - произв.

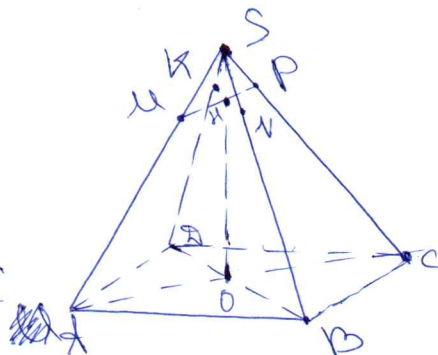
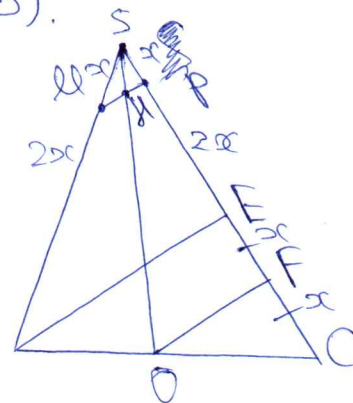
$\triangle ABC$ - равнобедренный

$M \in SA$, $N \in SB$, $P \in SC$

$SM:MA=1:2$, $SN:NB=1:3$, $SP:PC=1:4$

$SP:PC=1:4$

$\frac{SM}{MA} = ?$



Решение

1) SO - высота равнобедренного $\triangle ABC$ ($AB=AC$), тогда $SO \perp AB$ и $SO \perp BC$.

2) Пусть $SO \cap MP = K$. Рассмотрим $\triangle SPC$. Проведем $KE \parallel CP \parallel OF$.

Т.к. $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$, $KE \parallel CP$, то по теореме Фалеса $\frac{SK}{KO} = \frac{1}{2} = \frac{SP}{PC}$.

Т.к. O - медиана равнобедренного $\triangle ABC$, то $AO=OC \Rightarrow \frac{AO}{OC} = 1$. Т.к. $\frac{SK}{KO} = 1$, $KE \parallel OF$, то $\frac{KO}{OC} = \frac{EF}{FC} = 1$ ($EF=FC$).

3) Пусть x - длина EF , тогда $SP=2x$, $PE=2x$.

Т.к. $\frac{SP}{PC} = \frac{1}{4}$, то $PC=4x \Rightarrow EC=PC-PE=4x-2x=2x$.

Т.к. $EF=FC$, то $EF=FC=\frac{EC}{2}=\frac{2x}{2}=x$.

$PF=PE+EF=2x+x=3x$.

Т.к. $MP \parallel KE$, то по теореме Фалеса: $\frac{SM}{MA} = \frac{SP}{PC} = \frac{1}{3} = \frac{SM}{MO}$.

4) Т.к. $NO \parallel AB \Rightarrow \frac{SM}{MA} = \frac{SN}{NB} = \frac{1}{3}$, то $NO \parallel AB \Rightarrow \frac{SM}{MA} = \frac{SN}{NB} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{3}$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр _____

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

~3. $4^x + \sin^4 y + \ln^2 z = 25$. (1)

$2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 45$ - доказать

Введем векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}$ с координатами
 $\vec{n} = \{1; -4; 8\}$ и $\vec{m} = \{2^x; \sin^2 y; \ln^3 z\}$.

Тогда их скалярное произведение:

$\vec{n} \cdot \vec{m} = 1 \cdot 2^x - 4 \cdot \sin^2 y + 8 \cdot \ln^3 z = |\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cdot \cos \alpha$, α - угол между векторами.

$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$

$|\vec{m}| = \sqrt{4^x + \sin^4 y + \ln^6 z} = \sqrt{25} = 5$. (из (1)).

Т.к. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, то $|\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \geq |\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cdot \cos \alpha$.

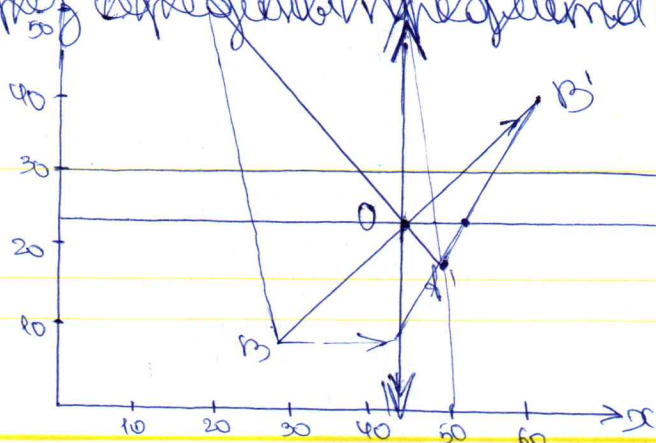
Т.е. $2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 9 \cdot 5$

$2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 45$, т.к. д.

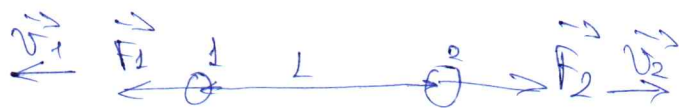
(7)

~8. Т.к. изображение уменьшенное и перевернутое, то линза собирающая, а предмет находится за двойным фокусом.
Пусть AB - предмет, $A'B'$ - изображение.
Проведем BB' и AA' .
 $BB' \cap AA' = O$, тогда O - оптический центр линзы.
 $A'(50; 20)$ $B'(60; 40)$.

Ответ: $O(45; 25)$.



16. $F = F_1 = F_2 = k \frac{q_1 q_2}{L^2}$ - сила Кулона.



Т.к. частицы движутся равномерно, то

$$m_1 a_1 = F \quad m_2 a_2 = F$$

$$m_1 a_1 = k \frac{q_1 q_2}{L^2} \quad m_2 a_2 = k \frac{q_1 q_2}{L^2}$$

$$a_1 = \frac{v_1}{t} \quad a_2 = \frac{v_2}{t}$$

$$\frac{m_1 v_1}{t} = k \frac{q_1 q_2}{L^2} \quad \frac{m_2 v_2}{t} = k \frac{q_1 q_2}{L^2}$$

$$v_1 = \frac{k q_1 q_2}{m_1 L^2} \quad v_2 = \frac{k q_1 q_2}{m_2 L^2}$$

Ответ: $v_1 = \frac{k q_1 q_2}{m_1 L^2}$, $v_2 = \frac{k q_1 q_2}{m_2 L^2}$

4. $a_1 = \cos 10^\circ$, $a_2 = \cos 100^\circ$, ..., $a_n = \cos(10n)^\circ$

$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x, x \in \mathbb{R}$$

$$a_{2023} = \cos(10^{2023})^\circ, \quad a_{2024} = \cos(10^{2024})^\circ$$

Знаем, что $10^{2023} \equiv 25 \pmod{360}$, $10^{2024} \equiv 10 \pmod{360}$

$$10^{2023} = 10^3 \cdot 10^{2020} = 10^3 \cdot 10^{2020 \cdot 25} = 10^3 \cdot 10^{50500} = 10^3 \cdot 10^{139 \cdot 360 + 280} = 10^3 \cdot 10^{280}$$

$$a_3 = \cos 1000^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 280^\circ) = \cos 280^\circ$$

$$a_{2023} = \cos(1000 \cdot 10^{2020})^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 280^\circ) \cdot 10^{2020}$$

$$a_{2024} = \cos(1000 \cdot 10^{2021})^\circ = \cos(12 \cdot 360^\circ + 280^\circ) \cdot 10^{2021}$$

$$\cos 10^\circ \cdot \cos x + (\cos 100^\circ + 2 \cos 1000^\circ) \cdot \sin x = \cos 10^\circ \cdot \cos x +$$

$$+ (\cos(90^\circ + 10^\circ) + 2 \cos(3 \cdot 360^\circ - 80^\circ)) \cdot \sin x = \cos 10^\circ \cdot \cos x +$$

$$+ (-\sin 10^\circ + 2 \cos 80^\circ) \cdot \sin x = \cos 10^\circ \cdot \cos x + (-\sin 10^\circ + 2 \cos(90^\circ - 10^\circ)) \cdot \sin x$$

$$\sin x = \cos 10^\circ \cdot \cos x + \sin 10^\circ \cdot \sin x = \cos(10^\circ - x)$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \text{знаем, знаем } -1$$

Ответ: -1



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр _____

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

~5. 2 закон Ньютона (у):

$$ma = mg + F_c, \text{ где}$$

F_c - сила сопротивления воздуха

т.е. в момент времени $t=2c$ $a = 10 \text{ м/с}^2 = g$, то

$$mg = mg + F_c \Rightarrow F_c = 0 \Rightarrow \text{скорость тела в}$$

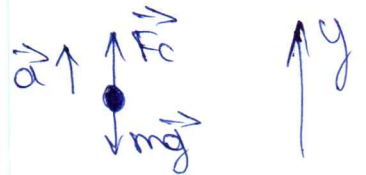
момент времени $t=2c$: $V=0$. (тело достигло

вершины траектории).

~~$V_0 = a \cdot t = 10 \cdot 2 = 20 \text{ м/с}$~~
 ~~$V = V_0 - g \cdot t = 20 - 10 \cdot 2 = 0$~~
 ~~$V_0 = a \cdot t = 10 \cdot 2 = 20 \text{ м/с}$~~
 ~~$V = V_0 - g \cdot t = 20 - 10 \cdot 2 = 0$~~

$$ma = F_c - mg$$

$$V=0 \Rightarrow V_0 = g \cdot t = 20 \text{ м/с}$$



~~$V_0 = a \cdot t = 10 \cdot 2 = 20 \text{ м/с}$~~
 ~~$V = V_0 - g \cdot t = 20 - 10 \cdot 2 = 0$~~
 ~~$V_0 = a \cdot t = 10 \cdot 2 = 20 \text{ м/с}$~~
 ~~$V = V_0 - g \cdot t = 20 - 10 \cdot 2 = 0$~~

Ответ: от 0 до 2с скорость тела уменьшается
от $20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ до 0 м/с.
От 2с до 12с скорость тела увеличивается,
в 12с стала равна 0 м/с.

~7. Дано:

$$t = 100^\circ \text{C}$$

$$h_0 = 0,6 \text{ м}$$

$$h = 0,15 \text{ м}$$

$$p_2 = 2 p_1$$

$$S = 500 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

Решение: т.к. установилось равновесие,
то давление пара равно атмосферному

$$p_2 = p_a, p_1 = p_2 = p_a$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$p_1 V_1 = \frac{mRT}{M}$$

$$p_2 V_2 = \frac{mRT}{M}$$

$$V_1 = h_0 S \quad V_2 = h S$$

$$p_1 S h_0 = \frac{mRT}{M}$$

$$2 p_1 S h = \frac{mRT}{M}$$

$$m' = m - m_b$$

$$1) p_1 S h_0 = \frac{mRT}{u}$$

$$2) 2p_1 S h = \frac{(m - m_b)RT}{u}$$

$$\frac{h_0}{2h} = \frac{m}{m - m_b}$$

$$h_0 m - h_0 m_b = 2hm$$

$$h_0 m_b = h_0 m - 2hm$$

$$m_b = m - m \cdot \frac{2h}{h_0}$$

$$\cancel{2p_1 S h_0} \quad 2p_1 S h = \frac{(m - m + m \cdot \frac{2h}{h_0})RT}{u}$$

$$2p_1 S h = \frac{2mhRT}{u h_0}$$

$$p_1 S = \frac{mRT}{u h_0}$$

$$m = \frac{p_1 S u h_0}{RT}$$

$$m = \frac{10^5 \cdot 500 \cdot 10^{-4} \cdot 0,018 \cdot 0,6}{8,31 \cdot 373} =$$

$$\text{Answer: } m =$$

Т.к. воздух является идеальным газом, то
можно использовать уравнение состояния
идеального газа

$$u = 0,018 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$p_a = 10^5 \text{ Па}$$

$$T = \pm 273^\circ \text{C} = 373 \text{ К}$$