



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 58-08-91

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	13	10	10	15	15	100

Вариант 1

№1

Пусть x - кол-во студентов (быво указавши), а
 y - стоимость коюнки в тыс. руб. - прики y - целое
(по условию).

Составим уравнение:

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x-2} - 1$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y-x+2}{x-2}$$

$$x(y-x+2) = y(x-2)$$

$$xy - x^2 + 2x = yx - 2y$$

$$x^2 - 2x = 2y$$

$$x \cdot (x-2) = 2y$$

$$y = \frac{x \cdot (x-2)}{2}; \quad y - \text{целое} \Rightarrow x \cdot (x-2) : 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x$ - четное.

$$20 \geq \frac{x \cdot (x-2)}{2} \geq 8$$

$$\frac{x \cdot (x-2)}{2} \geq 8$$

$$x^2 - 2x \geq 16$$

$$x^2 - 2x - 16 \geq 0$$

$$x \geq 6$$

$\Rightarrow x = 6$ или 7 , но x - четное $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6$, тогда

$$y = \frac{x \cdot (x-2)}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ тыс. руб.}$$

12 - целое, $8000 \leq 12000 \leq 20000$, совпадает с условием $\Rightarrow$ колонка стоит 12000 руб.

Ответ: 12000 руб.

№2

Всего цифр в указанной последовательности = $71 \cdot 2 + 9 = 151$ цифр. Вычеркнем 80 цифр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ оставшееся число должно состоять из 71 цифры.

Значит кол-во цифр в полученном числе - const (71). Надо сделать так, чтобы в начале числа (в наибольших разрядах) стояло максимальное кол-во девяток, а за ними наибольшая возможная цифра.

Наибольшее число:

9999748 4950515 25354 5556 575859606162636465-
666768697071727374757677787980

Всего - 71 цифра.

Анбем: 99997 4849...7980,
om 489080

$\sqrt{5}$

$$\frac{m_1}{m_2} = ?$$

$$R = R_1 = R_2 = 2 \text{ см}$$

$$r = 1 \text{ см}$$

$$\rho_1 = 2000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\rho_2 = 4000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \rho_2, \text{ м.к. } \frac{4000}{2000} = 2$$

$$R = 2r, \text{ м.к. } \frac{2 \text{ см}}{1 \text{ см}} = 2$$

$$V_{\text{вытесн}} = h \cdot S = h \cdot 2\pi R$$

$$m_1 = \rho_1 \cdot h \cdot 2\pi r + 2\rho_1 \cdot (h \cdot 2\pi R - h \cdot 2\pi r)$$

$$V_{\text{вытесн}} = h \cdot S = h \cdot \pi R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \rho_1 \cdot h \cdot \pi R^2 + 2\rho_1 \cdot (h \cdot \pi R^2 - h \cdot \pi r^2) =$$

$$= \rho_1 \cdot h \cdot \pi r^2 + 2\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot ((2r)^2 - r^2) =$$

$$= \rho_1 \cdot h \cdot \pi r^2 + 2\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot 3r^2 = \rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 + 6\rho_1 h \cdot \pi \cdot r^2 =$$

$$= 7\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$$

$$m_2 = 2\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 + \rho_1 \cdot (h \cdot \pi R^2 - h \cdot \pi r^2) =$$

$$= 2\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 + \rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot ((2r)^2 - r^2) = 2\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 +$$

$$+ \rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot (4r^2 - r^2) =$$

$$= 2\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 + 3\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 = 5\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{7\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2}{5\rho_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Анбем: 1,4.

$$\sqrt{6}$$

$$m_{\text{л}} - ?$$

$$V_{\text{в}} = 2 \text{ л} = 2 \text{ дм}^3 = 0,002 \text{ м}^3$$

$$t = 0^\circ \text{C}$$

$$c_{\text{в}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ \text{C}}$$

$$\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$g = 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$$

$$\lambda = 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

$$\tau_1 = 10 \text{ мин}$$

$$\tau_2 = 15 \text{ мин.}$$

$$t_{\text{кип}} = 100^\circ \text{C}$$

$$N (\text{мощность плиты}) =$$

$$= \frac{Q}{\tau} = \frac{m_{\text{в}} \cdot c_{\text{в}} \cdot (t_{\text{к}} - t_{\text{н}})}{\tau} =$$

$$= \frac{\rho \cdot V_{\text{в}} \cdot c_{\text{в}} \cdot (100^\circ \text{C} - 0^\circ \text{C})}{\tau_1} =$$

$$= \frac{1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 2 \text{ дм}^3 \cdot 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ \text{C}} \cdot 100^\circ \text{C}}{10 \text{ мин}}$$

$$= 84000 \frac{\text{Дж}}{\text{мин}}$$

вода во второй случае (после добавления льда) начнет

кипеть, когда весь лёд растает и дойдёт до температуры кипения.

$$N \cdot \tau = Q$$

$$Q = N \cdot \tau$$

$$\lambda \cdot m_{\text{л}} + m_{\text{л}} \cdot c_{\text{в}} \cdot (t_{\text{кип}} - t_{\text{к}}) = N \cdot \tau_2$$

$$m_{\text{л}} \cdot (\lambda + c_{\text{в}} \cdot (t_{\text{к}} - t_{\text{н}})) = N \cdot \tau_2$$

$$m_{\text{л}} = \frac{N \cdot \tau_2}{\lambda + c_{\text{в}} \cdot (100^\circ \text{C} - 0^\circ \text{C})} = \frac{84000 \frac{\text{Дж}}{\text{мин}} \cdot 15 \text{ мин}}{330000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} + 4200 \cdot 100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} =$$

$$= \frac{1260000}{750000} = \frac{126}{75} = 1,68 \text{ кг}$$

Ответ: 1,68 кг.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 58-08-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

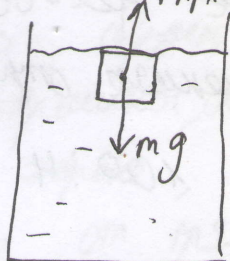
$$\sqrt{7}$$
$$\rho - ?$$

$$F = 2 \text{ Н}$$

$$V = 1 \text{ л}$$

$$\rho_{\text{ж}} = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Не указано в условии куда направлена сила F , поэтому следует рассмотреть два случая (I) сила направлена вниз (в сторону силы тяжести), тогда без этой силы груз бы всплыл (II) сила направлена вверх (в сторону силы Архимеда), тогда без этой силы груз бы утонул.



$$1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3 = 0,001 \text{ м}^3$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad mg + F = F_{\text{Арх}}$$

$$g \cdot V \cdot \rho + F = \rho_{\text{ж}} \cdot V \cdot g$$

$$\rho = \frac{\rho_{\text{ж}} \cdot V \cdot g - F}{g \cdot V} = \frac{1000 \cdot 0,001 \cdot 10 - 2}{10 \cdot 0,001} =$$

$$= \frac{8}{0,01} = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} < \rho_{\text{ж}} (1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3})$, тогда груз бы действительно всплывал - верно.

$$\textcircled{II} \quad mg = F + F_{\text{Арх}}$$

$$\rho \cdot g \cdot V = F + \rho_{\text{ж}} \cdot g \cdot V$$

$$\rho = \frac{F + \rho_{\text{ж}} \cdot g \cdot V}{g \cdot V} = \frac{2 + 1000 \cdot 10 \cdot 0,001}{10 \cdot 0,001} =$$

$$= \frac{12}{0,01} = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} > 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \Rightarrow$ Груз да действительно попла, противоречий нет; оба варианта верны.

Ответ: $800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ или $1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

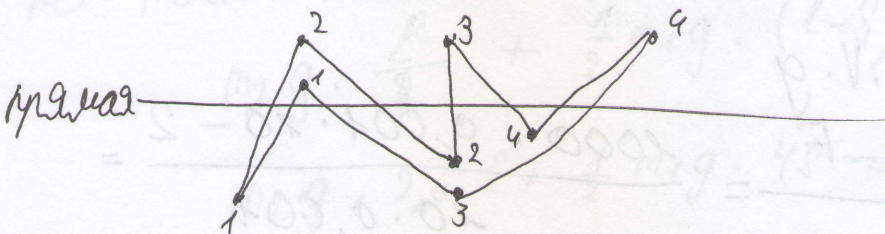
З3

а) 100 сторон $\Rightarrow$ 100 вершин.

Если это возможно, то сверху и снизу от прямой должно быть одинаковое кол-во точек (вершин) чтобы при их попарных соединениях отрезки пересекали прямую.

$$100 : 4$$

Пример:

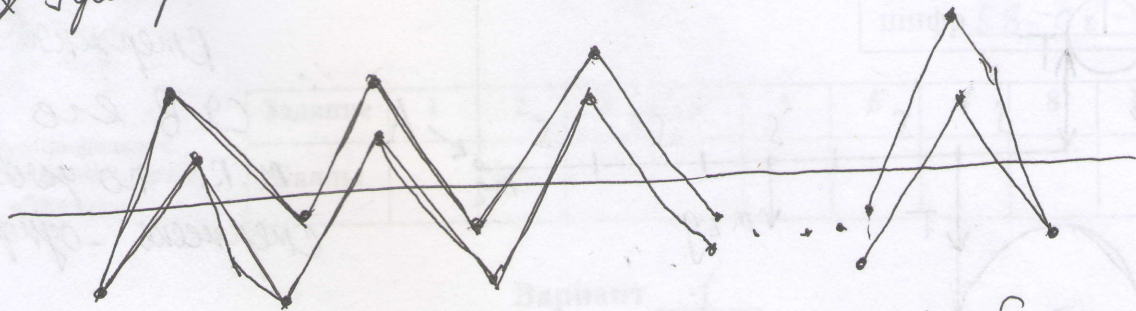


Сверху и снизу от прямой равное кол-во точек (по 4), прямая пересекает все стороны $\Rightarrow$ это возможно.

100 - четное $\Rightarrow$ можно будет разбить

на 2 равные группы (по 50 тысяч).

Пример:



Итак, моды сверху и снизу даю по 5 модок

Ответ: а) сушеемьем.

б) 99 сторон $\Rightarrow$ 99 вершин.

А, чтобы это было возможно, стороны пересекают границу $\Rightarrow$ ^{вершина} точка этой стороны находится по разное стороны от грани. Иначе образом сверху и снизу от грани должно быть одинаковое количество точек. $gg - \text{четное} \Rightarrow \text{ке грани} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Это будет selvfølgelig, т.к. в конце останется две вершины, от которых будет отходить только по одной стороне, и они будут находиться по одну сторону от прямой $\Rightarrow$ Соединяющая их сторона не будет пересекать прямую. Будет хотя бы одна сторона, которая не пересекает прямую.

Ответ: δ) не существует.

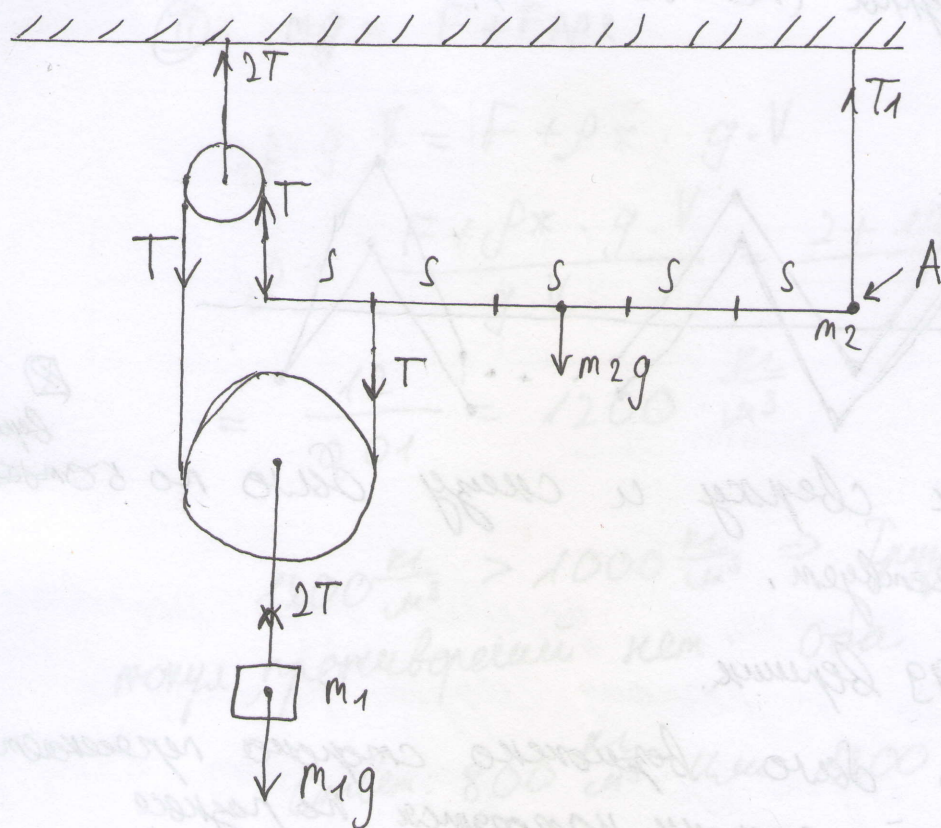
28

 $m_2 - ?$
$$m_1 = 1 \text{ kg}$$
$$l = 50 \text{ cm}$$
$$I = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{l}{s} = \frac{50}{10} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = 5 S$$

Разобейте стержень на рисунке на 5 равных частей.



центр тяжести
стержня находит-
ся в его центре,
м.к. по условию
стержня - однородной.

Расставлены все силы действующие в системе.
T - сила натяжения нити.

$2T$ уравнивает $F_{тяг}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2T = m_1 g$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 g.$$

Запишем правило моментов сил относительно точки A:

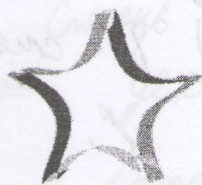
$$m_2 g \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} m_1 g \cdot (l - S) = \frac{1}{2} m_1 g \cdot l$$

$$m_2 g \cdot 2,5 S + \frac{1}{2} m_1 g \cdot 4S = \frac{1}{2} m_1 g \cdot 5S$$

$$2,5 m_2 g \cdot S = \frac{1}{2} m_1 g \cdot 5S - \frac{1}{2} m_1 g \cdot 4S$$

$$2,5 m_2 g S = \frac{1}{2} m_1 g S$$

$$2,5 m_2 = \frac{1}{2} m_1 \Rightarrow$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 58-08-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

$$\Rightarrow 5m_2 = m_1$$

$$m_2 = \frac{m_1}{5} = \frac{1 \text{ кг}}{5} = 0,2 \text{ кг} = 200 \text{ г.}$$

Ответ: 0,2 кг.

№4

Рассмотрим степени 4.

$$4^0 = 1$$

$$4^1 = 4$$

$$4^2 = 16$$

$$4^3 = 64$$

$$4^4 = 256$$

$$4^5 = 1024$$

$$4^6 = 4096$$

$$4^7 = 16384$$

$$4^8 = 65536$$

$$4^9 = 262144$$

и т.д.

Пусть $n(x)$ — сумма цифр числа 4^x , где x — некоторая степень 4. Заметим, а точнее рассмотрим, ряд чисел.

$$n(0) = 1$$

$$n(1) = 4$$

$$n(2) = 7$$

$$n(3) = 10$$

$$n(4) = 13$$

$$n(5) = 7$$

$$n(6) = 19$$

$$n(7) = 22$$

$$n(8) = 25 \dots$$

$$n(9) = 19$$

Закономерность пока что не наблюдается.

Теперь запишем сумму цифр каждого n .

Пусть $y(x)$ — сумма цифр каждого $n(x)$, x — степень

$4 \Rightarrow y$ — сумма цифр суммы цифр 4^x .

$$y(0) = 1$$

$$y(4) = 4$$

$$y(8) = 7$$

$$y(1) = 4$$

$$y(5) = 7$$

$$y(9) = 10$$

$$y(2) = 7$$

$$y(6) = 10$$

$$y(3) = 1$$

$$y(7) = 4$$

Снова закономерность не наблюдается.

Тогда запишем сумму цифр каждого y .

Пусть z — сумма цифр каждого y .

$$z(0) = 1$$

$$z(4) = 4$$

$$z(8) = 7$$

$$z(1) = 4$$

$$z(5) = 7$$

$$z(9) = 1$$

$$z(2) = 7$$

$$z(6) = 1$$

$$z(3) = 1$$

$$z(7) = 4$$

Видна закономерность: каждый третий ход цикличность $(1, 4, 7, \dots) \Rightarrow$ сумма цифр будет зависеть от остатка от деления степени (цифры) на 3.

Тогда, пятый член последовательности, где первое число 4^{2024} будет:

$$2024 : 3 = k \text{ (ост. 2)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Пятый и последующие члены последовательности будут 7.

Степень двойки делится ~~на 3~~ остаток
от деления на 3:

Остаток	Количество чисел
0	1
1	4
2	7

Эта закономерность всегда будет верной в данной
ситуации.

~~Поскольку нечетный 3-й шаг последовательности
будет больше 7 и может быть четным, но
5~~

Пятый член последовательности однозначно
будет 7 и все последующие соответственно тоже.
Ответ: 7.

$$n(0) = 1$$

$$n(1) = 4$$

$$n(2) = 7$$

$$n(3) = 10$$

$$n(4) = 13$$

$$n(5) = 16$$

$$n(6) = 19$$

$$n(7) = 22$$

$$n(8) = 25$$

$$n(9) = 28$$